Juegos de Información Incompleta [1]

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes y Quantil

Abril 2025

[1] Basado en Riascos, A. 2024. Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones.

www.alvaroriascos.com

Contenido

Juegos de Información Incompleta

- Un juego de información incompleta BG (o Juego Bayesiano) en forma estratégica es:

$$BG = (I, (A_i)_{i \in I}, (T_i)_{i \in I}, (\pi_i)_{i \in I}, F)$$

  - I es un conjunto de jugadores (finito).
  - A_i es un conjunto de acciones para cada jugador.
  - T_i es un conjunto de información para cada jugador.
  - $\pi_i : A \times T \to R$ es la utilidad de cada jugador, $A = \prod_{i \in I} A_i$, $T = \prod_{i \in I} T_i$.
  - F es una distribución de probabilidad sobre T.

Juegos de Información Incompleta

- La distribución F es el modelo probabilístico del espacio de información de todos los agentes.
- Asumimos que todos los elementos del juego son conocimiento común.
- Esto convierte un problema de información asimétrica en uno de información incompleta.

Un juego de información incompleta

- Para simplificar la exposición, vamos hacer los siguientes supuestos sobre F.
    - F tiene una densidad f y $f = \prod_{i \in I} f_i$ donde f_i es una densidad sobre T_i.
    - El jugador i utiliza la densidad $\prod_{j \neq i} f_j$ para evaluar la información de los demás agentes.
    - Este supuesto quiere decir que la información de los jugadores es independiente.
    - Esto no quiere decir que la información de los demás agentes no tenga consecuencias sobre su utilidad.

Ejemplos

Example (Batalla de los sexos modificado)

- $I = \{1, 2\}$.
- $A_M = A_H = \{B, S\}$.
- Dependiendo del estado del ánimo la mujer puede tener preferencias distintas por ir al partido o de compras.
- $T_M = \{B, S\}$, $T_H = \{N\}$.
- Solo la mujer sabe al levantarse cual es su estado de ánimo. El hombre sabe el de él pero no el de ella.
- $\pi_M, \pi_H : A_M \times A_H \times T_M \times T_H \to R$
- El hombre tiene las mismas preferencias independientemente del estado de ánimo de la mujer. Formalmente π_H no cambia de valor en su tercera componente.

Ejemplo

Example (Batalla de los sexos modificado: continuación)

Las preferencias de la mujer dependen de su estado de ánimo (las del hombre son independientes):

- $\pi_M(\cdot, \cdot, B, N) : A_M \times A_H \to R$

Hombre / Mujer	B	S
B	3,2	2,1
S	0,0	1,3
Ánimo de ir al partido		

- $\pi_M(\cdot, \cdot, S, N) : A_M \times A_H \to R$

Hombre / Mujer	B	S
B	1,2	0,1
S	2,0	3,3
Ánimo de ir de compras		

Un juego de informacion incompleta formalmente

Example (Batalla de los sexos modificado: continuación)

Estructura de información: el hombre le atribuye una probabilidad subjetiva p de que la mujer amanezca con ánimo de ir al partido.

- Formalmente f_M, f_H son densidades discretas sobre $\{B, S\}$, $\{N\}$ respectivamente.

$$\begin{aligned} f_{-H}(B) &= f_M(B) = p \\ f_{-H}(S) &= f_M(S) = 1 - p \\ f_{-M}(N) &= f_H(N) = 1 \end{aligned}$$

- $f = f_M \times f_H$.
- Obsérvese que en este caso la información no solo es privada sino que la información privada de ninguno de los dos afecta la utilidad del otro (i.e., valores privados).

Contenido

Estrategias y definiciones de equilibrio

- Una estrategia es una función $\alpha_i : T_i \to A_i$.
- Una estrategia $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ domina (débilmente) una estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$ si para toda estrategia $\alpha_{-i} : T_{-i} \to A_{-i}$ y $t \in T$:

$$\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \alpha_{-i}(t_{-i}), t) \geq \pi_i(\alpha_i(t_i), \alpha_{-i}(t_{-i}), t)$$

  con desigualdad estricta por lo menos para un α_{-i} y t.
- Obsérvese que la definición anterior es equivalente a la siguiente. Una estrategia $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ domina (débilmente) una estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$ si para toda acción $a_{-i} \in A_{-i}$ y $t_i \in X_i$:

$$\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), a_{-i}, t) \geq \pi_i(\alpha_i(t_i), a_{-i}, t)$$

  con desigualdad estricta por lo menos para un a_{-i} y t_i.
- Una estrategia $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ es dominante (débilmente) si domina (débilmente) a toda estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$.

Estrategias y definiciones de equilibrio

Example (Batalla de los sexos modificado: continuación)

Las estrategias son:

$$
\begin{aligned}
\alpha_M &: \{B, S\} \to \{B, S\}. \\
\alpha_H &: \{N\} \to \{B, S\}.
\end{aligned}
$$

- La estrategia $\alpha_M(B) = B$, $\alpha_M(S) = S$ domina cualquier otra estrategia para la mujer luego es una estrategia dominante.

Estrategias y definiciones de equilibrio

- Equilibrio en estrategias dominantes (débilmente): $\widehat{\alpha} : T \to A$ es un equilibrio en estrategias dominantes si para todo $i \in I$, $\widehat{\alpha}_i$ es una estrategia dominante (débilmente).
- Más adelante daremos un ejemplo de un equilibrio en estrategias dominantes en juegos de información incompleta (el equilibrio en la subasta al segundo precio).
- La importancia del concepto de equilibrio en estrategias dominantes es doble. De una parte supone una forma débil de racionalidad y de otra, es independiente de la estructura de información.
- La doctrina de Wilson hace referencia a algunas de estas características deseables de los mecanismos de asignación de recursos.

- Equilibrio de Nash-Bayesiano. $\widehat{\alpha} : T \to A$ es un equilibrio de Nash-Bayesiano si para todo jugador $i \in I$ y para todo estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$ y $t_i \in T_i$:

$$
\begin{aligned}
E_{-i}[\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i}) | T_i &= t_i] \geq \\
E_{-i}[\pi_i(\alpha_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i}) | T_i &= t_i]
\end{aligned}
$$

- En el caso particular en que la estructura de información, (X, F) es independiente, la última desigualdad la podemos escribir como:

$$
\begin{aligned}
& E_{-i}[\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})] \\
\geq \quad & E_{-i}[\pi_i(\alpha_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})]
\end{aligned}
$$

donde el valor esperado se calcula utilizando la densidad f_{-i}.

Example (Batalla de los sexos modificado: continuación)

Supongamos que:

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_M &: \{B,S\} \to \{B,S\}. \\ \widehat{\alpha}_H &: \{N\} \to \{B,S\}. \end{aligned}$$

es un equilibrio de Nash-Bayesiano.

- Para la mujer, ella no tiene ninguna incertidumbre sobre el estado de ánimo del hombre. Entonces debe cumplirse:

$$\pi_M(\widehat{\alpha}_M(t_M), \widehat{\alpha}_H(N), t_M, N) \geq \pi_M(\alpha_M(t_M), \widehat{\alpha}_H(N), t_M, N)]$$

- Como ella tiene una estrategia dominante el candidato a $\widehat{\alpha}_M$ es:

$$\widehat{\alpha}_M(B) = B, \widehat{\alpha}_M(S) = S.$$

Estrategias y definiciones de equilibrio

Example (Batalla de los sexos modificado: continuación)

Para el hombre, él tiene que calcular su mejor reacción a esta estrategia:

$$E_{-H}[\pi_H(\widehat{\alpha}_M(T_M), \widehat{\alpha}_H(N), T_M, N)]$$

$$\geq$$

$$E_{-H}[\pi_H(\widehat{\alpha}_M(T_M), \alpha_H(N), T_M, N)]$$

$$p\pi_H(B, \widehat{\alpha}_H(N), B, N) + (1-p)\pi_H(S, \widehat{\alpha}_H(N), S, N)$$

$$\geq$$

$$p\pi_H(B, \alpha_H(N), B, N) + (1-p)\pi_H(S, \alpha_H(N), S, N)$$

Example (Batalla de los sexos modificado: continuación)

Supongamos que $\widehat{\alpha}_H(N) = B$, entonces la desigualdad anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} & p\pi_H(B,B,B,N) + (1-p)\pi_H(S,B,S,N) \\ \geq \\ & p\pi_H(B,S,B,N) + (1-p)\pi_H(S,S,S,N) \end{aligned}$$

es fácil mostrar que $p \geq \frac{3}{4}$.

Example (Batalla de los sexos modificado: continuación)

- Si $p < \frac{3}{4}$, la estrategia óptima es $\widehat{\alpha}_H(N) = S$.
- Si $p = \frac{3}{4}$ existe un equilibrio en estrategias mixtas.

Example (Competencia imperfecta)

- Las firmas tienen funciones de costos:

$$c_i\left(q_i\right) = cq_i$$

  $c \in \{1, 2\}$.
- El valor de c es común a ambas firmas.
- La firma 1 está informada del costo pero la firma 2 no.
- La firma 2 le atribuye una probabilidad subjetiva p de que el costo sea $c = 1$ para la firma 1.
- La función de demanda inversa es:

$$P\left(Q\right) = \text{máx}\left\{M - dQ, 0\right\}$$

Example (Competencia imperfecta: continuación)

Representación como un juego de información incompleta:

- $I = \{1, 2\}$.
- $A_1 \times A_2 = R_+ \times R_+$.
- $T_1 = \{1, 2\}$, $T_2 = \{t\}$.
- $\pi_i : R_+^2 \times \{1, 2\} \times \{t\} \to R$ es el payoff de cada jugador.
- Para la firma 1:

$$\begin{aligned} \pi_1(q_{11}, q_2, 1, t) &= (M - d(q_{11} + q_2) - 1)q_{11} \\ \pi_1(q_{12}, q_2, 2, t) &= (M - d(q_{12} + q_2) - 2)q_{12} \end{aligned}$$

Example (Competencia imperfecta: continuación)

- Para la firma 2:

$$\begin{aligned} \pi_2(q_{11}, q_2, 1, t) &= (M - d(q_{11} + q_2) - 1)q_2 \\ \pi_2(q_{12}, q_2, 2, t) &= (M - d(q_{12} + q_2) - 2)q_2 \end{aligned}$$

- Obsérvese que el payoff de la firma 2 depende de la información de la firma 1. Sin embargo, la información es puramente privada. Esto no sucedia en el caso de la batalla de los sexos.
- Esto pone de manifiesto que en un juego de información incompleta la información puede ser completamente privada aún cuando la información privada de cada jugador afecte el payoff de los demás jugadores.

Estrategias y definiciones de equilibrio

Example (Competencia imperfecta: continuación)

- f_1 y f_2 son probabilidades discretas sobre $\{1,2\}$ y $\{t\}$ respectivamente.

$$\begin{aligned} f_{-2}(\{1\}) &= f_1(\{1\}) = p \\ f_{-2}(\{2\}) &= f_1(\{2\}) = 1-p \\ f_{-1}(\{t\}) &= f_2(\{t\}) = 1 \end{aligned}$$

- Una estrategia para la firma 1 son dos niveles de producción q_{11} y q_{12} y para la firma 2 es un nivel de producción q_2.
- Supongamos que $(\widehat{q}_{11}, \widehat{q}_{12}, \widehat{q}_2)$ es un equilibrio de Nash - Bayesiano. Entonces deben cumplirse las siguientes condiciones.

Example (Competencia imperfecta: continuación)

- Para la firma 1, para todo $q_{11} \in R_+$ y $q_{12} \in R_+$,

$$
\begin{aligned}
(M - d(\widehat{q}_{11} + \widehat{q}_2) - 1)\widehat{q}_{11} &\geq (M - d(q_{11} + \widehat{q}_2) - 1)q_{11} \\
(M - d(\widehat{q}_{12} + \widehat{q}_2) - 2)\widehat{q}_{12} &\geq (M - d(q_{12} + \widehat{q}_2) - 2)q_{12}
\end{aligned}
$$

- Para la firma 2, para todo $q_2 \in R_+$,

$$
\begin{aligned}
& p(M - d(\widehat{q}_{11} + \widehat{q}_2) - 1)\widehat{q}_2 + (1 - p)(M - d(\widehat{q}_{12} + \widehat{q}_2) - 2)\widehat{q}_2 \\
\geq & \\
& p(M - d(\widehat{q}_{11} + q_2) - 1)q_2 + (1 - p)(M - d(\widehat{q}_{12} + q_2) - 2)q_2
\end{aligned}
$$

Example (Competencia imperfecta: continuación)

- Suponiendo que existe una solución interior a los tres problemas de maximización es fácil mostrar que la solución es:

$$\begin{aligned}
\widehat{q}_{11} &= \frac{2M-1-p}{6d} \\
\widehat{q}_{12} &= \frac{2M-4-p}{6d} \\
\widehat{q}_{2} &= \frac{M-2+p}{3d}
\end{aligned}$$