Introduccion al Diseño de Mecanismos en Estrategias Dominantes

Alvaro J. Riascos Villegas

Abril de 2026

Contenido

Introducción: Incentivos

- En interacciones estratégicas, los incentivos importan (e.g., paradoja de Braess).
- La teoría de juegos es una herramienta útil para describir el resultado de una interacción. Los conceptos centrales en juegos de información completa son: Equilibrio en Estrategias Dominates y Equilibrio de Nash.
- La multiplicidad de equilibrios y/o complejidad computacional para calcular los equilibrios son importantes en la práctica y sirven para juzgar la bondad de una solución.

Introducción: El problema de complejidad

- En juegos de suma cero, los equilibrios se pueden calcular usando programación lineal y la propiedad de intercambiabilidad hace inocua el problema de multiplicidad de equilibrios.
- En juegos que no son de suma cero, aún con dos jugadores, no existe un algoritmo eficiente para calcular equilibrios.
- Sorprendentemente, tampoco es un problema NP-dificil (i.e., es un ejemplo raro de un problema de eficiencia computacional intermedia).

Introducción: Diseño de mecanismos

- El problema principal es, dado un objetivo privado o social, cómo diseñar un juego en el que los participantes al interactuar de forma estrategica, el resultado (solución del juego) realice el objetivo deseado (i.e., implementa el objetivo).
- Los objetivos de forma más general son:
  1. **Predicción** fuerte de la solución del juego (equilibrio en estrategias dominantes, Nash, etc.). En esta presentación nos restringimos al caso de equilibrio en estrategias dominantes.
  2. Incentivos alineados con el objetivo deseado (i.e., **implementación**). El objetivo puede ser optimalidad en el sentido de Pareto o maximizacion de alguna función objetivo del planificador, etc.
  3. Eficiencia **computacional**.

Subastas

- Mecanismo de asignación de recursos.
- Permite la revelación del valor.
- Universal.
- Anónimo.

Ejemplos

- Tipos de subastas:
  - Para subastas unitarias existen cuatro subastas básicas.
    - Primer precio (cerrada)
    - Segundo precio (cerrada)
    - Inglesa (abierta)
    - Holandesa (abierta)
- Otros ejemplos de subastas son:
  - Subastas al tercer precio.
  - Todos pagan.
  - Guerra del desgaste: con dos jugadores gana el que más oferta pero todos pagan la segunda más alta.
  - Una loteria (ésta, sin embargo, no es una subasta estándar; una subasta es estándar cuando el ganador es el que más ofrece por el bien).

Subasta al segundo precio

- En esta subasta cada agente i observa su valoración $t_i \in [0, \omega]$. y escribe en un sobre su oferta por el bien, $b_i \in R_+$.
- Gana el jugador que más ofrezca y paga la segunda oferta más alta. En caso de empate se asigna el objeto aleatoriamente entre los ganadores y se paga lo ofertado.
- El payoff de los agentes es:

$$\begin{aligned} \pi_i &: R_+^N \times [0, \omega]^N \to R \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= t_i - \max_{j \neq i} \{b_j\} \text{ si } b_i > \max_{j \neq i} \{b_j\} \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= 0 \text{ si } b_i < \max_{j \neq i} \{b_j\} \end{aligned}$$

Subasta al segundo precio

- La estrategia de revelar la verdad para cada jugador, $\mathbf{b}^{II}(t_i) = t_i$ es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente).
- Este equilibrio es independiente de la estructura de información.

Subasta al segundo precio

- Demostración: Supongamos que cada agente observa su valoración privada y hace una oferta por el bien.
- Fijemos un agente, digamos el agente i y concentrémonos en su estrategia. Sea $Y_1 = \max_{j \neq i} \{b_j\}$. Y_1 determina si el agente i gana o no.
- $\mathbf{b}_i(t_i) > t_i$ no es racional.

Subasta al segundo precio

- Si $\mathbf{b}_i(t_i) < t_i$ pueden suceder tres cosas:

	Payoff		
	Estrategia $\mathbf{b}_i$		Estrategia $\mathbf{b}^{II}$
$Y_1 < b_i < t_i$	i gana	$t_i - Y_1$	$t_i - Y_1$
$b_i < Y_1 < t_i$	i pierde	0	$t_i - Y_1$
$b_i < t_i \leq Y_1$	i pierde	0	0

- Comparando con el resultado que hubiera tenido de utilizar la estrategia de revelar la verdad, es claro que esta última domina.

Subasta al segundo precio

- En conclusion, en la subasta al segundo precio revelar (ofertar) la verdadera valoración es un **equilibrio en estrategias dominantes (debilmente)**. En este caso decimos que la subasta es IC en estrategias dominantes.
- Es claro que participar en la subasta no puede conllevar a pérdidas a ningún agente una vez se conoce el ganador. Decimos que la subasta es ex post **individualmente racional** (IR).
- Si un mecanismo satisface estas dos características lo llamaremos Compatible en Incentivos en Estrategias Dominantes (**DSIC**) (obsérvese que DSIC = IC + IR).
- Propiedades adicionales: decir la verdad es el único equilibrio en estrategias dominantes y el resultado de la asignación es eficiente en el sentido de Pareto.

Subasta generalizada de segundo precio

- Subasta muy común en avisos publicitarios.
- Empresas ofertan por *keywords*: Costo por click y se conoce el *click through rate* de cada posición.
- Dos ideas claves:
  1. Costo por click (CPC): es el valor que las firmas le pagan a Google cada que una persona entra al link de la empresa por una busqueda de palabras claves. Depende de la posición en el resultado de la busqueda.
  2. La posición en la que aparecen los links de cada empresa se determina en una subasta (depende de la oferta del CPC de las empresas).

Subasta generalizada de segundo precio

- Los anunciantes ofertan cuanto están dispuesto a pagar por click (una única oferta) por busquedas de ciertas palabras claves.
- Se ordenan las ofertas de mayor a menor y de esa forma se asignan los espacios.
- Cada anunciante paga el costo de la oferta del anunciante inmediatamente debajo.
- GSP no es reveladora de las verdaderas disponibilidades a pagar por click.
- Tiene múltiples equilibrios de Nash y algunos no son óptimos.
- Sin embargo, existe por lo menos un equilibrio óptimo.

- En esta sección estudiamos algunas propiedades de las dos subastas introducidas anteriormente (análisis positivo) y propnemos algunas propiedades que nos gustaría que tuvieran (análisis normativo)

Subastas ideales I: Socialmente

- Estas son propiedades socialmente deseables de una subasta:
  1. Incentivos: revelar la verdadera valoración es un equilibrio en estrategias dominates (IC) e individualmente racional (IR).
  2. Resultado socialmente deseable: maximizar el bienestar social.

     $$\sum_{1}^{n} t_i Q_i \tag{1}$$

     donde Q_i es cero si i no recibe el objeto y uno en caso contrario.
  3. Eficiente computacionalmente: Incentiva la competencia.
- La subasta al segundo precio es ideal.
- La subasta generalizada de segundo precio no es ideal (no es IC).
- La subasta al primer precio no es ideal (no es IC).

Subastas ideales II: Privadamente

- Estas son propiedades deseables de una subasta desde el punto de vista privado:
  1. Incentivos: revelar la verdadera valoración es un equilibrio en estrategias dominates (IC) e incentivos a participar (IR): no depende de los tipos e incentiva la competencia.
  2. Resultado privado deseable: maximizar el ingreso esperado para el subastador
  3. Eficiente computacionalmente.
- La subasta al segundo precio es ideal socialmente.
- La subasta al segundo precio con precio de reserva es ideal privadamente.
- La subasta generalizada de segundo precio no es ideal (no es IC).
- La subasta al primer precio con precio de reserva no es ideal privadamente (no es IC) pero si maximiza el ingreso esperado para el subastador.

Subastas ideales: Estrategia de descubrimiento

- La estrategia tiene dos partes:
  1. Suponer que los agentes ofertan de forma sincera (i.e., revelan su verdadera valoración). Resolver el problema de optimalidad y eficiencia computacional bajo esa hipótesis.
  2. Dada la anterior respuesta, como deben ser los pagos para que las ofertas sean sinceras.
- Más adelante mostramos que la subasta de segundo precio generalizado es optima socialmente y eficiente computacionalmente, pero con los pagos propuestos no se logra que los agentes digan la verdad.
- Para tener más ejemplos vamos a generalizar un poco este modelo a **mecanismos directos de un solo parámetro con utilidad cuasi lineal**.

Mecanismo Directo de un solo parámetro

Definition

Un mecanismo directo es (T, Q, M) donde $T = \Pi_{i=1}^{n} T_i$, $Q : T \rightarrow \mathbf{R}^n$ es una regla de asignación y $M : T \rightarrow \mathbf{R}^n$ es el pago esperado.

- Decimo que el mecanismo de un **solo parámetro** cuando $T_i = \mathbf{R}$.
- Un mecanismo tiene un centro (e.g., el subastador) y unos agentes que participan del mecanismo.
- Los agentes observan su verdadero tipo $t_i \in T_i$ que determina sus preferencias y le envia un mensaje privado $b_i \in T_i$ al centro. Con el perfil de mensajes $(b_1, .., b_n)$, Q y M el centro determina el resultado y pago de participar en el mecanismo.

- En el caso de un solo parámetro decimos que las **preferencias son cuasilineales** si la utilidad de los agentes se puede expresar como:

$$Q_i(b_1, ..., b_n)t_i - M_i(b_1, ..., b_n) \tag{2}$$

- Hasta que no se diga lo contrario, de ahora en adelante seguiremos usando mecanismos directos de un solo parámetro con preferencias cuasilineales.
- Un mecanismo define un problema de interacción estrategica (i.e., un juego de información incompleta).

- El bienestar social en un mecanismo directo de asignación de un bien se puede definir como:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i Q_i(b_1, .., b_n) \tag{3}$$

- Obsérvese que esta función objetivo es igual a la función de bienestar social (i.e., el precio que paga el agente ganador se cancela con el ingreso del centro).

Example (Regla de Asignación de un Bien Privado)

Supongamos que la regla de asignación es:

$$Q : T \to \Delta([1:n]) \subset \mathbf{R}^n \tag{4}$$

Esta se interpreta como la probabilidad de asignarle el objeto a cada uno de los agentes.

Reglas de Asignación

Example (Ejemplos bienes privados)

- Subasta de una sola unidad.
- Subasta de múltiples unidades: Supongamos que se quieren subastar K unidades idénticas de un objeto y que cada participante se le puede asignar máximo una. Entonces la regla de asignació es la forma (ignorando empates):

$$\sum_{i=1}^{K} Q_i \leq K \tag{5}$$

- Subasta de avisos publicitarios.

Reglas de Asignación

Example (Ejemplos bienes públicos)

En este caso la regla de asignación es de la forma:

$$Q(t) = (0, ..., 0) \text{ o } (1, ..., 1) \tag{6}$$

Example (Subasta Segundo Precio)

Es un mecanismo directo de un solo parámetro para la asignación de un bien privado. Sea

- $Q_i(b_1, ..., b_n) = 1$, si para todo j, $b_i > b_j$. Caso contrario $Q_i(b_1, ..., b_n) = 0$. En caso de empate se asigna aleatoriamente.
- $M : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, donde $M_i(b_1, ..., b_n) = max\{b_j : j \neq i\}$ si para todo j, $b_i > b_j$, cero caso contrario. En caso de empate sería el pago esperado.

Compatibilidad en incentivos

Example (Subasta segundo precio)

Revelar la verdad es un equilibrio en estrategias dominantes:

$$Q_i(b_1, ..., t_i, ...b_n)t_i - M_i(b_1, ..., t_i, ...b_n) \geq \tag{7}$$

$$Q_i(b_1, ..., b_i', ..., b_n)t_i - M_i(b_1, ..., b_i', ..., b_n) \tag{8}$$

Esto es lo que se conoce como *compatibilidad en incentivos en un equilibrio en estrategias dominantes*.

Racionalidad individual

Example (Subasta segundo precio)

(Q, M) es IR si existe un incentivo a partcipar:

$$Q_i(b_1, ..., t_i, ..., b_n)t_i - M_i(b_1, ..., t_i, ..., b_n) \geq 0$$

Example (Subasta segundo precio)

En la subasta al segundo precio gana el agente con tipo más alto (i.e., valoración). Como $Q_i(b_1, .., b_n)$ es una distribución de probabilidad:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i Q_i(b_1, .., b_n) \tag{9}$$

se maximiza cuando la distribución se concentra en el tipo más alto.

Implementación DSIC

Definition (Implementación DSIC)

Una regla de asignación Q es implementable, si existe una regla de pago M tal que el mecanismo directo (Q, M) es DSIC.

Definition (Regla de Asignación Monótona)

Una regla de asignación Q es monótona si para cada agente i y ofertas b_{-i}, $Q_i(b_i, b_{-i})$ es no decreciente en b_i.

- Observación: continuamos trabajando con mecanismos directos de un solo parámetro y utilidad cuasi lineal.

Theorem (Lema de Myerson)

Para un ambiente de un solo parámetro:

1. *Una regla de asignación es implementable si y sólo si es monótona.*
2. *Si Q es monótona entonces existe una única regla de pago M para el cual es mecanismo (Q, M) es DSIC y $M(b) = 0$ cuando $b_i = 0$.*
3. *La regla de pago del item anterior tiene una función explícita.*

Ejemplos

- La subasta al segundo precio es monótona.
- La subasta en la que el objeto se le asigna a la segunda oferta más alta (i.e., subasta no estándar) no es monótona.
- La subasta de avisos publicitarios es monótona pero la regla de pagos de la GSP no es DSIC (i.e., no es la que da el lema de Myerson).