

Fundamentos Causalidad: Modelo de Grafos Dirigidos Acíclicos

Alvaro J. Riascos Villegas

Enero de 2026

Contenido

- 1 **Introducción**
- 2 Paradoja de Simpson
- 3 Paradoja de Monty Hall
- 4 Modelos Causales Estructurales y Modelos Gráficos
- 5 Independencia en Modelos Gráficos: d-separación
- 6 Relación con Modelo Resultados Potenciales
- 7 Efectos Causales de Intervenciones

- Muchas preguntas que frecuentemente nos hacemos de un conjunto de datos: cómo (el mecanismo que causa un evento) y por qué (que sucedió que causó un evento), no es posible responderlas en el marco estadístico tradicional.
- Es necesario un marco conceptual adicional, una teoría de causalidad.

Jerarquía o Escalera de Causalidad de Pearl

Figure 1. The causal hierarchy. Questions at level 1 can be answered only if information from level i or higher is available.

Level (Symbol)	Typical Activity	Typical Questions	Examples
1. Association $P(y x)$	Seeing	What is? How would seeing X change my belief in Y ?	What does a symptom tell me about a disease? What does a survey tell us about the election results?
2. Intervention $P(y do(x), z)$	Doing, Intervening	What if? What if I do X ?	What if I take aspirin, will my headache be cured? What if we ban cigarettes?
3. Counterfactuals $P(y, x', y')$	Imagining, Retrospection	Why? Was it X that caused Y ? What if I had acted differently?	Was it the aspirin that stopped my headache? Would Kennedy be alive had Oswald not shot him? What if I had not been smoking the past two years?

- Establece una relación estricta: **imaginar** permite responder preguntas de **intervención** que a su vez permite responder preguntas de **observación**. Pero no al contrario.
- Imbens (2019) señala que esta jerarquía en realidad no responde a la pregunta, ¿por qué paso algo?

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Paradoja de Simpson**
- 3 Paradoja de Monty Hall
- 4 Modelos Causales Estructurales y Modelos Gráficos
- 5 Independencia en Modelos Gráficos: d-separación
- 6 Relación con Modelo Resultados Potenciales
- 7 Efectos Causales de Intervenciones

- Edward Simpson (1922): Una relación estadística que se cumple para toda la población puede reversarse en cada subpoblación.
- Por ejemplo: en una población de estudiantes se podría encontrar que en promedio los fumadores tienen mejores notas. Sin embargo, entre cada grupo de edad los fumadores tienen peores notas y, entre cada grupo de edad y sexo los fumadores tiene mejores notas y así puede reversarse la asociación anterior en cada subpoblación.

Paradoja de Simpson: Ejemplo

Example

Se les ofrece tomar de forma voluntaria una droga a 700 pacientes. 350 pacientes la toman y los demás no.

Table 1.1 Results of a study into a new drug, with gender being taken into account

	Drug	No drug
Men	81 out of 87 recovered (93%)	234 out of 270 recovered (87%)
Women	192 out of 263 recovered (73%)	55 out of 80 recovered (69%)
Combined data	273 out of 350 recovered (78%)	289 out of 350 recovered (83%)

Debemos o no recomendar la droga?

Los datos sugieren que **si conocemos el sexo de las personas, debemos recomendar tomar la droga**. Pero si no lo conocemos, no!

Paradoja de Simpson: Ejemplo

Example

Se les ofrece tomar de forma voluntaria una droga a 700 pacientes. 350 pacientes la toman y los demás no.

Table 1.1 Results of a study into a new drug, with gender being taken into account

	Drug	No drug
Men	81 out of 87 recovered (93%)	234 out of 270 recovered (87%)
Women	192 out of 263 recovered (73%)	55 out of 80 recovered (69%)
Combined data	273 out of 350 recovered (78%)	289 out of 350 recovered (83%)

Debemos o no recomendar la droga?

Los datos sugieren que **si conocemos el sexo de las personas, debemos recomendar tomar la droga**. Pero si no lo conocemos, no!

Paradoja de Simpson: Ejemplo

- En esta ejemplo tenemos 343 mujeres y 357 hombres.
- Es imposible racionalizar este fenómeno sin apelar a alguna teoría (i.e., hipótesis):
Suponga que el estrógeno reduce la efectividad de la droga.
Sin embargo, supongamos que esta es efectiva tanto en hombres como mujeres.

Paradoja de Simpson: Ejemplo

- Para evaluar el efecto de la droga sobre la población quisieramos eveluar que sucede con la población si todos toman la droga y compararla contra el resultado en el que nadie en la población toma la droga,
- Evidentemente esto no es lo que observamos en el experimento.
- Podríamos estimar ingenuamente el efecto si elegimos aleatoriamente una persona que tomo la droga y la comparamos contra una persona elegida aleatoriamente que no tomo la droga y repetimos varias veces esto y promediamos.
- Como es más probable elegir una mujer en el primer caso (i.e., son más mujeres las que toman la droga) y un hombre en el segundo caso, parece a nivel poblacional que la droga no funciona.
- Sin embargo esta forma de estimar el efecto poblacional esta fundamentalmente errada.

Paradoja de Simpson: Formalmente

- Formalmente queremos estimar (i.e., Teoría de resultados potenciales):

$$E(Y_t) - E(Y_c) \tag{1}$$

donde Y_t es el resultado sobre las personas de ser tratado y Y_c es el resultado sobre las personas si no son tratadas.

- El valor esperado es sobre toda la población pero no se puede observar una persona simultáneamente tratada y no tratada.**
- Lo que observamos es (S, Y_S) donde S es una función indicadora de si la persona fue tratada o no. Luego observamos $E(Y | S)$.
- Pero en general $E(Y_t) \neq E(Y_t | S = t)$ y $E(Y_c) \neq E(Y_c | S = c)$. Pues el tratamiento no es aleatorio.
- En nuestro caso, ser mujer y ser tratado no son independientes y el tratamiento tiene una efectividad distinta sobre las mujeres.

Hipótesis de Independencia

- Hay por lo menos tres formas de resolver este problema:
 - ① Estabilidad temporal y transitoriedad: el resultado de $Y_c(u)$, primero aplicar c a u y después observar el resultado $Y_c(u)$ no depende del momento en el que se haga y $Y_t(u)$ no depende de que anteriormente se haya expuesto u a c . El efecto causal se estima como $Y_t(u) - Y_c(u)$.
 - ② Homogeneidad de las unidades: $Y_t(u_1) = Y_t(u_2)$ y $Y_c(u_1) = Y_c(u_2)$. El efecto casual se toma como $Y_t(u_1) - Y_c(u_2)$. Esta hipótesis es común en diseños experimentales.
 - ③ Independencia estadística: $E(Y_t) = E(Y_t | S = t)$ y $E(Y_c) = E(Y_c | S = c)$.
- Obérvese que en las dos primeras se estima el efecto causal por unidad.
- La última requiere que el resultado sea independiente de ser tratado o no (i.e., lo que no sucede en la Paradoja de Simpson porque existe un factor común, sexo, que afecta el resultado y el tratamiento).

Hipótesis de Independencia y Regresión: Lineal

- La hipótesis de independencia se cumple cuando el tratamiento se asigna de forma aleatoria.
- En ese caso una forma de estimar el efecto es:

$$y = \beta_0 + \beta_1 T + \epsilon \quad (2)$$

donde T es la dummy de ser tratado o no y , por hipótesis, T es exógena: $E[\epsilon | T] = 0$

- En este caso el estimador de mínimos cuadrados ordinarios es un estimador no sesgado de el efecto promedio del tratamiento.

Paradoja de Simpson: Ejemplo

- Una versión continua de esta paradoja es la siguiente. Considere la relación entre el colesterol y el ejercicio de un grupo de personas.

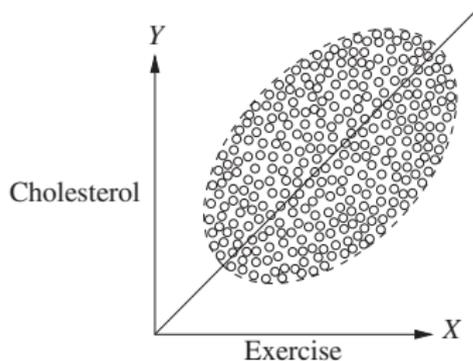


Figure 1.2 Results of the exercise–cholesterol study, unsegregated. The data points are identical to those of Figure 1.1, except the boundaries between the various age groups are not shown

Paradoja de Simpson: Ejemplo

- Ahora si condicionamos a la edad la historia es muy distinta.

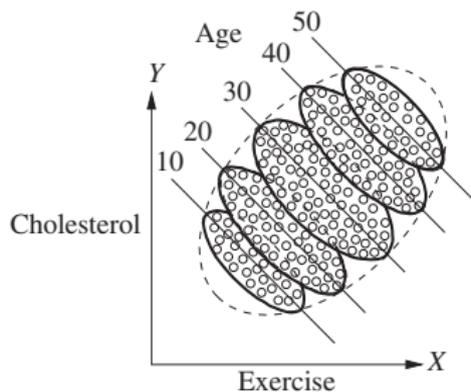


Figure 1.1 Results of the exercise–cholesterol study, segregated by age

Paradoja de Simpson: Ejemplo

- De nuevo, la única forma de racionalizar esto es apelando a alguna teoría (historia) que va más allá de los datos disponibles.
- Suponga que los mayores hacen más ejercicio que los más jóvenes y tiene el colesterol más alto independientemente de si hacen ejercicio.
- Entonces la edad es un factor común del ejercicio y los niveles de colesterol.

Paradoja de Simpson: Desagregar los datos no es siempre la solución

- Suponga que en el primer ejemplo no se registra el sexo. Se registra la presión arterial después del experimento.
- Suponga que la droga afecta la recuperación reduciendo la presión pero también tiene un efecto tóxico. En cada subgrupo el efecto tóxico predomina.
- Los resultados del experimentos son como a continuación (esta gráfica es idéntica a la anteriores excepto que se intercambiaron los nombres de las columnas).

Paradoja de Simpson: Ejemplo

- Los resultados a nivel agregado sugieren que se debe usar la droga, pero no si se analizan los datos condicional a la presión arterial.
- Si la presión arterial se midiera antes del experimento y esta tuviera un efecto sobre las personas que acceden al tratamiento y no al contrario, encontraríamos lo contrario,

Table 1.2 Results of a study into a new drug, with posttreatment blood pressure taken into account

	No drug	Drug
Low BP	81 out of 87 recovered (93%)	234 out of 270 recovered (87%)
High BP	192 out of 263 recovered (73%)	55 out of 80 recovered (69%)
Combined data	273 out of 350 recovered (78%)	289 out of 350 recovered (83%)

- En este caso:

$$E(Y_t) = E(Y_t | S = t), E(Y_c) = E(Y_c | S = c) \quad (3)$$

porque, por lo menos la otra variable observada la presión, no explica ser tratado (esta se mide después del tratamiento).

Paradoja de Simpson: Conclusiones

- En conclusion: En algunos casos la respuesta correcta puede estar en los datos desagregados, como en el primer ejemplo y en otros casos en la informacion agregada como en el segundo ejemplo.
- En la paradoja de Simpson, el problema está en asumir que la participación en el tratamiento y el resultado no son dependientes. Existe un factor común, el sexo, que induce una autoselección de los tratados.
- El análisis estadístico solo no permite responder estas preguntas, es necesario hipótesis adicionales y una teoría de como se generan los datos.

Correlación y Causalidad

- En los ejemplos anteriores hemos puesto a prueba nuestra intuición sobre la hipótesis de independencia. Sin embargo, la causalidad es un fenómeno aún más especial.
- Considere la correlación que existe entre:
 - 1 Crimen y consumo de helados.
 - 2 Ocupación hotelera y precios.
 - 3 Incendios y número de bomberos.
 - 4 Personas que andan apuradas y llegada tarde a reuniones, etc. content...
- En las próximas secciones vamos a desarrollar una teoría de la asociación y causalidad entre variables.

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Paradoja de Simpson
- 3 Paradoja de Monty Hall**
- 4 Modelos Causales Estructurales y Modelos Gráficos
- 5 Independencia en Modelos Gráficos: d-separación
- 6 Relación con Modelo Resultados Potenciales
- 7 Efectos Causales de Intervenciones

- La paradoja del gato (Monty Hall).
- Esta paradoja tiene origen en que en ocasiones **nuestras creencias solo dependen de los datos observados y desconocen la forma como se generan esos datos.**
- Cuando el maestro de ceremonias abre la puerta donde no está el gato esto no es por si solo informativo hasta tanto no se cuestione el procesos de decisión que siguió este para abrir la puerta.

La paradoja del gato (Monty Hall) Formalmente

- Supongamos que la primera elección fue la tercera puerta.
- Sean A_1, A_2 y A_3 los eventos en los cuales el gato está detrás de la puerta 1, 2 o 3 respectivamente.
- Sean B_1 y B_2 los eventos en los cuales el segundo jugador abre la puerta 1 o 2 respectivamente.
- Nuestro objetivo es calcular $P(A_i | B_j)$. Entonces dada la información del problema es natural suponer:

$$P(A_i) = \frac{1}{3}, P(B_1|A_1) = P(B_2|A_2) = 0$$

$$P(B_1|A_2) = P(B_2|A_1) = 1$$

y

$$P(B_1|A_3) = P(B_2|A_3) = \frac{1}{2}.$$

- Ahora, si la segunda persona abre la puerta 2 usando la regla de Bayes obtenemos $P(A_1|B_2) = \frac{2}{3}$

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Paradoja de Simpson
- 3 Paradoja de Monty Hall
- 4 Modelos Causales Estructurales y Modelos Gráficos**
- 5 Independencia en Modelos Gráficos: d-separación
- 6 Relación con Modelo Resultados Potenciales
- 7 Efectos Causales de Intervenciones

Introducción

- Un modelo causal estructural (SCM) consiste de un conjunto de variables aleatorias U y V y un conjunto de funciones F que establecen una relación entre las variables de U y V .

Example (Salario, educación y experiencia)

Sea $U = \{X, Y\}$, $V = \{Z\}$ y $F = \{f_Z\}$, tal que f_Z es la distribución de $Z := 2X + 3Y$. El modelo representa la relación de causalidad entre X , años de escolaridad, Y experiencia profesional y Z salario.

- Un modelo gráfico es una representación, de la relación entre variables aleatorias, como un grafo dirigido acíclico.
- Todo SCM se puede representar como un modelo gráfico.

Example (Salario, educación y experiencia)

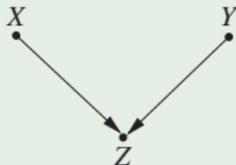


Figure 1.9 The graphical model of SCM 1.5.1, with X indicating years of schooling, Y indicating years of employment, and Z indicating salary

- Los modelos gráficos se pueden descomponer en tres estructuras básicas.
 - 1 Cadenas.
 - 2 Bifurcaciones.
 - 3 Colisionadores.

Ejemplos SCM: Cadenas

Example (Financiación de la Escuela, SAT Promedio, Tasa Aceptación Universidad)

Sea $V = \{X, Y, Z\}$, $U = U_x, U_y, U_z$ y $F = \{f_x, f_y, f_z\}$:

$$\begin{aligned}X &:= U_x \\Y &:= \frac{X}{3} + U_y \\z &:= \frac{Y}{16} + U_z\end{aligned}$$

Example (Horas de Trabajo, Entrenamiento, Tiempo de Carreras)

Sea $V = \{X, Y, Z\}$, $U = U_x, U_y, U_z$ y $F = \{f_x, f_y, f_z\}$ y:

$$\begin{aligned}X &= U_x \\Y &= 84 - X + U_y \\Z &= \frac{100}{Y} + U_z\end{aligned}$$

Modelos Gráficos Asociados: Cadenas

- Los dos ejemplos anteriores se pueden representar gráficamente como:

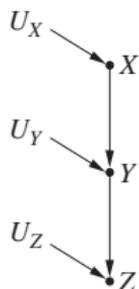


Figure 2.1 The graphical model of SCMs 2.2.1–2.2.3

- Este es un ejemplo de una **cadena**.
- Decimos que Z es potencialmente dependiente de Y , Y es potencialmente dependiente de X , Z es potencialmente dependiente de X ; y Z es independiente de X condicional en Y .

Definition

Dos variables X y Z son condicionalmente independientes dado Y si existe solo un camino unidireccional entre X y Z , y Y es cualquier conjunto de variables que intercepta este camino.

Example (Temperatura, Helados y Crimen)

Sea $V = \{X, Y, Z\}$, $U = U_x, U_y, U_z$ y $F = \{f_x, f_y, f_z\}$ y:

$$x := U_x$$

$$y := 4x + U_y$$

$$z := \frac{x}{10} + U_z$$

- El ejemplo anterior se pueden representar gráficamente como:

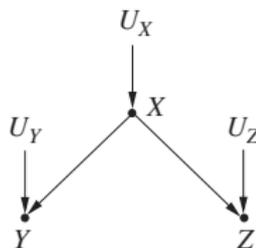


Figure 2.2 The graphical model of SCMs 2.2.5 and 2.2.6

- Este es un ejemplo de una **bifurcación**.
- Decimos que Z es potencialmente dependiente de X , Y es potencialmente dependiente de X , Z es potencialmente dependiente de Y , Z es independiente de Y condicional en X .

Definition

Si una variable X es una causa común de Y y Z y solo hay un camino entre Y y Z entonces Y y Z son independientes condicional a X .

Example

Sea $Z = X + Y$ donde X y Y son independientes. Por ejemplo X, Y pueden ser el resultado de lanzar aleatoriamente una moneda al aire. Si por lo menos una cae cara Z se activa, suena una campana.

Example

Sea X la habilidad musical de un individuo y Y su desempeño académico. X, Y son posiblemente independientes. Ahora sea Z si la persona tiene una beca de estudio o no.

- Lo ejemplos anteriores se pueden representar gráficamente como:

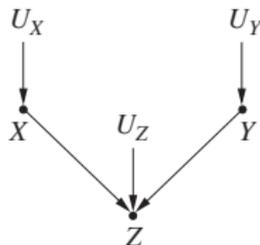


Figure 2.3 A simple collider

- X y Z , y Y y Z son dependientes. X y Y son independientes pero X y Y dado Z son dependientes.

Definition

Si una variable Z es una variable de colisión entre dos variables X y Y , y existe solo un camino entre X y Y , entonces X y Y son incondicionalmente independientes, pero son dependientes condicionalmente en Z y cualquiera de sus descendientes.

Independencia Condicional: Colisionadores

- En el ejemplo de la paradoja del gato (i.e., Monty Hall problem) el nodo X es la puerta que el agente elige, el nodo Y es donde esta el gato y Z es la puerta que abre el maestro de ceremonia.
- Si X es distinto a Y , Z queda completamente determinado.
- Condicional a la elección de maestro (Z) la elección de la puerta (X) y donde esta el gato (Y) son dependientes.

Example ($Z = X+Y$)

X, Y Bernoulli independientes.

Table 2.2 Conditional probability distributions for the distribution in Table 2.2. (Top: Distribution conditional on $Z = 1$. Bottom: Distribution conditional on $Z = 0$)

X	Y	$P(X, Y Z = 1)$
Heads	Heads	0.333
Heads	Tails	0.333
Tails	Heads	0.333
Tails	Tails	0

X	Y	$Pr(X, Y Z = 0)$
Heads	Heads	0
Heads	Tails	0
Tails	Heads	0
Tails	Tails	1

- La condición de dependencia condicional a un colisionador es importante para determinar si un modelo causal generó un conjunto de datos, para descubrir el modelo a partir de los datos y para resolver la Paradoja de Simpson.

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Paradoja de Simpson
- 3 Paradoja de Monty Hall
- 4 Modelos Causales Estructurales y Modelos Gráficos
- 5 Independencia en Modelos Gráficos: d-separación**
- 6 Relación con Modelo Resultados Potenciales
- 7 Efectos Causales de Intervenciones

d-separación

- Los grafos básicos anteriores son los átomos que conforman todos los grafos más complejos.
- El concepto de d-separación sirve como criterio para explorar las dependencias en cualquier modelo gráfico.
- Dos nodos que están d-separados son independientes. Si no están d-separados entonces son potencialmente dependientes.
- Este criterio permite establecer restricciones testeables sobre la concordancia entre datos observados y un DAG propuesto como generador de los datos.

Definition (d-separación)

Decimos que un camino p es bloqueado por un conjunto de nodos Z si se cumple alguna de estas:

- 1 p contiene un cadena $A \rightarrow B \rightarrow C$ donde $B \in Z$.
- 2 p contiene un bifurcación $A \leftarrow B \rightarrow C$ donde $B \in Z$.
- 3 p contiene un colisionador $A \rightarrow B \leftarrow C$ donde $B \notin Z$ y ningún descendiente de B está en Z .

Si Z bloquea todos los caminos de X a Y entonces X y Y están d-separados condicional en Z y por lo tanto X y Y son independientes condicional en Z .

Example (Z,Y d-separados condicional al conjunto vacío)

Solo hay un camino entre Z y Y y ese camino lo bloquea un colisionador: $Z \rightarrow W \leftarrow X$. Luego Z y Y son condicionalmente independientes (i.e., independientes condicional al conjunto de nodos vacío).

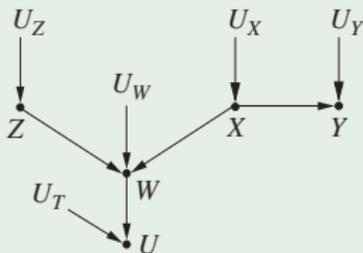


Figure 2.7 A graphical model containing a collider with child and a fork

Example (Z, Y d-conectados condicionales a W)

Solo hay un camino entre Z y Y . Si se condiciona a W queda una bifurcación X que no está en el conjunto W y el único colisionador sí está luego ese camino no está bloqueado.

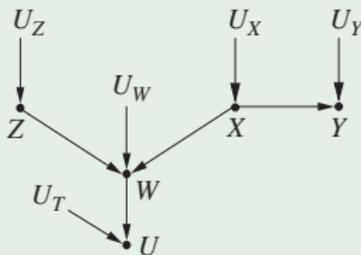


Figure 2.7 A graphical model containing a collider with child and a fork

Example (Z, Y d-separados condicional a $\{W, X\}$)

$\{W, X\}$ bloquea e único camino entre Z y Y .

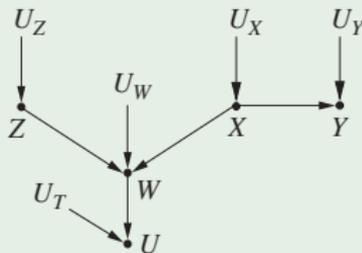


Figure 2.7 A graphical model containing a collider with child and a fork

Example (Z,Y incondicionalmente dependientes)

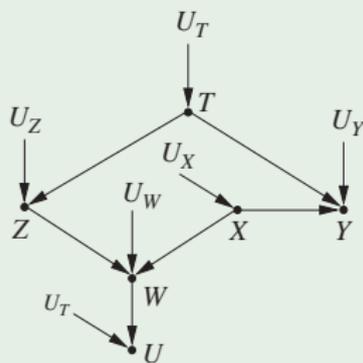


Figure 2.8 The model from Figure 2.7 with an additional forked path between Z and Y

Example (Z,Y condicional a T independientes)

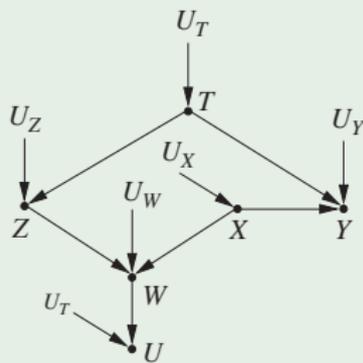


Figure 2.8 The model from Figure 2.7 with an additional forked path between Z and Y

Example (Z,Y condicional a T , W d-conectados)

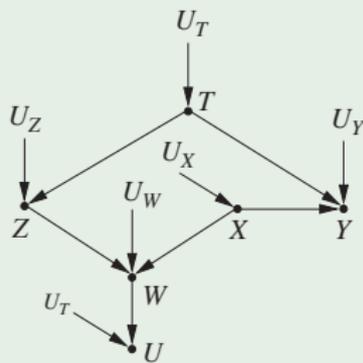


Figure 2.8 The model from Figure 2.7 with an additional forked path between Z and Y

Example (Z,Y condicional a T, W, X independientes)

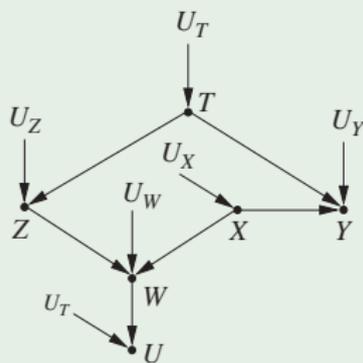


Figure 2.8 The model from Figure 2.7 with an additional forked path between Z and Y

Example (Z,Y Resumen de Dependencias)

Z , Y son potencialmente dependientes condicional a W , U , $\{W, U\}$, $\{W, T\}$, $\{U, T\}$, $\{W, U, T\}$, $\{W, X\}$, $\{U, X\}$ y $\{W, U, X\}$. Son d-separados o condicionalmente independientes en T , $\{X, T\}$, $\{W, X, T\}$, $\{U, X, T\}$ y $\{W, U, X, T\}$.

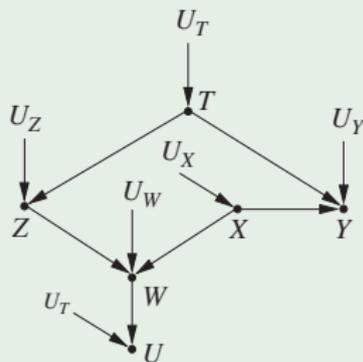


Figure 2.8 The model from Figure 2.7 with an additional forked path between Z and Y

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Paradoja de Simpson
- 3 Paradoja de Monty Hall
- 4 Modelos Causales Estructurales y Modelos Gráficos
- 5 Independencia en Modelos Gráficos: d-separación
- 6 Relación con Modelo Resultados Potenciales**
- 7 Efectos Causales de Intervenciones

Independencia condicional y VI

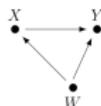


Figure 2: Unconfoundedness

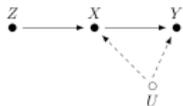


Figure 3: Instrumental Variables

- El objetivo es estimar el efecto causal de X en Y .

Confounding y sesgo de selección

- Confounding (crimen y helados, simpson I): ejemplos de bifurcaciones.
- Sesgo de selección (paradoja de Monty Hall, Berkson): ejemplos colisionadores.

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Paradoja de Simpson
- 3 Paradoja de Monty Hall
- 4 Modelos Causales Estructurales y Modelos Gráficos
- 5 Independencia en Modelos Gráficos: d-separación
- 6 Relación con Modelo Resultados Potenciales
- 7 Efectos Causales de Intervenciones

Ejemplo: Helados y Crimen

- Considere la representación gráfica:

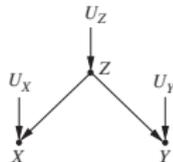


Figure 3.1 A graphical model representing the relationship between temperature (Z), ice cream sales (X), and crime rates (Y)

- Este gráfico refleja la relación probabilística entre las variables aleatoria.
- Condicionar a una variable es observar las demás solo cuando esa esta fija en cierto valor. No cambia el gráfico (i.e. cambiar la perspectiva para observar el mundo).

Ejemplo: Helados y Crimen

- Considere la representación gráfica:

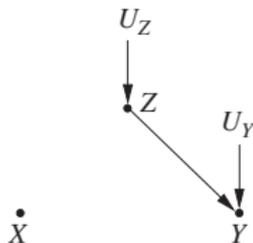


Figure 3.2 A graphical model representing an intervention on the model in Figure 3.1 that lowers ice cream sales

- Intervenir X consiste en fijar su valor independiente de todo lo que pueda afectarla. Cambia el gráfico (cambia el mundo).
- De este nuevo gráfico se deduce que intervenir X no tiene ningún efecto sobre Y .

Condicionar vs. Intervenir

- Condicionar es restringirse al estudio de los ejemplos o la parte de la población que tiene ciertas características.
- Intervenir es cambiar un valor de alguna variable para todo los ejemplos o población (i.e., una manipulación de la dependencia entre las variables).
- Para representar una condicional y diferenciarla de una intervención usamos la siguiente notación: $P(Y | X = x)$ y $P(Y | do(X = x))$.
- Suponemos que $P(Y | do(X = x)) = P_m(Y | X = x)$ donde P_m es la distribución de probabilidad del modelo gráfico manipulado.
- En muchas ocasiones (cuando X es binaria) estamos interesados en el efecto casual promedio:

$$P(Y = y | do(X = 1)) - P(Y = y | do(X = 0)) \quad (4)$$

- Consideremos el caso de la Paradoja de Simpson (i.e., primera versión).

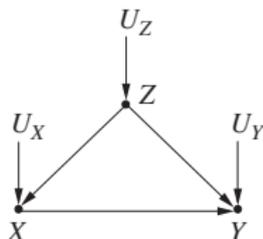


Figure 3.3 A graphical model representing the effects of a new drug, with Z representing gender, X standing for drug usage, and Y standing for recovery

- Si intervenimos $X = x$ se obtiene el nuevo diagrama.

Cálculo de Efectos Causales

- Intervención $X = x$.

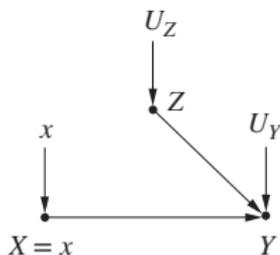


Figure 3.4 A modified graphical model representing an intervention on the model in Figure 3.3 that sets drug usage in the population, and results in the manipulated probability P_m

- Si suponemos que no existen efectos secundarios de la intervención sobre otras variables,
 $P_m(Y = y | Z = z, X = x) = P(Y = y | Z = z, X = x)$ y
 $P_m(Z = z) = P(Z = z)$ entonces podemos calcular el efecto causal $P(Y = y | do(X = x))$.

- $P(Y = y | do(X = x)) = P_m(Y = y | X = x)$ por definición.

$$P_m(Y = y | X = x) = \quad (5)$$

$$\sum_z P_m(Y = y | X = x, Z = z)P_m(Z = z | X = x) \quad (6)$$

$$= \sum_z P_m(Y = y | X = x, Z = z)P_m(Z = z) \quad (7)$$

$$= \sum_z P(Y = y | X = x, Z = z)P(Z = z) \quad (8)$$

- Esto se conoce como el ajuste por Z .

Example (Paradoja de Simpson I)

Sea $X = 1$ tomar la droga, $Y = 1$ recuperarse y $Z = 1$ ser hombre. Utilizando la tabla de frecuencias observadas:

$$P(Y = 1 \mid do(X = 1)) = 0,832 \quad (9)$$

$$P(Y = 1 \mid do(X = 0)) = 0,7818 \quad (10)$$

Luego $P(Y = 1 \mid do(X = 1)) - P(Y = 1 \mid do(X = 0)) = 0,0502$. Esto lo podemos interpretar como la diferencia en la fracción de las personas que se recuperan si todos toman la droga menos la fracción de los que se recuperan si nadie toma la droga.

- Obsérvese que de haberse conducido un experimento aleatorio controlado para conocer el efecto de la droga, el diagrama resultante sería como el diagrama intervenido.

Example (Paradoja de Simpson II)

En este caso una intervención no cambia el grafo (i.e., el grafo tendría la misma forma que si se hubiera hecho un experimento aleatorio controlado).

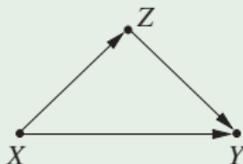


Figure 3.5 A graphical model representing the effects of a new drug, with X representing drug usage, Y representing recovery, and Z representing blood pressure (measured at the end of the study). Exogenous variables are not shown in the graph, implying that they are mutually independent

Como el grafo no cambia: $P(Y = y \mid do(X = x)) = P_m(Y = y \mid X = x) = P(Y = y \mid X = x)$, lo cual explica que se use las frecuencias condicionales (el efecto agregado observado).

- Este tipo de cálculo, denominado do-calculus, se puede generalizar utilizando los criterios de backdoor y frontdoor.