Juegos Estratégicos de Información Completa[1]

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes y Quantil

Enero 2024

[1] Basado en Riascos, A. 2024. Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones. www.alvaroriascos.com

Contenido

Contenido

¿Qué es la teoría de juegos?

- La teoría de juegos es el estudio de las interacciones estratégicas entre agentes racionales con diferentes objetivos.
- La principal característica de esta teoría es que reconoce que las decisiones de un jugador pueden afectar de forma directa los objetivos de los demás jugadores.
- Podemos dividir la teoría en dos grandes ramas; la teoría de juegos estratégicos (o juegos no cooperativos) y la teoría de juegos coalicionales (o juegos cooperativos).
- En este libro nos vamos a concentrar únicamente en la teoría de juegos estratégicos.

¿Qué es la teoría de juegos?

- Los juegos estratégicos se pueden representar de dos formas.
    1. Forma normal, para juegos estáticos.
    2. Forma extensiva, para juegos dinámicos.

¿Qué es la teoría de juegos?

Juegos Estáticos

Información Incompleta

e.g. Subastas

Información Completa

e.g. Piedra, Papel o Tijera

Juegos Dinámicos

Información Imperfecta

e.g. Poker

Información Perfecta

e.g. Ajedréz

Contenido

Forma Normal

Definition (Juego en forma normal)

Un juego en forma normal es una estructura $G = (N, \{S_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{\pi_i\}_{i=1,\ldots,n})$ donde

1. N es un conjunto de jugadores, $N = \{1, ..., n\}$.
2. S_i es un conjunto de acciones o estrategias puras para cada jugador.
3. $\pi_i : \prod_{i=1}^{n} S_i \to \mathbb{R}$ es la utilidad (pago neto) de cada jugador.

Example (Dilema de los prisioneros)

Sea $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{A, C\}$. El pago neto de cada agente lo representamos mediante la siguiente tabla. La convención que vamos a utilizar es que la estrategia del jugador 1 la representan las filas y las del jugador 2 las columnas. El pago neto del primer jugador es el primer número de cada celda. Del segundo jugador, el segundo.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Batalla de los Sexos

Example (Batalla de los sexos)

Supongamos que hay dos agentes $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{B, S\}$,
$\pi_1, \pi_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$

M\H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Juego de conducción

Example (Juego de conducción)

Supongamos que hay dos conductores que en ausencia de normas de tránsito deben decidir todos los días por cuál carril conducir su carro. Entonces $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{D, I\}$, $\pi_1, \pi_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$

M\H	D	I
D	1,1	0,0
I	0,0	1,1

Example (Juego de revelación)

Los dos jugadores son un ser superior (SB) y una persona (P). Las estrategias para SB son: $S_{SB} = \{RE, NRE\}$, $S_P = \{CE, NCE\}$ donde RE y NRE significan respectivamente que SB revela su existencia y que no revela su existencia y CE, NCE significan respectivamente que P cree o no cree en su existencia.

SB\P	CE	NCE
RE	3,4	1,1
NRE	4,2	2,3

Contenido

Elementos principales

1. El conjunto de acciones y/o un conjunto de consecuencias.
2. Una relación de preferencia sobre las consecuencias.
3. Una hipótesis de comportamiento o racionalidad.
4. Una estructura de conocimiento.

Conocimiento común e inconsciencia

Example (Paradoja de los sombreros)

Contenido

¿Qué es solucionar un juego?

- ¿Cuál es nuestra mejor predicción de la interacción de los agentes en el juego?
- ¿Qué estrategias consideramos razonables para cada jugador?
- ¿Qué debería de jugar cada jugador?
- Todo concepto de solución de un juego está basado en un supuesto sobre todas las características fundamentales de un problema de decisión con múltiples agentes.

¿Qué es solucionar un juego?

- *Una solución de un juego es una descripción sistemática del resultado que podríamos esperar de la interacción de los jugadores en el juego.*
- Hay tres conceptos claves que unifican las ideas principales relacionadas con la solución de un juego.
    1. Dominancia
    2. Estabilidad
    3. Seguridad

Contenido

Definiciones básicas

Definition (Dominancia)

Una estrategia $\widehat{s}_i \in S_i$ domina débilmente una estrategia $s_i \in S_i$, o s_i es una estrategia débilmente dominada por $\widehat{s}_i$, si para todo $s_{-i} \in S_{-i}$:

$$\pi_i(\widehat{s}_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i})$$

con desigualdad estricta por lo menos para un s_{-i}.

Ejemplos

Example

En el siguiente juego, para el agente 1, Y domina a Z.

$1 \backslash 2$	A	B	C
X	2,7	2,0	2,2
Y	7,0	1,1	3,2
Z	4,1	0,4	1,3

Equilibrio

Definition (Estrategias dominantes)

Una estrategia $\widehat{s}_i \in S_i$ es una estrategia dominante débilmente si domina débilmente a toda estrategia. Decimos que es dominante (estrictamente) si domina (estrictamente) a toda estrategia.

Definition (Equilibrio en estrategias dominantes)

Cuando cada uno de los jugadores tiene una estrategia dominante estrictamente (débilmente) $\widehat{s}_i \in S_i$, decimos que el juego tiene un equilibrio en estrategias dominantes estrictamente (débilmente). Este equilibrio es el perfil de estrategias $\widehat{s} = (\widehat{s}_1, \widehat{s}_2, ..., \widehat{s}_n) \in S$.

Ejemplos

Example (Dilema de los prisioneros)

En el dilema de los prisioneros cada uno de los agentes tiene una estrategia dominante.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Obsérvese que $\pi_i(A, s_{-i}) > \pi_i(C, s_{-i})$ para todo i y para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.

Ejemplo

Example (Batalla de los sexos)

En la batalla de los sexos ningún jugador tiene una estrategia dominante.

M\H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Eliminación de estrategias dominadas

- El equilibrio en estrategias dominantes es un concepto de equilibrio muy fuerte desde el punto de vista estratégico, ya que requiere de la existencia de estrategias dominantes para cada jugador.
- Es muy débil desde el punto de vista del grado de conocimiento que se supone de los jugadores.
- El equilibrio en estrategias dominantes estrictamente se basa en una hipótesis de comportamiento débil: Los individuos no juegan nunca una estrategia que es dominada.

Eliminación de estrategias dominadas

Definition (Estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa)

Sea $S_i^0 = S_i$ y definamos S_i^k, $k \geq 0$ de la siguiente forma:

$$S_i^{k+1} = \left\{ \begin{array}{c} s_i \in S_i^k : \text{No existe } \widehat{s}_i \in S_i^k \text{ tal que} \\ \pi_i(\widehat{s}_i, s_{-i}) > \pi_i(s_i, s_{-i}), \ \forall s_{-i} \in S_{-i}^k \end{array} \right\}$$

Eliminación de estrategias dominadas

Definition (Juegos solucionables en estrategias no dominadas iterativamente)

Si S^{∞} consiste de un sólo elemento, decimos que el juego es solucionable en estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa.

Example

Example

Consideremos el juego:

1\2	A	B	C
X	2,7	2,0	2,2
Y	7,0	1,1	3,2
Z	4,1	0,4	1,3

El proceso de eliminación arroja:

$$\begin{array}{l|l}
S_1^0 = \{X, Y, Z\} & S_2^0 = \{A, B, C\} \\
S_1^1 = \{X, Y\} & S_2^1 = \{A, B, C\} \\
S_1^2 = \{X, Y\} & S_2^2 = \{A, C\} \\
S_1^3 = \{Y\} & S_2^3 = \{A, C\} \\
S_1^4 = \{Y\} & S_2^4 = \{C\}
\end{array}$$

Example

Example (Eliminación de estrategias dominadas débilmente)

Considere el siguiente ejemplo:

1\2	L	R
U	5,1	4,0
M	6,0	3,1
D	6,4	4,4

Observe que D domina débilmente tanto a U como a M. Si se empieza el proceso eliminando a U solamente, el resultado es diferente a si se empieza eliminando a M solamente y es diferente a si se eliminan ambas al comienzo. Eliminando a U sobreviven $\{(D, R)\}$. Eliminando a M sobreviven $\{(D, L)\}$. Dominando débilmente a U y a M sobreviven $\{(D, L), (D, R)\}$.

Ejercicio

Sea EW y ES el conjunto de equilibrios en estrategias dominantes débilmente y estríctamente respectivamente. Demostrar que:

$$ES \subseteq EW \subseteq W^{\infty} \subseteq S^{\infty}$$

Contenido

Equilibrio de Nash - Cournot

Definition (Equilibrio de Nash - Cournot)

Una estrategia conjunta $\widehat{s} \in S$ es un equilibrio de Nash - Cournot si para todo jugador i y para toda estrategia $s_i \in S_i$:

$$\pi_i(\widehat{s}_i, \widehat{s}_{-i}) \geq \pi_i(s_i, \widehat{s}_{-i})$$

Ejemplos

Example (Dilema de los prisioneros)

En el dilema de los prisioneros el equilibrio de Nash $\widehat{s} = \{(A, A)\}$ coincide con el equilibrio en estrategias dominantes.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Equilibrio de Nash - Cournot

Example (Batalla de los sexos)

La batalla de los sexos tiene dos equilibrios de Nash ninguno de los cuales es un equilibrio en estrategias dominantes.

M\H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Example (Paradoja de Braess)

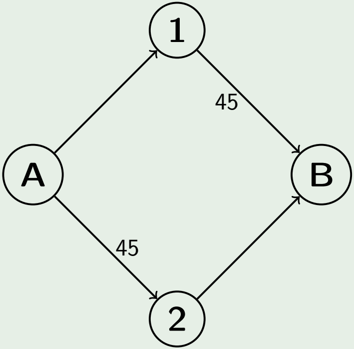

Figura 1.2: Rutas posibles para ir de la ciudad A a la B.

Número de carros $= 4{,}000$. Tiempo por segmento $=$ número de carros / 100.

Ejemplo

Example (Paradoja de Braess)

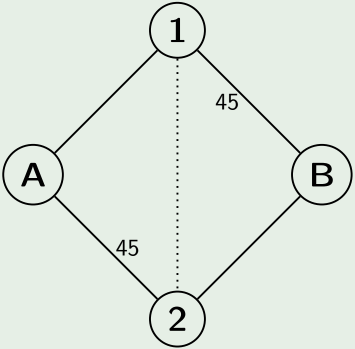

Figura 1.3: Rutas posibles para ir de la ciudad A a la B al construir una nueva carretera (línea punteada).

Nash sobrevive eliminación estricta

Todo equilibrio de Nash sobrevive el proceso de eliminación de estrategias dominadas estrictamente.

Nash sobrevive eliminación estricta: Prueba

Demostración.

Sean $EN(S)$ los equilibrios de Nash del juego G cuando el espacio de estrategias es S. Es claro que $EN(S) \subseteq S^1$ (la eliminación fuerte no puede eliminar una estrategia que haga parte de un equilibrio de Nash). Ahora, obsérvese que los equilibrios de Nash cuando el espacio de estrategias es S^1 (i.e., $EN(S) \subseteq EN(S^1)$). Aplicando el mismo argumeto anterior al caso en que el juego tiene como espacio de estrategias S^1 obtenemos $EN(S) \subseteq EN(S^1) \subseteq S^2$. Continuando de esta forma obenemos: $EN(S) \subseteq S^\infty$. $\square$

Nash no sobrevive eliminación débil

Example

Nash no sobrevive eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente.

1\2	A	B
A	1,1	0,-3
B	-3,0	0,0

Note que (A, A) y (B, B) son equilibrios de Nash. Sin embargo, para ambos jugadores B es una estrategia dominada débilmente.

Contenido

Ejemplo

Example

Considere el siguiente juego:

1\2	A	B
X	2,1	2,-20
Y	3,0	-10,1
Z	-100,2	3,3

El único equilibrio de Nash (Z, B) de este juego es un poco peligroso para el jugador 1. Observemos que si el jugador 2 comete un error y no juega Nash entonces 1 se ve muy perjudicado (pasa de ganar 3 a -100). Alternativamente él podría jugar una estrategia que le garantizara el mejor pago posible en el peor de los casos.

Maxmin

Definition

Formalmente el valor maxmin o valor de seguridad de un jugador, en estrategias puras, se define como la utilidad para el jugador i cuando el jugador i resuelve:

$$\max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} \pi_i \left(s_i, s_{-i}\right)$$