

Código: _____
Complementaria: _____

Micro. Avanzada: Teoría de Juegos
Parcial 3 - Álvaro J. Riascos
18 de mayo de 2025

Pregunta	Puntos	Nota
Verdadero y Falso	30	
Juegos de Información Incompleta	35	
Subastas	35	
Ensayo	35	
Bono	30	
Total:	165	

El parcial consta de 5 preguntas, recuerde que debe elegir 3 preguntas para resolver más el bono, por ende, su total dependerá de los ejercicios que escoja resolver. Sea claro en su argumentación y notación.

De los siguientes 4 ejercicios: *Verdadero y Falso*, *Juegos de Información Incompleta*, *Subastas* y *el Ensayo* escoja ÚNICAMENTE 3 para solucionar:

1. Verdadero y Falso

Para cada una de las siguientes afirmaciones responda si es falsa o verdadera y justifique brevemente su respuesta. La justificación es fundamental para evaluar su respuesta.

(a) (6 Puntos) *Juegos estaticos de información completa*

La eliminación de estrategias dominadas estrictamente disminuye (estríctamente) el valor maxmin de un juego para por lo menos un jugador.

(b) (6 puntos) *Juegos estáticos de información completa*

En un juego con equilibrio en estrategias dominantes estrictamente (ES), puede existir un equilibrio correlacionado diferente al ES.

(c) (6 puntos) *Juegos dinámicos de información perfecta*

En un juego dinámico de información perfecta, la estrategia de inducción hacia atrás es única.

(d) (6 puntos) *Aplicaciones de juegos dinámicos*

La ventaja de los impuestos de Pigou como mecanismo de coordinación es que el coordinador no tiene que suponer nada de las externalidades ni funciones de costos de los agentes implicados:

(e) (6 puntos) *Juegos dinámicos de información imperfecta*

En un juego dinámico finito de información imperfecta, si $s \in EN$ es una estrategia pura tal que todos los conjuntos de información del juego se visitan, entonces existe un μ tal que $(s, \mu) \in EPBD$.

2. Juegos de Información Incompleta

Considere dos firmas que producen lámparas solares a partir de energías renovables. La firma 1 tiene que decidir si continúa produciendo con energía renovable (R) o si produce lámparas con energía no renovable (NR). Además, esta firma tiene dos tipos de costos asociados a las energías renovables que puede usar, los costos asociados al uso de energías que tienen una tasa de regeneración alta (CA) y los costos asociados a las energías que tienen una tasa de regeneración baja (CB). Si la firma 1 decide producir con energía no renovable el juego termina. La firma 2, después de conocer la decisión de la firma 1, debe decidir si se queda en el mercado (I) o si sale del mercado (O), sin conocer el tipo de la firma 1.

Suponga además que la probabilidad de que la firma 1 sea de tipo costos de regeneración alta es $\frac{1}{4}$. Los pagos están dados de la siguiente forma:

- Si la firma 1 tiene costos asociados a una tasa de regeneración alta y decide continuar produciendo con energía renovable y la firma 2 decide quedarse en el mercado, la firma 1 recibirá una ganancia de 4 y la firma 2 recibirá 3.
 - Si la firma 1 tiene costos asociados a una tasa de regeneración alta y decide producir lámparas con energía no renovable, la firma 1 obtiene -5 y la firma 2 obtiene 0.
 - Si la firma 1 tiene costos asociados a una tasa de regeneración alta y decide continuar produciendo con energía renovable y la firma 2 decide salir en el mercado, la firma 1 recibirá una ganancia de 8 y la firma 2 recibirá 3.
 - Si la firma 1 tiene costos asociados a una tasa de regeneración baja y decide continuar produciendo con energía renovable y la firma 2 decide quedarse en el mercado, la firma 1 recibirá una ganancia de 2 y la firma 2 recibirá 4.
 - Si la firma 1 tiene costos asociados a una tasa de regeneración baja y decide producir lámparas con energía no renovable, la firma 1 recibe 0 y la firma 2 recibe -3.
 - Si la firma 1 tiene costos asociados a una tasa de regeneración baja y decide continuar produciendo con energía renovable y la firma 2 decide salir en el mercado, la firma 1 recibirá una ganancia de 6 y la firma 2 recibirá 3.
- (a) (5 puntos) Escriba el conjunto de jugadores, tipos y acciones.
- (b) (10 puntos) Haga la representación extensiva del juego. (Pista: no olvide incluir a la naturaleza)
- (c) (15 puntos) Encuentre al menos dos Equilibrios Bayes-Nash en estrategias puras.
- (d) (5 puntos) Suponga que la firma 1 siempre decide producir con energía renovable sin importar su tipo y la firma 2 siempre se queda en el mercado sin importar lo que decida la firma 1, ¿es este perfil un Equilibrio Bayes-Nash? En caso de que lo sea, ¿es este equilibrio creíble? Sustente.

3. Subastas

El Banco de la República está pensando en subastar su icónico edificio, y organiza una subasta donde tiene dos participantes¹. Ambos tienen una valoración de $x_i = \omega$, y sabemos que sus ofertas cumplen que $b_i \in [0, \omega]$. Asimismo, sabemos que el Banco valora el edificio en ω y que preferiría no llevar a cabo la subasta si su pago esperado llega a ser estrictamente menor.

- (a) Inicialmente, el Banco no sabe si organizar una subasta de primer precio o segundo precio. Para cada caso, calcule el EN del juego y el pago que recibiría el subastador. A partir de dichos resultados, comente qué subasta preferiría. (6 pts.)

¹En caso de empate se escoge aleatoriamente al ganador.

Suponga ahora que las valoraciones son asignadas previamente por la naturaleza y sólo pueden tomar dos valores del conjunto $X = \{0, \omega\}$ de acuerdo con la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

$$\begin{cases} (\omega, \omega) & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \\ (0, \omega) & \text{con probabilidad } \frac{1}{4} \\ (\omega, 0) & \text{con probabilidad } \frac{1}{4} \\ (0, 0) & \text{con probabilidad } 0 \end{cases}$$

- (b) Bajo este nuevo escenario, y bajo una subasta de segundo precio, para cada uno de los tipos calcule el pago esperado que recibiría cada jugador cuando se juega el equilibrio Nash Bayesiano. Asimismo, calcule el pago esperado que recibiría el Banco en dicho caso ¿Se llevaría a cabo esta subasta? (6 pts.)
- (c) Suponga ahora que se realiza una subasta de primer precio y que ambos jugadores siguen una estrategia de la forma: $\beta(0) = 0$ y $\beta(\omega) = \theta$. Para cada uno de los tipos calcule el pago esperado que recibiría cada jugador. ¿Asimismo, bajo qué condición de θ el Banco llevaría a cabo esta subasta? (6 pts.)

Una vez subastado el edificio, el Banco se dispone a subastar las diferentes pinturas que tenía. En particular, organiza una subasta de tres pinturas homogéneas entre tres jugadores. Las ofertas², ordenadas de mayor a menor, para cada jugador están dadas por

$$\begin{cases} b_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3) \\ b_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3) \\ b_3 = (x_3^1, x_3^2, x_3^3) \end{cases}$$

con $x_j^3 > x_{j+1}^1$ para $j = 1, 2$. Estas ofertas son las mismas independientemente del tipo de subasta.

- (d) Calcule el precio a pagar de cada jugador en una subasta discriminatoria, uniforme (donde se paga la máxima oferta de los perdedores) y de Vickrey. ¿Con base en esto, cuál subasta prefiere cada jugador? (6 pts.)

Generalicemos un poco las cosas. Suponga que ahora hay N jugadores los cuales están participando en una subasta por Q pinturas homogéneas. Se tiene que

$$x_i^1 > x_i^2 > \dots > x_i^Q \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N$$

y que

$$x_j^Q > x_{j+1}^1 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N-1$$

donde estas ofertas son las mismas independientemente del tipo de subasta.

- (e) En este nuevo escenario, calcule el precio a pagar de cada jugador en una subasta discriminatoria, uniforme (donde se paga la máxima oferta de los perdedores) y de Vickrey. (6 pts.)

²El subíndice indica el jugador, y el superíndice indica la oferta.

4. Ensayo

Explique brevemente de forma conceptual cómo funciona la subasta de avisos publicitarios de Google y dé un ejemplo numérico de cómo funcionaría con tres espacios publicitarios y cuatro oferentes. En el ejemplo, calcule qué espacio gana cada agente y cuánto paga a Google. Su calificación depende de la calidad del ejemplo.

5. Bono

Las siguientes preguntas se refieren a los temas del parcial 2 y servirán para subir la calificación obtenida en este.

1. (20 puntos) Considere el juego clásico de piedra, papel o tijera entre dos jugadores. Pruebe que $\sigma = (\sigma_1 = (1/3, 1/3, 1/3), \sigma_2 = (1/3, 1/3, 1/3))$ es un equilibrio secuencial. Para este punto, debe presentar el desarrollo completo del ejercicio. No puede usar teoremas o resultados adicionales vistos en clase.
2. (10 puntos) Considere un juego de información imperfecta en el cuál el jugador i tiene n_i conjuntos de información. ¿De cuántas acciones debe estar compuesta una estrategia de i ? ¿Qué propiedad clave de las estrategias se estaría violando si se especificaran menos acciones de las necesarias?