

Tópicos en Juegos Dinámicos de Información Imperfecta¹

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes y Quantil

Abril de 2026

¹Basado en Riascos, A. 2026. Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones.
www.alvaroriascos.com

Contenido

- 1 Modelo
- 2 Juego del Conductor Distráido
- 3 Memoria Perfecta

Contenido

- 1 Modelo
- 2 Juego del Conductor Distráido
- 3 Memoria Perfecta

Modelo

- En muchas circunstancias de interacción estratégica, los agentes no pueden observar lo que han jugado sus adversarios en el pasado. Esto motiva el siguiente modelo.

Definition

Un juego en forma extensiva de información (perfecta o imperfecta) es una estructura de la forma:

$$\Gamma = (\mathcal{N}, K, R, Z, \{K_i\}_{i=1, \dots, n}, \{H_i\}_{i=1, \dots, n}, \{A(k)\}_{k \in K \setminus Z}, \{u_i\}_{i=1, \dots, n})$$

donde:

- Para $i = 1, \dots, n$; H_i es una partición de K_i . Cada $h \in H_i$ denota un conjunto de información. Las particiones H_i son la estructura de información de los agentes en el juego.
- Para $i = 1, \dots, n$, y $k \in K_i$, $A(k)$ denota las acciones posibles del jugador i en el nodo k . Denotamos un elemento de $a \in A(k)$ por a_k . Dados k y $k' \in h \in H_i$ debe cumplirse que $A(k) = A(k')$. Abusando un poco del lenguaje definimos $A(h) = A(k)$, $k \in h$ y denotamos una acción $a \in A(h)$ por a_h .

Definition

Sea $A_i = \bigcup_{h \in H_i} A(h)$. Una estrategia pura s_i para el jugador $i = 1, \dots, n$ en un juego en forma extensiva Γ es una función $s_i : H_i \rightarrow A_i$ tal que para todo $h \in H_i$, $s_i(h) \in A(h)$.

Definition (Forma normal)

Para $i = 1, \dots, n$; sea $S_i = \{s_i : H_i \rightarrow A_i \mid s_i(h) \in A(h)\}$,
 $s \in S = \prod_{i=1}^N S_i$ y definimos $\zeta(s) \in Z$ como el nodo final correspondiente al único camino que sobre el árbol define la estrategia conjunta s . Para $i = 1, \dots, N$ definimos $\pi_i(s_1, \dots, s_N) = u_i(\zeta(s_1, \dots, s_N))$. El juego $G = (\{1, \dots, N\}, \{S_i\}_{i=1, \dots, N}, \{\pi_i\}_{i=1, \dots, N})$ se llama la representación normal del juego en forma extensiva.

Definition (Estrategias mixtas y de comportamiento)

Una estrategia mixta en un juego en forma extensiva es una estrategia mixta del juego en su representación normal. Una estrategia de comportamiento en un juego en forma extensiva es una estrategia mixta del juego en su representación multiagente. Alternativamente, una estrategia de comportamiento para el jugador i es una función $\gamma_i : H_i \rightarrow \Delta(A_i)$ tal que para todo $h \in H_i$ el soporte de $\gamma_i(h)$ está contenido en $A(h)$.

Estrategias mixtas y de comportamiento

- En general, las estrategias mixtas y de comportamiento no son estratégicamente equivalentes.
- En efecto, no es obvio como relacionarlos de forma natural y unívoca.

Example

Considere el juego de la figura 1 y la estrategia mixta para el jugador 1: $0,5[AC] + 0,5[BD]$.

- Una posibilidad para el jugador 1 es:
 $(0,5[A] + 0,5[B], 0,5[C] + 0,5[D])$ donde la primera coordenada corresponde a la estrategia mixta en el primer conjunto de información del jugador 1 y la segunda al segundo conjunto de información.
- Sin embargo, esto no parece razonable, pues en la estrategia mixta original para escoger D es necesario escoger BD y en ese caso, el segundo agente del jugador 1 jamás jugaría y por lo tanto no escogería D en su estrategia de comportamiento.

Example

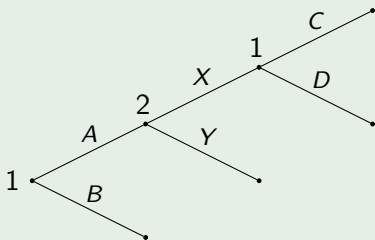


Figura: Estrategias mixtas y de comportamiento

Ahora, condicional a que le toca jugar al segundo agente del jugador 1, la probabilidad de escoger D es 1. Luego otra posible representación de la estrategia mixta como una estrategia de comportamiento es: $(0,5[A] + 0,5[B], [D])$.

Estrategias mixtas y de comportamiento

- Este ejemplo motiva la siguiente definición. Decimos que una estrategia pura $s_i \in S_i$ para el jugador i en la representación normal del juego es **compatible** con el conjunto de información $h_i \in H_i$ si existe un conjunto de estrategias s_{-i} para los demás jugadores tal que la estrategia conjunta $s = (s_i, s_{-i})$ implica *pasar por* h_i .
- Sea $\widehat{S}_i(h_i)$ la estrategias puras de i compatibles con el conjunto de información.

Estrategias mixtas y de comportamiento

Dada una estrategia mixta σ_i del juego en formal normal, definimos la siguiente estrategia de comportamiento para el jugador i :

$$\gamma_i(h)(a) = \frac{\sum_{\{s_i \in \hat{S}_i(h_i): s_i(h_i)=a\}} \sigma_i(s_i)}{\sum_{s_i \in \hat{S}_i(h_i)} \sigma_i(s_i)} \quad \text{si } \sum_{s_i \in \hat{S}_i(h_i)} \sigma_i(s_i) > 0$$
$$\gamma_i(h)(a) = \frac{\sum_{\{s_i \in \hat{S}_i(h_i): s_i(h_i)=a\}} \sigma_i(s_i)}{\sum_{s_i \in \hat{S}_i(h_i)} \sigma_i(s_i)} \quad \text{si } \sum_{s_i \in \hat{S}_i(h_i)} \sigma_i(s_i) = 0$$

Example

En el anterior ejemplo, esta definición implica que $\gamma_1(h_1)(D) = 1$.

- Desde un punto de vista estratégico, las estrategias mixtas y de comportamiento no son siempre equivalentes. Esto sucede en los juegos de memoria perfecta que se discuten más adelante. Como motivación consideremos este juego de Piccione y Rubinstein.

Contenido

- 1 Modelo
- 2 Juego del Conductor Distráido
- 3 Memoria Perfecta

Un juego de memoria imperfecta

Este es un juego de memoria imperfecta donde un agente puede estar tentado a cambiar de decisión a pesar de no haber recibido ninguna información adicional. Considere el siguiente juego debido a Piccione y Rubinstein en la figura 2.

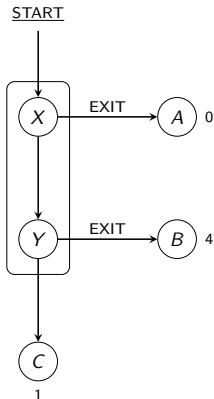


Figura: Juego de memoria imperfecta: El conductor distraído I

Un juego de memoria imperfecta

- Hay por lo menos dos formas de aproximarse a la solución de este juego. En la primera, que la llamaremos la solución planeada, la estrategia óptima es resolver este problema:

$$\max_p (p^2 1 + p(1-p))4 + (1-p)0$$

donde p es la probabilidad de que el conductor continúe. Es decir $p = \frac{2}{3}$.

- Otra alternativa es definir una estrategia de acción (similar a una estrategia de comportamiento). Sin embargo, esta alternativa es, conceptualmente, nada trivial. El lector puede intentar definir una estrategia cuando el conductor llega a una intersección (no sabe cuál!) y entenderá el reto de hacerlo. El lector puede consultar en Internet las innumerables discusiones sobre el tema. En particular, este ejemplo está basado en Aumann (1997).

Contenido

- 1 Modelo
- 2 Juego del Conductor Distráido
- 3 Memoria Perfecta

Memoria Perfecta

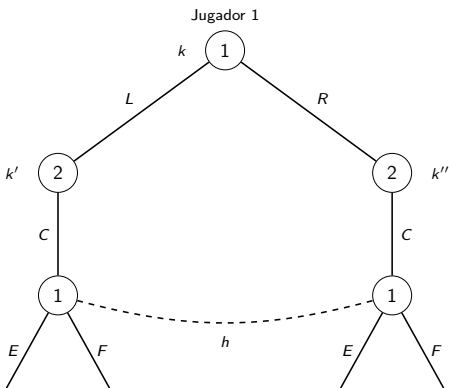
- En los juegos con memoria perfecta las estrategias mixtas y de comportamiento son estratégicamente equivalentes. Esto es, juegos en los que ningún jugador olvida sus acciones o información adquirida en el pasado.
- El teorema que establece la equivalencia estratégica entre estrategias mixtas y de comportamiento en juegos de memoria perfecta se debe a Kuhn (1953).

Definition (Memoria Perfecta)

Un juego en forma extensiva es de memoria perfecta si ningún jugador olvida las acciones tomadas o la información que en algún momento tuvo. Formalmente esto se puede expresar como:

- 1 No olvidar acciones: i no olvida $a \in A(k)$, $k \in K_i$, $k = P(k')$, $k = P(k'')$, $k' \neq k''$, donde $P(x)$ denota el conjunto de los predecesores inmediatos de x , entonces todo par de nodos sucesores de k' , k'' en los que i deba tomar una decisión están en conjuntos de información distintos.
- 2 No olvidar información pasada: i no olvida información pasada si para todo $h \in H_i$, $k, k' \in h$, si $\hat{k} \in K_i$ es un predecesor de k entonces existe un $\hat{k}' \in K_i$ predecesor de k' tal que \hat{k} y \hat{k}' están en el mismo conjunto de información.

Violación: Olvida Acciones (Condición 1)



Violación: Olvida Información (Condición 2)

