Juegos Repetidos

Alvaro J. Riascos Villegas

Mayo de 2025

Contenido

Introducción

- Dos conceptos nuevos surgen cuando consideramos que un juego puede repetirse un número finito o infinito de veces: coordinación y reputación.
- La característica principal de los juegos repetidos es que cada vez que se deben tomar acciones, el juego es el mismo.
- La repetición finita de un juego puede introducir equilibrios nuevos.
- Cuanto mayor sea el horizonte, más equilibrios pueden surgir.

Contenido

Horizonte finito

Example (Horizonte finito)

Considere el siguiente juego repetido dos veces:

1\2	D	C
D	1,1	4,0
C	0,4	3,3

En este juego, todos los equilibrios del juego repetido implican jugar (D, D) en cada etapa. Sin embargo, la estrategia C puede utilizarse por fuera del camino de equilibrio.

Horizonte finito

Example

Considere la siguiente estrategia para cada jugador. En la primera etapa jugar D y en la segunda etapa, si el adversario jugó D jugar D, de lo contrario jugar la mixta: $(\frac{7}{8}, \frac{1}{8})$, que significa que se juega D con probabilidad $\frac{7}{8}$ y C con probabilidad $\frac{1}{8}$.

Example

Para ver esto consideremos dos potenciales casos de desviaciones unilaterales del jugador 1 (como el juego es simétrico, basta con verificar el caso de un jugador). Utilizando las estrategias sugeridas el pago de cada jugador es 2, la suma de los pagos en las dos etapas.

Caso I: El jugador 1 se desvía a C en la primera etapa y en la segunda etapa sigue la estrategia de equilibrio, es decir, juega D. En este caso el jugador 2 sigue la estrategia de equilibrio y jugará D en la primera etapa y $(\frac{7}{8}, \frac{1}{8})$ en la segunda etapa. Luego el pago para el jugador 1 es $0 + \frac{7}{8} * 1 + \frac{1}{8} * 4 < 2$, y por lo tanto no hay incentivos a desviarse.

Horizonte finito

Example

Caso II: El jugador 1 juega D en la primera etapa y se desvía a C en la segunda etapa. El jugador 2 sigue su estrategia de equilibrio y juega D en ambas etapas. Esta desviación no beneficia al jugador 1, pues obtiene un pago total de $1 < 2$.

Contenido

Example (Horizonte infinito)

Considere un juego repetido una infinidad de veces del juego estático:

1\2	D	C
D	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

y suponga que la utilidad de cada jugador es de la forma:
$\pi_i^\delta = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\pi_i$
donde π_i es el pago para i de acuerdo al juego estático y $\delta \in (0,1)$.

Example

Ahora considere la siguiente estrategia (*trigger strategy*):

1. En $t \geq 1$ jugar C si ningún jugador ha jugado D en $t-1$ o antes.
2. Caso contrario jugar D.

Si $\delta \geq \frac{2}{3}$ entonces esta estrategia es un equilibrio de Nash. Por simplicidad supongamos $\delta = \frac{2}{3}$. Para ver esto, obsérvese que el pago en el equilibrio propuesto π^* es (dejando de lado por ahora el factor de normalización $\frac{1}{1-\delta}$):

Example

$$\pi^* = \sum_{t=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^{t-1}(-1) = -3 \tag{1}$$

Donde hemos utilizado que para todo número real $x \in (0,1)$, $\sum_{t=1}^{n} x^{t-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$. Ahora, si alguien intenta desviarse en $t_0 = 0$ entonces su pago será:

$$\sum_{t=1}^{t_0-1} (\frac{2}{3})^{t-1}(-1) + 0 + \sum_{t=t_0+1}^{\infty} (\frac{2}{3})^{t-1}(-10) < -3. \tag{2}$$

Contenido

- Sea $V = Conv\{v \in \mathbb{R}^n : v = (\pi_1(a_1), \ldots, \pi_n(a_n)), a_i \in A_i\}$. Estos son los pagos posibles del juego estático incluyendo la posibilidad de que los jugadores utilicen un mecanismo de coordinación estocástico.
- Sea $\underline{v}_i$ el menor valor al que puede ser forzado i si todos los demás coordinan para castigarlo. Esto es:

$$\underline{v}_i = min_{\alpha_{-i} \in \Delta_{-i}} max_{\alpha_i \in \Delta_i} \pi_i(\alpha_i, \alpha_{-i}) \tag{3}$$

$\underline{v}_i$ puede interpretarse como una restricción de racionalidad individual ya que cualquier valor menor puede ser bloqueado por i.

Theorem (Equilibrio de Nash en Horizonte Infinito)

Sea $(v_1, \ldots, v_n) \in V, v_i > \underline{v}_i$ para todo i. Entonces si δ es lo suficentemente grande, existe un equilibrio de Nash del juego $R^\delta(\pi)$ con pago v_i para cada jugador.

- Por simplicidad supongamos que existen $a_i \in A_i$ tal que $v_i = \pi_i(a_1, ..., a_n)$.[1]
- Sean $(\alpha_1^i, ..., \alpha_n^i)$ las estrategias que implementan el valor minmax para el jugador i. Esto es, para $j \neq i, \alpha_j^i$ son las estrategias de los demás jugadores que si coordinan fuerzan a i al mayor castigo y α_i^i es la mejor respuesta de i.

[1] En este caso se puede definir $\underline{v}_i$ utilizando únicamente estrategias puras.

Equilibrios de Nash

- Ahora considere la estrategia para el jugador i: en t jugar a_i si antes de ningún jugador j se ha desviado de forma unilateral de jugar a_j. Caso contrario jugar α_i^j donde j es el primer jugador que se desvió de forma unilateral. Este es un equilibrio de Nash.
- Si i intenta desviarse en t_0 a $\overline{a}_i$ el pago es:

$$(1-\delta)\sum_{t=1}^{t_0-1}\delta^{t-1}\pi(a_i, a_{-i}) + (1-\delta)\delta^{t_0-1}\pi(\overline{a}_i, a_{-i}) + \tag{4}$$

$$(1-\delta)\sum_{t=t_0+1}^{\infty}\delta^{t-1}\pi(\alpha_i^i, \alpha_{-i}^i) \tag{5}$$

$$\leq (1-\delta^{t_0-1})v_i + (1-\delta)\delta^{t_0-1}\pi(\overline{a}_i, a_{-i}) + \delta^{t_0}\underline{v}_i \tag{6}$$

donde $\overline{a}_i$ es la mejor respuesta de i en el juego estático a a_{-i}.

- Sea $f(\delta) = (1-\delta)v_i + (1-\delta)\delta^{t_0-1}\pi(\underline{a}_i, a_{-i}) + \delta^{t_0}\underline{v}_i$ y obsérvese que $\text{lím}_{\delta\to 1} f(\delta) = \underline{v}_i < v_i$. Luego si δ es lo suficientemente cerca de 1 no existen incentivos a desviarse.

Example

Considere los juegos estáticos de la página 290 de Vega - Redondo. En ambos casos el valor minmax en estrategias puras para cada jugador es 1. En el primer juego es posible implementar el pago eficiente $(4, 4)$. En el segundo ejemplo, obsérvese que solo hay un equilibrio de Nash en el juego estático. Ahora en el juego repetido es posible implementar el pago $(2, 2)$ que es inferior a jugar el equilibrio de Nash del juego estático en todas las repeticiones del juego.