

Introducción a las Subastas de Múltiples Unidades

Alvaro J. Riascos Villegas

Mayo de 2025

- 1 **Introducción**
- 2 Modelo
- 3 Ejemplos
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa
- 6 Subasta de Ausubel
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)

Introducción

- Las subastas de múltiples objetos se usan para asignar espectro radioeléctrico (Colombia 2013, FCC), el servicio de recolección de basuras (Bogotá).
- Las subastas de **múltiples unidades** se utilizan para vender bonos del tesoro, energía eléctrica, aumentar o reducir liquidez, etc.
- Con $K > 1$ unidades, el análisis de una sola unidad no se generaliza directamente: el precio de la oferta ganadora afecta el excedente de múltiples unidades simultáneamente.
- Los principales formatos son:
 - 1 Discriminatoria (cerrada) y Holandesa (abierta)
 - 2 Uniforme (cerrada) y Inglesa (abierta)
 - 3 Vickrey (cerrada) y Ausubel (abierta)

- 1 Introducción
- 2 Modelo**
- 3 Ejemplos
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa
- 6 Subasta de Ausubel
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)

Modelo: Supuestos y Notación

- Consideramos subastas simultáneas de múltiples unidades del mismo bien.
- Suponemos que no hay complementaridades entre los objetos: La valoración marginal de ganar un segundo objeto es menor que la del primer objeto.
- Vamos a considerar los tres formatos más importantes para subastar K objetos idénticos: discriminatoria, Vickrey y uniforme.
- Cada jugador debe mandar K ofertas b_k^i que satisfacen $b_1^i \geq b_2^i \geq \dots \geq b_K^i$.
- b_j^i es la disponibilidad de i a pagar por la j -ésima unidad.

Modelo: Estadísticos de Orden

- Sea $c : \mathbb{R}_+^{KI} \rightarrow \mathbb{R}_+^{KI}$ el vector ordenado (de mayor a menor) de las $I \times K$ ofertas.
- Sea $c^{-i} : \mathbb{R}_+^{KI} \rightarrow \mathbb{R}_+^{K(I-1)}$ el vector de $K \times (I - 1)$ ofertas ordenadas (de mayor a menor) que enfrenta i .
- c_k^{-i} es la k -ésima oferta más alta que enfrenta i .

Modelo: Regla de Asignación

- El agente i gana exactamente $k \leq K$ de las K ofertas más altas si (suponemos que no hay empates):

$$b_k^i > c_{K-k+1}^{-i} \quad \text{y} \quad b_{k+1}^i < c_{K-k}^{-i}.$$

- Esta estructura es común a los tres tipos de subastas que vamos a considerar.
- La diferencia entre ellas se debe a la **regla de pago** (la componente que determina el pago esperado de cada agente).

Modelo: Subasta Discriminatoria

- En la subasta discriminatoria, si el agente i gana exactamente k^i unidades, paga $\sum_{k=1}^{k^i} b_k^i$.
- Obsérvese que cuando $K = 1$ es la subasta al primer precio.

Modelo: Subasta Uniforme

- En la subasta uniforme todas las unidades son vendidas al precio que agota la oferta y la demanda (precio de equilibrio).
- Suponemos que este precio es el más alto perdedor.
- Puesto que i gana exactamente $k^i > 0$ unidades si y sólo si:

$$b_{k^i}^i > c_{K-k^i+1}^{-i} \text{ y } b_{k^i+1}^i < c_{K-k^i}^{-i}$$

la oferta más alta perdedora es:

$$p(b) = \text{máx} \left\{ b_{k^i+1}^i, c_{K-k^i+1}^{-i} \right\}$$

Modelo: Subasta Uniforme (cont.)

- Alternativamente, usando $b_{K-k^i+1}^{-i}$ en lugar de $c_{K-k^i+1}^{-i}$:

$$p(b) = \text{máx} \left\{ b_{k^i+1}^i, b_{K-k^i+1}^{-i} \right\}$$

- Cada agente paga $p(b)$ por cada unidad ganada.
- Obsérvese que cuando $K = 1$ ésta se reduce a la subasta al segundo precio. Sin embargo NO es una generalización apropiada a múltiples unidades: a diferencia de la subasta de Vickrey, la uniforme es susceptible a la *reducción de demanda* (demand reduction).

Modelo: Subasta de Vickrey

- En la subasta de Vickrey i gana exactamente $k^i > 0$ unidades si y sólo si:

$$b_{k^i}^i > c_{K-k^i+1}^{-i} \text{ y } b_{k^i+1}^i < c_{K-k^i}^{-i}$$

y paga por la k -ésima unidad $c_{K-k^i+k}^{-i}$.

- Luego su pago total es:

$$\sum_{k=1}^{k^i} c_{K-k^i+k}^{-i}$$

- La subasta de Vickrey es la generalización apropiada de la subasta al segundo precio.

- 1 Introducción
- 2 Modelo
- 3 Ejemplos**
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa
- 6 Subasta de Ausubel
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)

Example

Ofertas y ordenamiento:

$$b^1 = (50, 47, 40, 32, 15, 5)$$

$$b^2 = (42, 28, 20, 12, 7, 3)$$

$$b^3 = (45, 35, 24, 14, 9, 6)$$

$$c = (50, 47, 45, 42, 40, 35, 32, \dots)$$

1 1 3 2 1 3

Las seis más altas son las ganadoras. Por lo tanto el agente 1 gana 3 unidades, el agente 2 gana 1 unidad y el agente 3 gana 2 unidades. El precio de cierre es 32 (el más alto perdedor).

Example

En el ejemplo anterior:

$$c_3^{-1} = 35, \quad c_4^{-1} = 28$$

y el agente 1 gana exactamente 3 unidades porque:

$$b_3^1 = 40 > c_4^{-1} = 28$$

$$b_4^1 = 32 < c_3^{-1} = 35$$

y el precio de cierre es:

$$p = \max \{ b_4^1, c_4^{-1} \} = \max \{ 32, 28 \} = 32$$

Example

El pago en la subasta de Vickrey para el agente 1 es:

$$c_4^{-1} + c_5^{-1} + c_6^{-1} = b_2^2 + b_3^3 + b_3^2 = 28 + 24 + 20 = 72$$

- 1 Introducción
- 2 Modelo
- 3 Ejemplos
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey**
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa
- 6 Subasta de Ausubel
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)

Valoraciones y Estrategia Sincera

- Sea x_k^i la valoración marginal del agente i por la k -ésima unidad, con $x_1^i \geq x_2^i \geq \dots \geq x_K^i$ (valoraciones decrecientes).
- Si i gana exactamente k^i unidades pagando t^i , su excedente es $\sum_{k=1}^{k^i} x_k^i - t^i$.
- Una estrategia **sincera** es $b_k^i = x_k^i$: ofertar exactamente la valoración marginal de cada unidad.
- El pago de Vickrey no depende de la propia oferta del agente, solo de b^{-i} y del número de unidades ganadas.

Subasta de Vickrey: Resultado Principal

Teorema

En la subasta de Vickrey es un equilibrio en estrategias dominantes (débil) revelar la verdadera valoración:

$$b^V(x_1^i, \dots, x_K^i) = (x_1^i, \dots, x_K^i).$$

En particular, la subasta de Vickrey asigna de forma eficiente.

- El argumento no depende de que los agentes sean simétricos.
- Sea k^i el número de unidades que él gana cuando oferta b^i y los demás ofertan b^{-i} .

Subasta de Vickrey: Dem. (1/2)

- Un agente nunca ofertará por ninguna unidad por encima de su valoración.
- Supongamos que por la unidad k el agente oferta más (escojamos k como el mayor número para el que esto pasa); considere la oferta que se diferencia de la anterior solo en la unidad k , en donde es la verdadera valoración.
- Con esta oferta él gana el mismo número de unidades o menos. Si gana el mismo número entonces es indiferente entre ambas.
- Si gana menos, quiere decir que $x_k^i \leq c_{K-k+1}^{-i}$ y $k = k^i$, es decir, k era su última unidad ganadora antes de cambiar la oferta (si $k < k^i$ entonces no puede ser que pierda la unidad k pero gane la $k + 1$).

Subasta de Vickrey: Dem. (2/2)

- El excedente por las unidades que gana sigue siendo el mismo. Ahora, para la unidad k^i deja de percibir un excedente de $x_{k^i}^i - c_{K-k^i+1}^{-i} \leq 0$. Luego en efecto al ganar menos unidades aumenta su excedente.
- Luego ofertar sinceramente domina débilmente a cualquier oferta que supere la valoración por alguna unidad. Simétricamente, ofertar por debajo de la verdadera valoración también está dominado por la oferta sincera. □

Subasta de Vickrey: Ejemplo de Asignación

- La subasta de Vickrey puede resultar en asignaciones “injustas”.
- Supongamos que $K = 2$, $x^1 = (10, 6)$, $x^2 = (9, 2)$. Cada agente se lleva una unidad: agente 1 paga 2, agente 2 paga 6, aunque $x_k^1 > x_k^2$ para todo k .
- Esto refleja que la eficiencia exige asignar las dos unidades a los dos mayores postores (10 y 9), no ambas al agente con valoraciones más altas.

- 1 Introducción
- 2 Modelo
- 3 Ejemplos
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa**
- 6 Subasta de Ausubel
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)

Subasta Holandesa

- Se comienza con un precio muy alto. Los agentes van revelando su demanda conforme el precio desciende.
- El precio disminuye hasta que la demanda es mayor que cero. Se entregan las unidades demandadas a ese precio.
- Se continúa bajando el precio hasta que la demanda vuelve a ser positiva. Se repite hasta agotar todas las unidades.
- **Análogo cerrado:** subasta discriminatoria.

- Se comienza con un precio muy bajo en el que la demanda excede a la oferta disponible.
- Se sube el precio hasta que por primera vez la oferta iguala la demanda. En ese momento se asignan todas las unidades.
- Cada ganador paga el precio inmediatamente anterior al que la oferta excede la demanda.
- **Análogo cerrado:** subasta de precio uniforme.

- 1 Introducción
- 2 Modelo
- 3 Ejemplos
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa
- 6 Subasta de Ausubel**
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)

- Sea $d^j(p)$ el número de unidades que el agente j desea comprar a precio p : el mayor k tal que $x_k^j \geq p$ (o cero si $x_1^j < p$).
- En la subasta de Ausubel cada agente reporta su demanda honestamente en cada ronda del reloj ascendente.
- La **oferta residual** que enfrenta el agente i mide cuántas unidades quedan disponibles para él una vez que los demás agentes satisfacen su demanda.

Oferta Residual

- La oferta residual que enfrenta el agente i se define como:

$$s^{-i}(p) = \max \left\{ K - \sum_{j \neq i} d^j(p), 0 \right\}$$

- El precio de cierre (el más alto perdedor) es el precio más alto tal que:

$$s^{-i}(p) < d^i(p)$$

Subasta de Ausubel: Ronda 1

- Es una subasta alternativa a la inglesa de precio ascendente.
- Comenzando con un precio muy bajo $p = p_0$, $s^{-i}(p_0) = 0$.
- La siguiente ronda $p = p_1$ y aún $s^{-i}(p_1) = 0$.
- El proceso continúa hasta que por primera vez, en la ronda n_1 , para algún i_1 , $s^{-i_1}(p_{n_1}) > 0$. El agente i_1 gana las primeras $s^{-i_1}(p_{n_1})$ unidades y paga p_{n_1} por unidad. Si la condición se cumple para varios agentes, a cada uno se le dan las unidades correspondientes.

Subasta de Ausubel: Ronda 2

- El proceso continúa hasta que por primera vez, en la ronda n_2 , para algún agente i_2 , $s^{-i_2}(p_{n_2}) > s^{-i_2}(p_{n_1})$. El agente i_2 gana las $s^{-i_2}(p_{n_2}) - s^{-i_2}(p_{n_1})$ unidades adicionales y paga p_{n_2} por unidad. Si la condición se cumple para varios agentes, a cada uno se les dan las unidades correspondientes.
- **Resultado clave:** bajo valoraciones privadas y valoraciones marginales decrecientes, la subasta de Ausubel implementa el resultado de Vickrey en estrategias dominantes.

Subasta de Ausubel: Ejemplo

- Se tienen 5 licencias y 5 participantes; cada participante puede recibir máximo tres licencias.

	Jug. A	Jug. B	Jug. C	Jug. D	Jug. E
Valor marginal (1 ud.)	123	75	125	85	45
Valor marginal (2 ud.)	113	5	125	65	25
Valor marginal (3 ud.)	103	3	49	7	5

Subasta de Ausubel: Ejemplo

Precio	Jug. A	Jug. B	Jug. C	Jug. D	Jug. E
49	3	1	2	2	0

Demanda total: $3 + 1 + 2 + 2 + 0 = 8 > 5$ (exceso de demanda)

Subasta de Ausubel: Ejemplo

Precio	Jug. A	Jug. B	Jug. C	Jug. D	Jug. E
65	3	1	2	1	0

$$s^{-A}(65) = \max\{5 - (1 + 2 + 1 + 0), 0\} = 1 < 3 = d^A(65)$$

- Jugador A gana 1 unidad.

Subasta de Ausubel: Ejemplo

Precio	Jug. A	Jug. B	Jug. C	Jug. D	Jug. E
75	3	0	2	1	0

$$s^{-A}(75) = 2 > 1 = s^{-A}(65); \quad s^{-C}(75) = 1 > 0 = s^{-C}(65)$$

- Jugador A gana 1 unidad adicional.
- Jugador C gana 1 unidad.

Subasta de Ausubel: Ejemplo

Precio	Jug. A	Jug. B	Jug. C	Jug. D	Jug. E
85	3	0	2	0	0

$$s^{-A}(85) = 3 > 2 = s^{-A}(75); \quad s^{-C}(85) = 2 > 1 = s^{-C}(75)$$

- Jugador A gana 1 unidad adicional.
- Jugador C gana 1 unidad adicional.

Subasta de Ausubel: Ejemplo

	Jug. A	Jug. B	Jug. C	Jug. D	Jug. E
Unidades ganadas	3	0	2	0	0
Pagos	$65 + 75 + 85$	0	$75 + 85$	0	0

- 1 Introducción
- 2 Modelo
- 3 Ejemplos
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa
- 6 Subasta de Ausubel
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)**

Subasta Generalizada de Segundo Precio

- Los anunciantes ofertan cuánto están dispuestos a pagar por click (una única oferta) por búsquedas de ciertas palabras clave.
- Se ordenan las ofertas de mayor a menor y de esa forma se asignan los espacios.
- Cada anunciante paga el costo de la oferta del anunciante inmediatamente debajo.
- GSP no es reveladora de las verdaderas disponibilidades a pagar por click.
- Tiene múltiples equilibrios de Nash y algunos no son óptimos.
- Sin embargo, existe por lo menos un equilibrio óptimo.

Subasta Generalizada de Segundo Precio: Ejercicio

Supongamos que hay tres espacios publicitarios para ser vendidos y tres compradores de ciertas palabras clave. Los espacios los denotamos por a, b, c y estos tienen *clickthrough rates* 10, 4 y 0 respectivamente. Denotamos los compradores por x, y, z y sus ganancias estimadas por click 7, 6 y 1 respectivamente.

- 1 Mostrar que ofertar la verdadera valoración no es un equilibrio en la subasta GSP (i.e., si x reduce su oferta a 5 mejora).
- 2 Mostrar que si los compradores ofertan 5, 4 y 2 este es un equilibrio. ¿Cuál es el ingreso del subastador?
- 3 Mostrar que si los compradores ofertan 3, 5 y 1 este es un equilibrio. ¿Cuál es el ingreso del subastador?

Resumen: Comparación de Formatos

Formato	Eficiente	Estr. dominante	Análogo abierto
Discriminatoria	No	No	Holandesa
Uniforme	No	No	Inglesa
Vickrey	Sí	Sí	Ausubel

- La subasta de Ausubel implementa el resultado de Vickrey en un formato de precio ascendente con demandas decrecientes.
- GSP es el mecanismo más usado en subastas de palabras clave (Google, Bing) pero tiene múltiples equilibrios de Nash — no todos eficientes.