Capítulo 9

Juegos de información incompleta

9.1. Introducción

Existen muchas situaciones económicas en las que las partes tienen información diferente o asimétrica y donde esta información es relevante para los agentes. En general los agentes tienen información privada que es valiosa para los demás y tienen conjeturas sobre la información de los demás. Los problemas de información asimétrica son muy difíciles de resolver debido a esta multiplicidad de conjeturas que los agentes pueden tener sobre las conjeturas de los demás y viceversa. Esto sugiere la introducción de alguna hipótesis de consistencia entre las conjeturas de los agentes y su información privada. Para convertir un problema de estos en uno más manejable, Harsany introdujo una forma de pensar muy útil sobre este tipo de situaciones. El resultado final es un juego de información incompleta. A diferencia del caso de información asimétrica, cuando la información es incompleta los agentes tienen información privada, pero se supone que existe una relación estrecha entre las conjeturas que todos tienen de la información privada de los demás y la información misma de cada uno. Además, este supuesto de consistencia es conocimiento común. En las próximas secciones formalizamos el concepto de juego de información incompleta. Vamos a hacer especial énfasis en juegos estáticos y haremos una breve introducción a los juegos dinámicos de información incompleta, específicamente al caso particular de juegos de señalización.

9.2. Juegos estáticos

Un juego de información incompleta BG (o Juego Bayesiano) en forma normal es:

$$BG = (I, (A_i)_{i \in I}, (T_i)_{i \in I}, (\pi_i)_{i \in I}, F)$$

donde:

- I es un conjunto de jugadores (finito)[1].
- A_i es un conjunto de acciones para cada jugador.
- T_i es un conjunto de información para cada jugador o espacio de tipos.
- $\pi_i : A \times T \rightarrow R$ es la utilidad de cada jugador, $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$, $T = \prod\limits_{i \in I} T_i$.
- F es una distribución de probabilidad sobre T con densidad f.

La distribución F es el modelo probabilístico del espacio de información de todos los agentes. Asumimos que todos los elementos del juego son conocimiento común. Esto convierte un problema de información asimétrica en uno de información incompleta.

Es posible dar una reinterpretación de un juego Bayesiano basado en un espacio de estados y una probabilidad común a todos los agentes y en el que estos reciben señales privadas, a través de una variable aleatoria (funcion de información) sobre cuál es el verdadero estado de la naturaleza. Esta formulación es equivalente a la anterior.

Ahora, los juegos de información incompleta se pueden clasificar según la forma específica de los pagos de los jugadores o según la estructura de información. En términos de la función de pagos estos pueden ser de valoración privada, interdependiente o común. El primer caso quiere decir que la función de pago de cada jugador es independiente de la información de los demás jugadores. La segunda quiere decir que la función de pago de cada jugador depende de la información de los demás jugadores, y la tercera quiere decir que la función de pago es común a todos los jugadores. En términos de información estos pueden ser de información independiente o información

[1] En este capítulo utilizamos I para denotar el conjunto de jugadores y N para denotar cierto estado de los jugadores.

correlacionada (*affiliated*).

Los juegos de información incompleta se desarrollan de la siguiente forma. Cada agente i es informado de forma privada de cierta información $t_i \in T_i$ (o su tipo t_i). Cada jugador solo conoce su información y no de la de los demás, t_{-i}. La idea ahora es que cada jugador utiliza la distribución condicional de F a la información recibida para cuantificar la probabilidad con la que los demás son informados. Más precisamente, si el agente i es informado de t_i entonces él cuantifica la incertidumbre de la información de los demás usando la distribución condicional $F(\cdot \mid t_i)$.

Para simplificar la exposición, vamos a suponer que la estructura de información es independiente. Esto es, la densidad de F se puede expresar como $f = \prod_{i \in I} f_i$ donde f_i es una densidad sobre T_i. La interpretación es la siguiente. El jugador i utiliza la distribucion $\prod_{j \neq i} f_j$ para evaluar la información de los demás agentes. Este supuesto quiere decir que la información de los jugadores es independiente. En particular, la información es puramente privada y no afecta cómo los demás cuantifican su propia información. Esto no quiere decir que la información de los demás agentes no tenga consecuencias sobre su utilidad. Los dos ejemplos siguientes esclarecen este punto.

Ejemplo 9.1 (Batalla de los sexos modificado)**.** Este ejemplo es una modificación de la batalla de los sexos estudiada en las notas anteriores (obsérvese que este ya no es un juego de coordinación). Tenemos dos jugadores $I = \{1, 2\}$, con espacios de estrategias $A_M = A_H = \{B, S\}$. Dependiendo del estado de ánimo la mujer puede tener preferencias distintas por ir al partido o de compras. Luego modelamos estos estados con los espacios de tipos: $T_M = \{B, S\}$, $T_H = \{N\}$. Solo la mujer sabe al levantarse cuál es su estado de ánimo. El hombre sabe el de él, pero no el de ella. Las funciones de pago son:

$$\pi_M, \pi_H : A_M \times A_H \times T_M \times T_H \to R$$

El hombre tiene las mismas preferencias independientemente del estado de ánimo de la mujer. Formalmente, π_1 no cambia de valor en su tercera componente.

Las preferencias de la mujer dependen de su estado de ánimo:

$\pi_M(\cdot, \cdot, B, \cdot) : A_M \times A_H \times T_H \to R$

$\pi_M(\cdot, \cdot, S, \cdot) : A_M \times A_H \times T_H \to R$
$\pi_H : A_M \times A_H \times T_M \times T_H \to R$

Hombre Mujer	B	S
B	3,2	2,1
S	0,0	1,3
Ánimo de ir al partido		

Hombre Mujer	B	S
B	1,2	0,1
S	2,0	3,3
Ánimo de ir de compras		

El hombre le atribuye una probabilidad subjetiva p a que la mujer amanezca con ánimo de ir al partido. En este sentido, f_M, f_H son funciones de masa de probabilidad sobre $\{B, S\}$ y $\{N\}$, respectivamente.

$$\begin{aligned} f_{-H}(B) &= f_M(B) = p \\ f_{-H}(S) &= f_M(S) = 1 - p \\ f_{-M}(N) &= f_H(N) = 1 \end{aligned}$$

$f = f_M \times f_H$. Obsévese que en este caso la información no solo es puramente privada (independiente) sino que la información privada de ninguno de los dos afecta el pago del otro (los valores son privados).

Definición 9.2 (Estrategia)**.** Una estrategia es una función $\alpha_i : T_i \to A_i$. Una estrategia conjunta es una estrategia para cada jugador.

9.3. Soluciones de un juego

Definición 9.3. Una estrategia $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ domina (débilmente) a una estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$ si para toda estrategia $\alpha_{-i} : T_{-i} \to A_{-i}$ y $t \in T$:

$$\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \alpha_{-i}(t_{-i})) \geq \pi_i(\alpha_i(t_i), \alpha_{-i}(t_{-i}))$$

con desigualdad estricta para por lo menos un α_{-i} y t.

Obsérvese que la definición anterior es equivalente a la siguiente. Una estrategia $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ domina (débilmente) una estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$ si para toda acción $a_{-i} \in A_{-i}$ y $t_i \in T_i$:

$$\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), a_{-i}) \geq \pi_i(\alpha_i(t_i), a_{-i})$$

con desigualdad estricta por lo menos para un a_{-i} y t_i. Una estrategia $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ es dominante (débilmente) si domina (débilmente) a toda estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$.

Ejemplo 9.4 (Batalla de los sexos modificado)**.** Las estrategias son:

$$\begin{aligned} \alpha_M &: \{B, S\} \to \{B, S\}. \\ \alpha_H &: \{N\} \to \{B, S\}. \end{aligned}$$

La estrategia $\alpha_M(B) = B$, $\alpha_M(S) = S$ domina débilmente cualquier otra estrategia para la mujer, luego es una estrategia dominante débilmente.

Definición 9.5 (Equilibrio en estrategias dominantes)**.** Un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente) es un conjunto de estrategias $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ una para cada jugador tal que para todo $i \in I$, $\widehat{\alpha}_i$ es una estrategia dominante (débilmente).

Más adelante daremos un ejemplo de un equilibrio en estrategias dominantes en juegos de información incompleta (el equilibrio en la subasta al segundo precio). La importancia del concepto de equilibrio en estrategias dominantes es doble. De una parte supone una forma débil de racionalidad y de otra, es independiente de la estructura de información.

Definición 9.6 (Equilibrio de Nash-Bayesiano)**.** Un equilibrio Bayesiano es un conjunto de estrategias $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ una para cada jugador tal que para todo jugador $i \in I$ y para todo estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$ y $t_i \in T_i$:

$$E_{-i}[\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})|t_i] \geq E_{-i}[\pi_i(\alpha_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})|t_i]$$

En el caso particular en que la estructura de información es independiente, la última desigualdad la podemos escribir como:

$$E_{-i}[\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})] \geq E_{-i}[\pi_i(\alpha_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})]$$

donde el valor esperado se calcula utilizando la densidad f_{-i}.

Ejemplo 9.7 (Batalla de los sexos modificado)**.** Supongamos que:

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_M &: \{B,S\} \to \{B,S\}. \\ \widehat{\alpha}_H &: \{N\} \to \{B,S\}. \end{aligned}$$

es un equilibrio de Nash-Bayesiano.

La mujer no tiene ninguna incertidumbre sobre el estado de ánimo del hombre. Entonces, debe cumplirse:

$$\pi_M(\widehat{\alpha}_M(t_M), \widehat{\alpha}_H(N), t_M, N) \geq \pi_M(\alpha_M(t_M), \widehat{\alpha}_H(N), t_M, N)]$$

Como ella tiene una estrategia dominante débilmente, esta es, independiente de lo que el hombre haga, su mejor respuesta. Luego, el candidato a $\widehat{\alpha}_M$ es:

$$\widehat{\alpha}_M(B) = B, \widehat{\alpha}_M(S) = S.$$

Por su parte, el hombre tiene que calcular su mejor reacción a esta estrategia:

$$E_{-H}[\pi_H(\widehat{\alpha}_H(N), \widehat{\alpha}_M(T_M), N, T_M)] \geq E_{-H}[\pi_H(\alpha_H(N), \widehat{\alpha}_M(T_M), N, T_M)]$$

$$\begin{aligned} & p\pi_H(\widehat{\alpha}_H(N), B, N, B) + (1-p)\pi_H(\widehat{\alpha}_H(N), S, N, S) \\ \geq \; & \\ & p\pi_H(\alpha_H(N), B, N, B) + (1-p)\pi_H(\alpha_H(N), S, N, S) \end{aligned}$$

Supongamos que $\widehat{\alpha}_H(N) = B$

$$\begin{aligned} & p\pi_H(B, B, N, B) + (1-p)\pi_H(B, S, N, S) \\ \geq \; & \\ & p\pi_H(S, B, N, B) + (1-p)\pi_H(S, S, N, S) \end{aligned}$$

es fácil mostrar la anterior condición equivale a $p \geq \frac{3}{4}$. Si $p \leq \frac{3}{4}$, la estrategia óptima es $\widehat{\alpha}_H(N) = S$.

Obsérvese que si $p = \frac{3}{4}$ ambas estrategias para el hombre son una mejor respuesta. Por lo tanto cuando $p = \frac{3}{4}$ tenemos dos equilibrios en puras y una infinidad en mixtas.

Decimos que un juego de información incompleta es finito si tiene un número finito de jugadores, el espacio de acciones es finito y el espacio de tipos es finito. Una aplicación del teorema de Nash implica que, en este caso, siempre existe un equilibrio de Nash - Bayesiano en estrategias mixtas.

Ejemplo 9.8 (Paradoja de TKCD)**.** Considere el siguiente juego. [2] Alicia selecciona aleatoriamente dos números reales y los escribe en dos papeles que introduce en dos sobres cerrados. Después, Bob lanza una moneda para escoger uno de los dos sobres. Alicia le muestra el número del sobre seleccionado. Ahora Bob debe adivinar si el otro sobre tiene un número mayor o menor que el del sobre que le acaban de mostrar. Si acierta, gana 1000. Si pierde, pierde 1000. ¿Existe una estrategia para Bob cuyo beneficio esperado sea estrictamente mayor que cero?

Considere la siguiente estrategia mixta. Sea $f : R \to (0, 1)$ cualquier función estrictamente creciente. Dado el número x del sobre que le muestran a Bob, éste utiliza la siguiente estrategia mixta $(f(x), 1 - f(x))$ donde $f(x)$ es la probabilidad de no cambiar de sobre (i.e., el otro sobre tiene un número menor a x) y $1 - f(x)$ es la probabilidad de cambiar de sobre (i.e., el otro sobre tiene un número mayor a x). Sean x y x' los dos números reales que elige Alicia. Supongamos que $x < x'$. Ahora, la probabilidad de que a Bob le salga el sobre con el menor valor x es $\frac{1}{2}$. Luego, condicional a que le salió x su pago esperado de usar la estrategia mixta es:

$$-1000 \times f(x) + 1000 \times (1 - f(x)) \tag{9.1}$$

De otra parte, la probabilidad de que le haya salido el mayor valor x' es también $\frac{1}{2}$ y, condicional a que le salió x', su pago esperado de usar la estrategia mixta es:

$$1000 \times f(x') - 1000 \times (1 - f(x')) \tag{9.2}$$

De esta forma, el pago esperado para Bob es (obsérvese que cada uno de los eventos anteriores ocurre con probabilidad 0,5):

$$1000 \times (f(x') - f(x)) > 0 \tag{9.3}$$

y el beneficio esperado de esta estrategia es estrictamente mayor que cero.

Ejercicio 9.9. Escriba el anterior juego entre Bob y Alicia como un juego de información incompleta. Ayuda: el espacio de estrategias de Bob puede ser

[2] Tomado de http://www.xkcd.com/

$\{C, NC\}$ con C quiere decir el otro sobre tiene un número mayor (cambiar de sobre) y NC quiere decir el otro sobre tiene un número menor (no cambiar de sobre). Alicia tiene un espacio de estrategias trivial (no tiene estrategias). El espacio de tipos de Alicia y Bob son los número reales (el tipo de Alicia es el sobre que Bob no elige y el de Bob es el sobre que él elige).

Ejemplo 9.10 (Competencia imperfecta I)**.** Dos firmas tienen funciones de costos:

$$c_i(q_i) = cq_i$$

$c \in \{1, 2\}$. El valor de c es común a ambas firmas y la firma 2 le atribuye una probabilidad subjetiva p de que el costo sea 1. La firma 1 está informada del costo, pero la firma 2 no. Intuitivamente, ambas firmas operan la misma tecnología, la primera firma puede saber si está operando a costos marginales altos o bajos, mientras que la segunda no lo puede saber, pero sabe que tiene los mismos costos que la primera. La función de demanda inversa es:

$$P(Q) = \max\{M - dQ, 0\}$$

Formalamente, el juego Bayesiano es: $I = \{1, 2\}$, $A_1 \times A_2 = R_+ \times R_+$, $T_1 = \{1, 2\}$, $T_2 = \{t\}$ y el pago de cada jugador es:

$$\pi_i : R_+^2 \times \{1, 2\} \times \{t\} \to R$$

donde para la firma 1:

$$\begin{aligned} \pi_1(q_{11}, q_2, 1, t) &= (M - d(q_{11} + q_2) - 1)q_{11} \\ \pi_1(q_{12}, q_2, 2, t) &= (M - d(q_{12} + q_2) - 2)q_{12} \end{aligned}$$

y para la firma 2:

$$\begin{aligned} \pi_2(q_{11}, q_2, 1, t) &= (M - d(q_{11} + q_2) - 1)q_2 \\ \pi_2(q_{12}, q_2, 2, t) &= (M - d(q_{12} + q_2) - 2)q_2 \end{aligned}$$

Obsérvese que el payoff de la firma 2 depende de la información de la firma 1. Sin embargo, la información es puramente privada. Esto no sucedía en el caso de la batalla de los sexos.

Esto pone de manifiesto que en un juego de información incompleta la información puede ser completamente privada aun cuando la información privada de cada jugador afecte el payoff de los demás jugadores.

f_1 y f_2 son probabilidades discretas sobre $\{1, 2\}$ y $\{t\}$, respectivamente.

$$\begin{aligned} f_{-2}(\{1\}) &= f_1(\{1\}) = p \\ f_{-2}(\{2\}) &= f_1(\{2\}) = 1 - p \\ f_{-1}(\{t\}) &= f_2(\{t\}) = 1 \end{aligned}$$

Una estrategia para la firma 1 son dos niveles de producción q_{11} y q_{12} y para la firma 2 es un nivel de producción q_2.

Supongamos que $(\widehat{q}_{11}, \widehat{q}_{12}, \widehat{q}_2)$ es un equilibrio de Nash - Bayesiano. Entonces deben cumplirse las siguientes condiciones.

Para la firma 1, para todo $\overline{q}_{11} \in R_+$ y $\overline{q}_{12} \in R_+$,

$$\begin{aligned} (M - d(\widehat{q}_{11} + \widehat{q}_2) - 1)\widehat{q}_{11} &\geq (M - d(\overline{q}_{11} + q_2) - 1)\overline{q}_{11} \\ (M - d(\widehat{q}_{12} + \widehat{q}_2) - 2)\widehat{q}_{12} &\geq (M - d(\overline{q}_{12} + q_2) - 2)\overline{q}_{12} \end{aligned}$$

Para la firma 2, para todo $\overline{q}_2 \in R_+$,

$$\begin{aligned} & p(M - d(\widehat{q}_{11} + \widehat{q}_2) - 1)\widehat{q}_2 + (1 - p)(M - d(\widehat{q}_{12} + \widehat{q}_2) - 2)\widehat{q}_2 \\ \geq & \\ & p(M - d(\widehat{q}_{11} + \overline{q}_2) - 1)\overline{q}_2 + (1 - p)(M - d(\widehat{q}_{12} + \overline{q}_2) - 2)\overline{q}_2 \end{aligned}$$

Suponiendo que existe una solución interior a los tres problemas de maximización es fácil mostrar que la esta es:

$$\begin{aligned} \widehat{q}_{11} &= \frac{2M - 1 - p}{6d} \\ \widehat{q}_{12} &= \frac{2M - 4 - p}{6d} \\ \widehat{q}_2 &= \frac{M - 2 + p}{3d} \end{aligned}$$

Ejercicio 9.11 (Competencia imperfecta II)**.** Considere el modelo de competencia imperfecta de Cournot. Supongamos que tenemos dos firmas que producen un bien homogéneo y compiten en cantidades. La función de demanda inversa está dada por $p = 1 - Q$ donde Q es la suma de las cantidades producidas por cada firma. Los costos de producción son constantes pero desconocidos (son información privada). Sin embargo, ambas firmas saben que los costos de producción tienen que ser c_l o c_h (intuitivamente, costos bajos y, costos altos). Supongamos que la distribución de probabilidad que genera los costos es:

$$F(c_h, c_h) = F(c_h, c_l) = F(c_l, c_l) = F(c_l, c_h) = \frac{1}{4}.$$

1. ¿Cúal es el espacio de estrategias de cada firma?
2. Escribir el problema de optimización (interim) de cada firma.
3. Calular el equilibrio de Nash - Bayesiano simétrico de este juego.

Obsérvese que existe otra definición natural de equlibrio. En esta definición suponemos que los agentes no han observado la realización de su propia información.

Definición 9.12 (Equilibrio exante)**.** Un equilibrio de Nash-Bayesiano exante es un conjunto de estrategias $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ tal que para todo jugador $i \in I$ y para todo estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$,

$$E[\pi_i(\widehat{\alpha}_i(T_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), T_i, T_{-i})] \geq E[\pi_i(\alpha_i(T_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), T_i, T_{-i})]$$

Teniendo en cuenta esta diferenciación entre los conceptos de equilibrio, al primero que introdujimos lo llamaremos equilibrio de Nash - Bayesiano interim, mientras que a éste último nos referiremos como equilibrio exante.

Es obvio que si $\widehat{\alpha}$ es un equilibrio interim entonces este es un equilibrio exante. El converso también vale bajo condiciones muy débiles.

También es fácil de ver que un equilibrio en estrategias dominates es un equilibrio de Nash - Bayesiano.

Definición 9.13 (Equilibrio expost)**.** Un equilibrio expost es un conjunto de estrategias $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ una para cada jugador tal que para todo jugador $i \in I$ y para todo estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$,

$$\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i}) \geq \pi_i(\alpha_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i})$$

Ejercicio 9.14 (Relación entre los conceptos de equilibrio)**.** Mostrar que el conjunto de equilibrios en estrategias dominates es un subconjunto del conjunto de equilibrios expost que a su vez es un subconjunto del conjunto de equilibrios de Nash-Bayesianos que es un subconjunto del conjunto de equilibrios exante.

Ejemplo 9.15 (Pavimentación carretera: Mecanismo estático)**.** Dos individuos que viven en lugares remotos y aislados consideran pavimentar la única carretera de acceso. Hacer esto cuesta 20. La única razón por la cual los individuos estarían interesados en pavimentar es si planean comprar un carro. Para cada individuo la valoración de la carretera, suponiendo que va comprar carro, es 30. Ahora describimos un mecanismos que llamaremos el mecanismo A (juego simultáneo) que consiste en lo siguiente. Los agentes envían una carta a un tercero manifestando el deseo de tener una carretera pavimentada. En caso de manifestar interés se intepreta la señal como si el individuo tuviera una valoración de 30 (intención de comprar carro) o cero de lo contrario Si los agentes manifiestan interés se construye la carretera y se comparte el costo (10 cada uno). Si solo uno manifiesta interes se construye y él la paga (20). Si ninguno manifiesta interés no se construye.

Para este mecanismo el espacio de acciones es $A_i = \{0, 30\}$, el espacio de tipos es $T_i = \{0, 30\}$, la probabilidad de que la valoración sea alta es p y los tipos son independientes. Los pagos son (obsérvese que este es un juego de valores privados):

$$\begin{aligned}
\pi_i^A(a_1, a_2, t_1, t_2) &= t_i - 20, \text{ si } a_i > a_j \\
\pi_i^A(a_1, a_2, t_1, t_2) &= t_j, \text{ si } a_i < a_j \\
\pi_i^A(a_1, a_2, t_1, t_2) &= t_i - 10, \text{ si } a_i = a_j = 30 \\
\pi_i^A(a_1, a_2, t_1, t_2) &= 0, \text{ si } a_i = a_j = 0
\end{aligned}$$

Si permitimos estrategias mixtas entonces una estrategia de equilibrio es:

$$\gamma_i : T_i \to \Delta(A_i)$$

Vamos a buscar una estrategia simétrica de equilibrio que denotamos por:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= (u, 1-u) \\
\gamma(30) &= (w, 1-w)
\end{aligned}$$

Es claro que en equilibrio $u = 1$ con un pago esperado mayor o igual a cero. Un individuo con valoración cero no va mandar un mensaje distinto pues con probabilidad positiva puede suceder que le toque construir al él solo la carretera (en ninguna circunstancia gana y si puede perder con probabilidad positiva). Por ahora, en equilibrio:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= (1, 0) \\
\gamma(30) &= (w, 1-w)
\end{aligned}$$

Ahora, en un equilibrio simétrico $w < 1$. De lo contrario el pago va ser cero para ambos con seguridad. Pero si un individuo con valoración alta piensa que el otro va enviar un mensaje de que su valoración es baja entonces su mejor respuesta es mandar un mensaje de que su valoración es alta. Por ahora, en equilibrio:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= (1,0)\\ \gamma(30) &= (w,1-w)\end{aligned}$$

con $w<1$.

Ahora, es fácil verificar que si $p \leq \frac{1}{2}, w=0$ es el único equilibrio simétrico (ejercicio).

De otra, si $p>\frac{1}{2}$ entonces $w>0$ y por un argumento ya conocido $\gamma(30)=(1,0)$ y $\gamma(30)=(0,1)$ deben generar la misma utilidad para el individuo 1 cuando este conjetura que el individuo 2 va jugar $\gamma(0)=(1,0), \gamma(30)=(w,1-w)$. En este caso, no es difícil demostrar que $w=1-\frac{1}{2p}$. En conclusión, el equilibrio simétrico de Nash - Bayesiano es:

$$\begin{aligned}\gamma^*(0) &= (1,0)\\ \gamma^*(30) &= \left(\max\left\{0,1-\frac{1}{2p}\right\}, 1-\max\left\{0,1-\frac{1}{2p}\right\}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $p>\frac{1}{2}$, con probabilidad $\left(1-\frac{1}{2p}\right)^2$ no se construye la carretera a pesar de que ambos tengan valoración alta. Si por lo menos uno de ellos tiene valoración alta, algo que sucede con mayor probabilidad que el evento de que los dos tengan valoración alta, y en cuyo caso es eficiente construir la carretera, con probabilidad mayor a $1-\frac{1}{2p}$ no se construye. Es decir, ¡entre mayor sea la probabilidad de que sea eficiente la construcción con menos probabilidad se construye!

9.4. Juegos dinámicos

Comencemos estudiando un ejemplo. En este ejemplo vamos a introducir un mecanismo (juego dinámico que llamaremos mecanismo B).

Ejemplo 9.16 (Pavimentación carretera: Mecanismo dinámico)**.** El mecanismo B consiste de lo siguiente. El primer individuo envía un mensaje sobre su disponibilidad a pagar por la construcción $\xi_1 \in [0,20]$. En la segunda etapa, si $\xi_1<20$, el segundo individuo debe tomar la decisión sobre si financia el resto necesario para la construcción: $\xi_2=20-\xi_1$. En cuyo caso se construye la carretera. Si $\xi_1=20$ también se construye.

Este mecanismo se puede interpretar como un juego de información incompleta en donde la información privada es la valoración de la carretera (que depende de si se piensa o no comprar carro).

Sea $T_i = \{0, 30\}$ y p la probabilidad de que la valoración de un individuo sea 30. Suponemos que esta es la misma para ambos individuos y es independiente. Luego, la distribución de probabilidad sobre el espacio de tipos (valoraciones) es: $P(30, 30) = p^2$, $P(30, 0) = P(0, 30) = p\,(1-p)$, $P(0, 0) = (1-p)^2$.

El espacio de acciones del primer individuo es $A_1^B = [0, 20]$. El espacio de estrategias del segundo individuo es, $A_2^B = \{a_2 : [0, 20) \to \{Y, N\}\}$.

Los pagos son:

$$
\begin{aligned}
\pi_1^B(a_1, a_2, t_1, t_2) &= t_1 - a_1, \text{ si } a_1 = 20 \text{ o } a_2(a_1) = Y \\
\pi_1^B(a_1, a_2, t_1, t_2) &= 0, \text{ si } a_1 < 20 \text{ y } a_2(a_1) = N \\
\pi_2^B(a_1, a_2, t_1, t_2) &= t_2 - (20 - a_1), \text{ si } a_1 = 20 \text{ o } a_2(a_1) = Y \\
\pi_2^B(a_1, a_2, t_1, t_2) &= 0, \text{ si } a_1 < 20 \text{ y } a_2(a_1) = N
\end{aligned}
$$

Una estrategia para el jugador 1 es:

$$\gamma_1 : T_1 = \{0, 30\} \to \Delta([0, 20])$$

Para el jugador 2 es:

$$\gamma_2 : T_2 = \{0, 30\} \to \{a : [0, 20) \to \Delta(\{Y, N\}))$$

Este juego tiene una multiplicidad de equilibrios. Vamos a concentrarnos en los equilibrios perfectos en subjuegos.

Considere el problema que enfrenta el segundo jugador. Obsérvese que estrictamente este no es un subjuego (pues 2 no sabe el tipo de 1). Sin embargo, es claro que tiene a su disposición toda la información relevante para tomar una decisión. Si el jugador 2 tiene valoración baja es obvio que su respuesta a cualquier mensaje de 1 es N. Lo contrario sucede si su valoración es alta. Ahora, 1 anticipa esto. Si su valoración es baja, claramente su mensaje es cero. Si su valoración es alta, su estrategia depende de su expectativa de qué va jugar 2.

Sea $\sigma = (\alpha, 1 - \alpha)$ (distribución de probabilidad sobre $\{0, 20\}$) la estrategia mixta que juega 1 cuando su valoración es alta. Su pago esperado es:

$$\begin{aligned}
& p\overline{\pi}_1(\sigma,\gamma_2,30,30)+(1-p)\overline{\pi}_1(\sigma,\gamma_2,30,0) \\
= \; & p(\alpha\pi_1(0,Y,30,30)+(1-\alpha)\pi_1(20,Y,30,30))+ \\
& (1-p)(\alpha\pi_1(0,N,30,0)+(1-\alpha)\pi_1(20,N,30,0)) \\
= \; & p(\alpha(30)+(1-\alpha)10)+(1-p)(0\alpha+(1-\alpha)10) \\
= \; & p\alpha(30)+(1-\alpha)10 \\
= \; & 10+\alpha(30p-10)
\end{aligned}$$

Luego, si $p = \frac{1}{3}, \alpha$ puede tomar cualquier valor. Si $p > \frac{1}{3}, \alpha = 1$. Si $p < \frac{1}{3}, \alpha = 0$.

Existen otros equilibrios de Nash Bayesianos que no satisfacen este criterio adicional de ser perfectos en subjuegos. Incluso son equivalentes en términos del resultado (véase Vega Redondo página 203). A diferencia del primer mecanismo, este mecanismos garantiza una asignación eficiente cuando el segundo jugador tiene valoración alta. Cuando el segundo jugador tiene una valoración baja, el segundo mecanismo asigna ineficientemente con certeza (cuando p es lo suficientemente grande). Este no es el caso en el primer mecanismo, aun cuando $p = 1$. El rango de valores de p para los que el mecanismo B es ineficiente es mayor que el rango de valores de A: $[\frac{1}{3}, 1]$ contra $[\frac{1}{2}, 1]$. Sin embargo, para p grande la probabilidad exante de que en el mecanismo B ocurra una asignación ineficiente es muy baja compardo con el mecanismo A.

9.4.1. Señalización

En algunos juegos dinámicos ciertas acciones de los agentes a lo largo del juego se pueden interpretar como señales que revelan información relevante para la contraparte. Sin embargo, la señal puedo no revelar perfectamente la información de interés. Por ejemplo, cuando una persona quiere comprar un carro usado le interesa la calidad del carro , la cual es información privada del vendedor. Ahora, si el vendedor hace una oferta, ésta puede interpretarse como una señal imperfecta de la calidad del carro.

El siguiente modelo ilustra las ideas prinicipales. Supongamos que hay dos jugadores. El primer jugador (jugador 1) puede ser de diferentes tipos. Su tipo es información privada y la distribución de probabilidad sobre su verdadero tipo es P que es conocimiento común. El jugador 1 envía un mensaje (señal) que usa el jugador 2 para condicionar sus acciones.

Los pagos para los dos jugadores son:

$u_i : T \times M \times A \to R$

donde T representa el espacio de tipos del jugador 1, M el espacio de estrategias del jugador 1 y A el espacio de acciones del jugador 2.

Una estrategia para el jugador 1 es una función $\gamma_1 : T \to M$ (o $\Delta(M)$) y una estrategia para el jugador 2 es una función $\gamma_2 : M \to A$ (o $\Delta(A)$).

Sea $I = \{1, 2\}$. Un juego de señalización entre dos jugadores es $SG = (I, T, P, M, A, (u_i)_{i\in I})$.

Definición 9.17 (Equilibrio Señalización en Mixtas)**.** Un equilibrio de señalización es un conjunto de estrategias (γ_1, γ_2) y una función de conjeturas $\mu : M \to \Delta(T)$ tal que:

1. La estrategia del jugador 1 es una mejor respuesta a la estrategia del jugador 2. Para todo t y $\nu \in \Delta(M)$:

$$\sum_m \gamma_1(t)(m)(\sum_a \gamma_2(m)(a)u_1(t,m,a)) \geq \sum_m \nu(m)(\sum_a \gamma_2(m)(a)u_1(t,m,a)) \tag{9.4}$$

2. Dada la función de conjeturas que el jugador 2 tiene sobre el tipo del jugador 1, la estrategia del jugador 2 es una mejor respuesta. Para todo m y $\alpha \in \Delta(A)$:

$$\sum_a \gamma_2(m)(a)(\sum_t \mu(m)(t)u_2(t,m,a)) \geq \sum_a \alpha(a)(\sum_t \mu(m)(t)u_2(t,m,a)) \tag{9.5}$$

   Obsérvese que la estrategia del jugador 1 no aparece en esta ecuación. Es decir, hasta este punto no se está suponiendo que los mensajes tiene que ser coherentes con la expectativa que el jugador 2 tiene de lo que va jugar el jugador 1.

3. Consistencia de la función de conjeturas y la estrategia que el jugador 2 supone que 1 va utilizar. Para todo $t' \in T$, y $m \in M$

$$\mu(m)(t') = \frac{P(t')\gamma_1(t')(m)}{\sum_{t\in T} P(t)\gamma_1(t)(m)} \tag{9.6}$$

cuando la fórmula hace sentido, caso contrario $\mu(m)(t')$ no tiene restricciones. Intuitivamente el lado derecho de esta última condición representa la probabilidad de que el tipo sea t' dado que el mensaje es m.

Definición 9.18 (Equilibrio Señalización en Puras)**.** Un equilibrio de señalización es un conjunto de estrategias (γ_1, γ_2) y una función de conjeturas $\mu : M \to \Delta(T)$ tal que:

1. La estrategia del jugador 1 es una mejor respuesta a la estrategia del jugador 2. Para todo t y $m \in M$:

$$u_1(t, \gamma_1(t), \gamma_2(\gamma_1(t))) \geq u_1(t, m, \gamma_2(m))) \tag{9.7}$$

2. Dada la función de conjeturas que el jugador 2 tiene sobre el tipo del jugador 1, la estrategia del jugador 2 es una mejor respuesta. Para todo $m \in M$ y $a \in A$:

$$\sum_t \mu(m)(t) u_2(t, m, \gamma_2(m)) \geq \sum_t \mu(m)(t) u_2(t, m, a) \tag{9.8}$$

   Obsérvese que la estrategia del jugador 1 no aparece en esta ecuación. Es decir, hasta este punto no se está suponiendo que los mensajes tiene que ser coherentes con la expectativa que el jugador 2 tiene de lo que va jugar el jugador 1.

3. Consistencia de la función de conjeturas y la estrategia que el jugador 2 supone que 1 va utilizar. Dado m sea $T_m = \{t \in T : \gamma_1(t) = m\} \neq \emptyset$. Entonces para todo $t' \in T_m$

$$\mu(m)(t') = \frac{P(t')}{\sum_{t \in T_m} P(t)} \tag{9.9}$$

   si $t' \notin T_m$ entonces $\mu(m)(t')$. Cuando T_m tiene probabilidad cero $\mu(m)(t')$ no tiene restricciones.

Ejemplo 9.19 (Equilibrio separador)**.** Considere una versión dinámica de la batalla de los sexos modificada en la que la mujer juega primero. En este caso el equilibrio de señalización es para la mujer su estrategia dominante, para el hombre $\gamma_2(B) = B, \gamma_2(C) = C$ y lo sustenta una función de conjeturas $\mu(B)(B) = 1, \mu(S)(S) = 1$. Este es un ejemplo de equilibrio separador que definiremos formalmente más adelante.

Ahora, cuando un jugador tiene una estrategia dominante, no siempre esta es su estrategia óptima en un equilibrio de señalización. El siguiente ejemplo ilustra esta situación. En este, a pesar de que el primer jugador tiene una estrategia dominante, al anticipar la reacción del segundo jugador prefiere jugar una estrategia dominada.

Ejemplo 9.20 (Equilibrio separador)**.** Considere la siguiente versión de la batalla de los sexos.

Hombre Mujer	B	S
B	1,2	3,1
S	0,0	2,3
Ánimo de ir al partido		

Hombre Mujer	B	S
B	2,2	0,1
S	3,0	1,3
Ánimo de ir de compras		

En el juego simultáneo la mujer utiliza una estrategia dominante. Sin embargo, en el juego dinámico en el que la mujer juega primero, la mujer no juega la estrategia dominante del juego estático. Obsérvese que el jugador 2 juega $\gamma_H(B) = B, \gamma_H(S) = S$ y la mujer juega $\gamma_M(B)(S) = 1, \gamma_M(S)(B) = 1$ y la siguiente función de conjeturas sustenta el equilibrio de señalización: $\mu(B)(S) = 1, \mu(S)(B) = 1$.

Obsérvese que en los dos juegos dinámicos que acabamos de discutir los dos equilibrios son separadores en el sentido de que la función de conjeturas revela perfectamente el tipo del jugador (en cada caso está concentrada en un solo tipo).

Ejemplo 9.21 (Equilibrio agrupador)**.** Considere la siguiente versión de la batallas de los sexos.

Hombre / Mujer	B	S
B	3,2	2,1
S	0,0	1,3
Ánimo de ir al partido		

Hombre / Mujer	B	S
B	2,2	0,1
S	3,0	1,3
Ánimo de ir de compras		

En este caso el equilibrio señalización es de la forma $\gamma_1(B) = B, \gamma_1(S) = B, \gamma_2(B) = B, \gamma_2(S) = S$ y $\mu(B)(B) = p, \mu(B)(S) = 1 - p$. Es decir, el mensaje no revela nada nuevo sobre el tipo del primer jugador (obsérvese que la condición de consistencia no implica ninguna restricción sobre la función de conjeturas del jugador 1).

Verifiquemos que la tercera condición de la definición de equilibrio de señalización se cumple. Supongamos que $m = B$ entonces $T_m = \{B, S\}$ y la función de conjeturas es tal que $\mu(B)B = p, \mu(B)S = 1 - p$. De otra parte si $t' = B$

$$\frac{P(B)\gamma_M(B)(B)}{\sum_{t\in T_m} P(t)\gamma_M(t)(m)} = \frac{p}{p\gamma_M(B)(B) + (1-p)\gamma_M(S)(B)} \tag{9.10}$$

$$= \frac{p}{p + (1-p)} \tag{9.11}$$

Cuando $t' = S$ la verificación es análoga. El caso en el que $m = S$ se deja como ejercicio.

Consideremos el siguiente ejemplo debido a Kreps y Wilson que resalta las dificultades de surgen en este tipo de interacciones estratégicas.

Ejemplo 9.22 (Cho and Kreps (1987))**.** En un bar se encuentran dos personas, cada un miembro de uno de dos posibles clanes. Un clan es agresivo y el otro clan es pacífico. En el clan pacífico (clan 1) existen dos tipos de integrantes: fuertes y débiles. En el clan agresivo (clan 2) solo existe un tipo de integrantes. Los integrantes de este clan no conocen el tipo de los integrantes del otro clan y tienen una conjetura (correcta) sobre la proporción que hay de cada tipo: el 90 % son fuertes, mientras que el 10 % son débiles. Las acciones disponible para el miembro del clan 1 es pedir una cerveza de desayuno (B) o pedir un Quiche (Q). El miembro del clan 2 no observa qué tipo de persona es la que esta desayunando, pero sí su desayuno, algo que puede servirle como una señal imperfecta del verdadero tipo de la persona. La siguiente figura 9.1 muestra todos los detalles del juego.

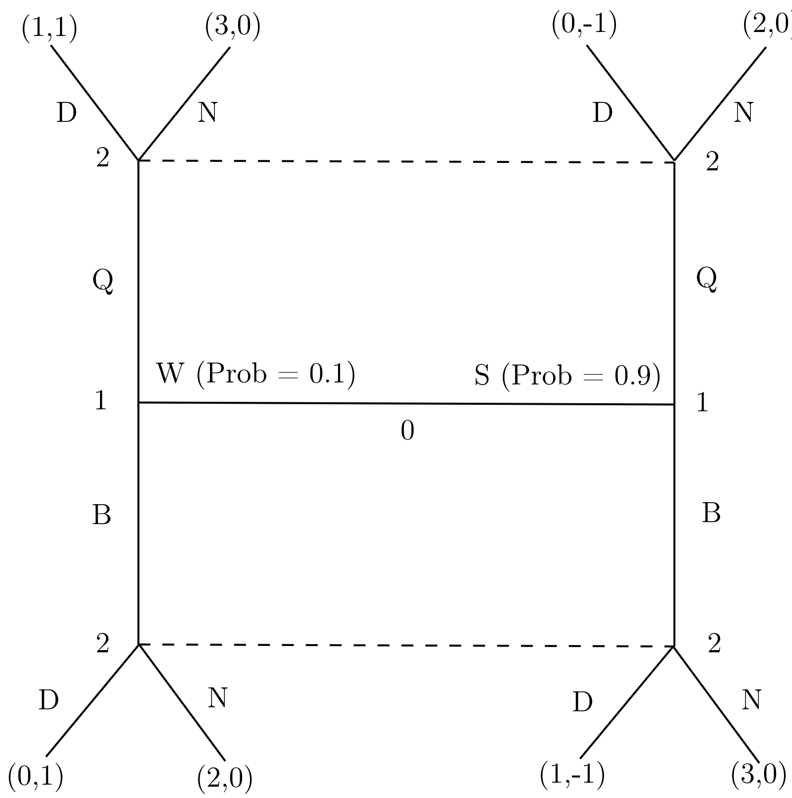

Figura 9.1: Juego de señalización de Cho y Kreps.

Ejercicio 9.23. Muestre que este juego no puede tener un equilibrio separador y calcule las condiciones bajos las cuales se obtienen dos equilibrios agrupadores.