

Aplicaciones Juegos Repetidos

Alvaro J. Riascos Villegas

Mayo de 2026

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Cournot con información perfecta
- 3 Modelo dinámico de colusión tácita
- 4 Estimación y resultados

Motivación

- Los juegos repetidos permiten sostener arreglos cooperativos que no serían posibles en juegos estáticos (p.ej., el dilema de los prisioneros).
- Un *arreglo colusivo tácito* es un acuerdo de cooperación que se sustenta de forma no cooperativa, mediante amenazas de castigo entre las firmas.
- En esta presentación estudiamos dos preguntas:
 - 1 ¿Bajo qué condiciones puede un oligopolio sostener colusión tácita?
 - 2 ¿Cómo identificar y medir empíricamente el poder de mercado en un mercado oligopólico?
- Referencias centrales: Abreu (1986), Green y Porter (1984) y Porter (1983).

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Cournot con información perfecta
- 3 Modelo dinámico de colusión tácita
- 4 Estimación y resultados

Estructura del mercado

- Tenemos n firmas que producen un bien homogéneo.
- Sea $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la demanda agregada (satisface la ley de la demanda). P denota la función de demanda inversa.
- Cada firma i tiene función de costos creciente $C_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Por simplicidad suponemos firmas homogéneas.
- Conjunto de estrategias: nivel de producción q_i .
- Pago neto:

$$\Pi_i(q_i, q_{-i}) = P(Q)q_i - C_i(q_i),$$

donde $Q = \sum_i q_i$ es la oferta total.

Niveles de producción de referencia

- x^c : producción de cada firma en el equilibrio de Nash simétrico del juego *estático* (competencia a la Cournot).
- x^m : producción eficiente (maximiza la suma de beneficios) que las firmas adoptarían si coordinaran creíblemente.
- Con demanda lineal $P(Q) = \max\{0, M - dQ\}$ y costo marginal constante c :

$$x^c = \frac{M - c}{(n + 1)d}, \quad x^m = \frac{M - c}{2nd}.$$

- Para $n > 1$: $x^c > x^m$ — la competencia lleva a sobreproducir respecto al óptimo colusivo.
- Los beneficios asociados satisfacen $\Pi^m > \Pi^c$: el arreglo colusivo es preferido por todas las firmas.

Repetición finita: no colusión

- Si las firmas compiten durante un número *finito* de periodos, el argumento de inducción hacia atrás (backward induction) implica que el único equilibrio perfecto en subjugos es replicar el equilibrio estático en cada periodo.
- En el último periodo no existe amenaza de castigo futura \Rightarrow cada firma juega x^c .
- Sabiendo esto, en el penúltimo periodo tampoco hay castigo creíble \Rightarrow cada firma juega x^c .
- Y así sucesivamente: la competencia a la Cournot se replica en cada periodo.
- **Resultado:** La colusión creíble *no* puede sustentarse bajo horizonte finito.

Repetición infinita: estrategia gatillo

- Si las firmas anticipan competir *indefinidamente* y son suficientemente pacientes (factor de descuento ρ cercano a 1), pueden sostener el equilibrio eficiente x^m .
- **Estrategia gatillo (trigger):** Jugar siempre x^m , excepto si alguna firma se ha desviado, en cuyo caso jugar siempre x^c .
- Esta estrategia es un equilibrio perfecto en subjuegos si y solo si se cumple la *condición de sostenibilidad* (restricción de compatibilidad de incentivos):

$$\frac{\Pi^m - \Pi^c}{1 - \rho} \geq \Pi^d - \Pi^m,$$

donde Π^d es el pago de la mejor desviación unilateral contra x^m .

- La condición exige que las ganancias futuras de cooperar superen la ganancia inmediata de desviarse.

Limitaciones de la estrategia gatillo

- La estrategia gatillo tiene dos debilidades importantes:
 - 1 **Castigo excesivamente prolongado:** Una desviación desencadena un castigo *permanente*, lo cual parece poco razonable dado que las firmas pueden renegociar indefinidamente.
 - 2 **Incentivo a desviarse poco costoso:** En general, la diferencia entre x^c y el nivel de desvío óptimo es cuantitativamente pequeña, por lo que el castigo puede no ser suficientemente disuasivo.
- Estos problemas motivaron el desarrollo de estrategias con castigos más cortos pero más severos.

Pregunta

¿Puede un castigo de *un solo periodo* ser suficiente para sostener la cooperación? ¿Qué condición debería satisfacer el nivel de castigo x^0 ?

- Se elige un nivel de producción de castigo x^0 suficientemente *alto* (bajo precio de mercado) para que el castigo sea cuantitativamente importante para todas las firmas.
- **La estrategia:**
 - 1 Periodo 1: todas las firmas juegan x^m .
 - 2 En cualquier otro periodo:
 - Si todas han jugado $x^m \Rightarrow$ jugar x^m .
 - Si todas se castigaron en el periodo anterior \Rightarrow retornar a x^m .
 - Cualquier otro caso \Rightarrow castigar (jugar x^0).

Garrote y zanahoria: propiedades

- **Castigos cortos:** el perdón es automático — sólo dura un periodo.
- **Castigos severos:** eligiendo x^0 adecuadamente, el castigo puede ser lo suficientemente costoso para disuadir cualquier desviación.
- **Resultado:** Se puede demostrar que esta estrategia soporta que todas las firmas jueguen x^m en cada periodo de equilibrio.
- **Ventaja sobre la estrategia gatillo:** No requiere amenazas permanentes ni castigos indefinidos; la amenaza de incluso un solo periodo de producción punitiva es suficiente para mantener la colusión.

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Cournot con información perfecta
- 3 Modelo dinámico de colusión tácita**
- 4 Estimación y resultados

Green y Porter (1984) / Porter (1983)

- En la sección anterior supusimos que las firmas observan perfectamente las acciones y el mercado. ¿Qué ocurre si la *demanda es aleatoria y no observable*?
- **Objetivo:** racionalizar la colusión tácita en oligopolios con *información incompleta* sobre la demanda.
- **Innovación clave:** bajo información incompleta, periodos de precios bajos no implican necesariamente ruptura del cartel — pueden ser la respuesta óptima ante choques negativos de demanda.
- El modelo genera dos regímenes que se alternan:
 - **Cooperativo:** firmas maximizan beneficios conjuntos.
 - **No cooperativo:** firmas compiten individualmente.
- La aplicación empírica estima el modelo sobre datos de precio y cantidad de un mercado colombiano con N productores asimétricos.

Estructura del mercado y función de costos

- N productores asimétricos producen un bien homogéneo. En equilibrio todas las firmas fijan precios alrededor de un único precio promedio p_t .
- Función de costos de la firma i en el periodo t :

$$C_i(q_{it}) = a_i q_{it}^\delta + F_i,$$

donde:

- $\delta > 1$: elasticidad de los costos variables con respecto al producto.
- a_i : inverso de la productividad de la firma i .
- F_i : costos fijos por periodo.

Condiciones de primer orden y variación conjetural

- La acción de la firma i puede representarse por:

$$p_t \left(1 + \frac{\theta_{it}}{\alpha_1} \right) = MC_i(q_{it}),$$

donde θ_{it} es el *parámetro de variación conjetural* y $\alpha_1 < 0$ es la elasticidad-precio de la demanda (definida en la siguiente diapositiva).

- Interpretación: $\theta_{it} \approx 0$ (competencia perfecta), $\theta_{it} \approx 1$ (colusión perfecta).
- Nota: usamos N firmas *asimétricas* en esta sección, frente a n firmas simétricas en la Sección 2.

Precio de equilibrio agregado

- Agregando sobre todas las firmas, el precio de equilibrio satisface:

$$p_t \left(1 + \frac{\theta_t}{\alpha_1} \right) = \sum_{i=1}^N s_{it} MC_i(q_{it}),$$

donde s_{it} es la participación de mercado de la firma i y $\theta_t \equiv \sum_i s_{it} \theta_{it}$.

- θ_t es el *parámetro conjetural agregado ponderado*: captura el grado de competencia promedio del mercado en el periodo t .

- La demanda agregada satisface:

$$\ln Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln p_t + \tilde{\alpha} \mathbf{x}_t + \varepsilon_t,$$

donde $Q_t \equiv \sum_i q_{it}$, p_t es el precio de mercado y ε_t son choques de demanda no observados.

- El vector \mathbf{x}_t contiene variables exógenas que afectan la demanda (actividad económica, estacionalidad, etc.).
- $\alpha_1 < 0$: elasticidad-precio de la demanda.
- La demanda inversa P implica la expresión para la relación de oferta que se deriva de las condiciones de equilibrio.

Relación de oferta y regímenes

- Combinando la FOC agregada con la función de demanda, la relación de oferta es:

$$\ln p_t = \beta_0 + \beta_1 \ln Q_t + \beta_2 I_t + \tilde{\beta} \mathbf{w}_t + \omega_t,$$

donde \mathbf{w}_t es un vector de variables que afectan los costos y I_t es el indicador de régimen.

- El parámetro θ_t alterna entre dos valores según el régimen:

$$\theta_t = \begin{cases} \theta_c & \text{periodo cooperativo} \\ \theta_{nc} & \text{periodo no cooperativo} \end{cases}$$

- El coeficiente β_2 captura el diferencial de precio entre regímenes (interpretación en la siguiente diapositiva).

Interpretación de β_2

- β_2 mide el incremento porcentual en el precio asociado a un periodo cooperativo:

$$\beta_2 = \ln\left(1 + \frac{\theta_{nc}}{\alpha_1}\right) - \ln\left(1 + \frac{\theta_c}{\alpha_1}\right).$$

- Si $\beta_2 > 0$: el precio es más alto en periodos cooperativos que en no cooperativos.
- Si $\beta_2 = 0$: no hay diferencia de precio entre regímenes (colusión inefectiva o inexistente).
- El signo y magnitud de $\hat{\beta}_2$ es el indicador empírico central del poder de mercado cooperativo.

Proceso estocástico de regímenes

- El régimen I_t no es observado por el economista. Se supone que sigue una distribución Bernoulli:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \lambda \quad (\text{periodo cooperativo}) \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda \end{cases}$$

- El parámetro λ es la *probabilidad de cooperación*.
- La estimación se realiza mediante el algoritmo de Kiefer (1980) empleado en Porter (1983): regresión de ecuaciones simultáneas con dos relaciones de oferta que difieren únicamente en el intercepto.
- El término ω_t está potencialmente correlacionado con el error de demanda ε_t , lo que requiere estimación simultánea de ambas ecuaciones.

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Cournot con información perfecta
- 3 Modelo dinámico de colusión tácita
- 4 Estimación y resultados**

Datos e identificación

- **Mercado:** industria colombiana con productores asimétricos de un bien homogéneo.
- **Datos:** series de tiempo de precio, cantidades y variables de demanda y costos a nivel de mercado.
- **Parámetro clave:** β_2 — diferencial de precio entre régimen cooperativo y no cooperativo.
- **Identificación:** el sistema demanda–oferta se estima de forma simultánea. El régimen I_t no es observado; se estima $\lambda = P(I_t = 1)$ como parámetro libre.
- **Supuesto sobre competencia no cooperativa:** se consideran dos alternativas — competencia perfecta ($\theta_{nc} = 0$) y Cournot ($\theta_{nc} = \text{HHI}$).

Selección de variables

Selección por criterio AIC sobre formas reducidas de $\ln Q_t$ y $\ln p_t$.

Variables de demanda (x_t):

- CONS: consumo agregado.
- \ln PIB: PIB trimestral (2005).
- DESEMP: desempleo nacional.

Variables de oferta (w_t):

- \ln MINES, PBUILD, PMINES (costos).
- ESMUN: entrada 2012.
- EVALLE: entrada 2014.
- EIMPO: importadores 2011.

Resultados: ecuación de demanda

	Estimado	IC 95 %
Constante	5,934*	[0.607 – 73.124]
$\ln P$	-0,434*	[-5.542 – -0.001]
$\ln \text{PIB}$	1,158*	[0.269 – 3.312]
DESEMP	-0,027	[-0.184 – 0.046]
CONS	0,995	[-0.482 – 5.311]

Nota: Modelo de Green y Porter (1984) / Porter (1983).

IC al 95 % por bootstrap. (*) $p < 0,1$

- Elasticidad-precio estimada: $\hat{\alpha}_1 = -0,434$ — la demanda es **inelástica**.
- El PIB es significativo y positivo: la demanda crece con la actividad económica.
- DESEMP y CONS no son estadísticamente significativos.

Resultados: relación de oferta

	Estimado	IC 95 %
Constante	-4,907	[-10.71 - 12.366]
ln Q	1,254*	[0.001 - 4.203]
I	0,113*	[0.001 - 0.448]
PBUILD	-0,003	[-0.053 - 0.018]
PMINES	-0,005	[-0.019 - 0.001]
ESMUN	0,063	[-0.1 - 0.419]
EVALLE	-0,237*	[-0.595 - -0.003]
EIMPO	-0,181	[-0.303 - 0.279]
ln MINES	0,161	[-3.835 - 1.07]

IC al 95 % por bootstrap. (*) $p < 0,1$

Interpretación: relación de oferta

- $\hat{\beta}_1 = 1,254 \Rightarrow \hat{\delta} = \hat{\beta}_1 + 1 = 2,25$: el costo marginal crece más que proporcional con la producción (oferta rígida en el corto plazo).
- $\hat{\beta}_2 = 0,113 \Rightarrow$ el precio es $\approx 11\%$ más alto en periodos cooperativos que en no cooperativos.
- EVALLE (entrada de competidores en 2014): caída permanente de $\approx 24\%$ en el precio promedio del mercado.
- Los costos de producción (PBUILD, PMINES, ln MINES) y las otras entradas (ESMUN, EIMPO) no son estadísticamente significativos.

Medición del poder de mercado

- El parámetro de variación conjetural cooperativo se infiere como:

$$\hat{\theta}_c = \hat{\alpha}_1 \times \left(\exp \left\{ -\hat{\beta}_2 + \ln \left(1 + \frac{\theta_{nc}}{\hat{\alpha}_1} \right) \right\} - 1 \right)$$

- Resultados según supuesto sobre θ_{nc} :

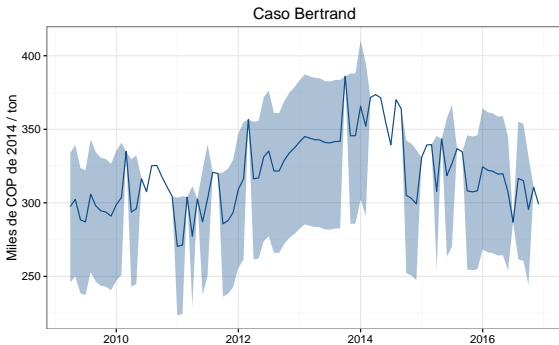
Supuesto	$\hat{\theta}_c$	IC 95 %
Competencia perfecta ($\theta_{nc} = 0$)	0,05	[0, 0,5]
Cournot ($\theta_{nc} = 0,3 = \text{HHI}$)	0,32	[0,27, 0,74]

- En ambos casos el poder de mercado cooperativo **no es significativamente alto**.
- $\hat{\lambda} = 0,64$: alta frecuencia de periodos cooperativos, pero impacto moderado en precios.

Pregunta

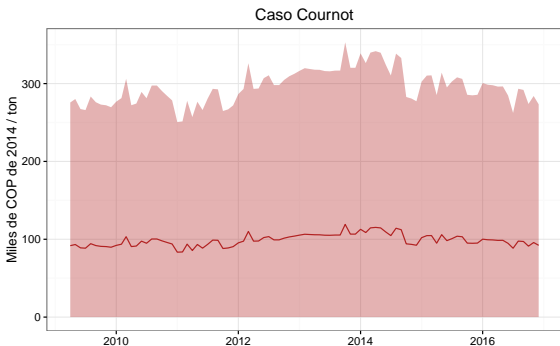
Si el poder de mercado cooperativo es moderado, ¿esperan que el precio contrafactual sin cooperación difiera mucho del precio observado?

Costo marginal promedio: competencia perfecta



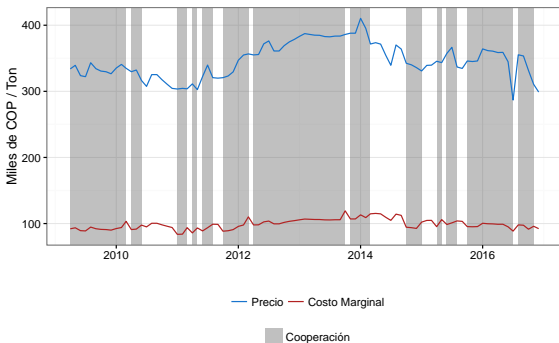
- El costo marginal promedio muestra alta variabilidad, consistente con la elasticidad $\hat{\delta} = 2,25$.
- Los intervalos de confianza son amplios, reflejando la limitada muestra disponible.

Costo marginal promedio: competencia a la Cournot



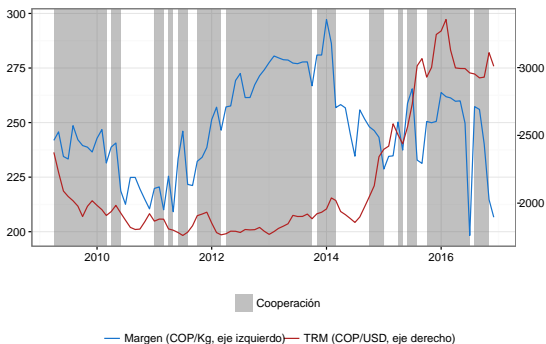
- El perfil del costo marginal es similar al caso de competencia perfecta: la elección del supuesto sobre θ_{nc} no altera sustancialmente la serie estimada.
- Los periodos de alta demanda se asocian a costos marginales más elevados (oferta rígida).

Precio de mercado frente al costo marginal



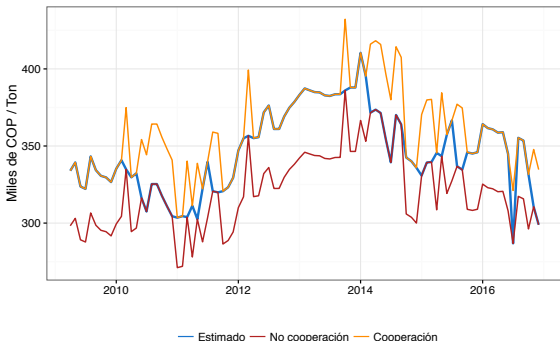
- Las zonas sombreadas (periodos cooperativos) no se diferencian visiblemente de los periodos no cooperativos en términos de precio vs. costo.
- Consistente con $\hat{\theta}_c$ moderado: la cooperación no genera grandes diferencias precio–costo.

Margen precio-costo y tasa de cambio



- El margen precio–costo se mueve inversamente con la TRM: cuando el peso se deprecia, la competencia por importaciones aumenta y el poder de mercado disminuye.
- Esto sugiere que la apertura al comercio exterior es un importante disciplinador de precios.

Precio observado vs. contrafactuales



- La diferencia entre el precio observado y ambos contrafactuales es mínima (< 50 COP): la cooperación no elevó sustancialmente los precios.
- Confirma la hipótesis: *colusión frecuente pero con poder de mercado moderado.*

Conclusiones

Mensaje central

La colusión tácita puede ser frecuente y cuantificable empíricamente, pero no implica necesariamente un daño severo al consumidor — la entrada competitiva resultó ser el mecanismo disciplinador más efectivo.

- **Teoría:** La colusión tácita es sostenible con horizonte infinito y firmas suficientemente pacientes.
- **Abreu (1986):** Las estrategias de garrote y zanahoria superan a la estrategia gatillo: castigos de duración mínima pero severidad máxima.
- **Green-Porter (1984):** Bajo información incompleta, periodos de precios bajos son compatibles con colusión tácita — no implican ruptura del cartel.
- **Mercado colombiano:**
 - Alta frecuencia de cooperación ($\hat{\lambda} = 0,64$), pero impacto en precios **moderado** ($\hat{\theta}_c \approx 0,05-0,32$).
 - La entrada de competidores en 2014 fue el mayor factor disciplinador: caída de $\approx 24\%$ en el precio.