Aplicaciones Juegos Dinámicos [1]

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes y Quantil

Abril de 2025

[1] Basado en Riascos, A. 2024. Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones. www.alvaroriascos.com

Contenido

1. Ineficiencia del Equilibrio
2. La Solución de Pigou
3. Solución de Coase
4. Mecanismo de compensación

Solución centralizada

Example

Considere dos fimas $i = 1, 2$.

- $\pi_1(x_1) = rx_1 - c(x_1)$, donde r es el precio de venta del producto, x_1 la cantidad que ofrece la firma 1 y $c(x_1)$ el costo.
- $\pi_2(x_1) = -e(x_1)$. Es decir, la firma 1 impone una externalidad en la firma 2.

- La solución centralizada en la que un planificador central maximiza la suma de los beneficios de ambas firmas es eficiente en el sentido de Pareto. Las CPO son:

$$r - c'(x_1^c) - e'(x_1^c) = 0 \tag{1}$$

donde x_1^c es un nivel de producción socialmente eficiente.

Solución descentralizada

- La solución descentralizada es ineficiente. Las CPO son:

$$r - c'(x_1^d) = 0 \tag{2}$$

  donde x_1^d es el nivel de producción de la economía descentralizada.

- Obsérvese que si la función de costos es convexa, $c''(x) > 0$, entonces $x_1^d > x_1^e$.

Soluciones

- Tres soluciones clásicas a este problema:
  - Coase: negociación privada en ausencia de costos de transacción y derechos de propiedad bien definidos.
    - No se precisa el mecanismo.
  - Arrow: crear un mercado para la externalidad (mercado de derechos para generar la externalidad).
    - El mercado puede ser muy "delgado".
  - Pigou: utilizar impuesto para desincetivar producción.
    - Supone que el regulador conoce las tecnologías y preferencias de los agentes.
    - Este mecanismo motiva una modficación que relaja el anterior supuesto y la intuición básica del mecanismo de compensación.

Contenido

1. Ineficiencia del Equilibrio
2. La Solución de Pigou
3. Solución de Coase
4. Mecanismo de compensación

La Solución de Pigou

- El mecanismo de Pigou.
- Cobrar un impuesto a la firma 1 igual a $e(x)$.
- El problema de la firma 1 es:

$$rx_1 - c(x_1) - e(x_1)$$

y las C.P.O son:

$$r - c'(x_1^*) - e'(x_1^*)$$

luego si el regulador le impone un impuesto $p^* = e'(x_1^*)$ y la firma resuelve:

$$rx_1 - c(x_1) - p^* x_1$$

entonces esta tributación (lineal) implementa el mecanismo de Pigou.

Contenido

1. Ineficiencia del Equilibrio
2. La Solución de Pigou
3. Solución de Coase
4. Mecanismo de compensación

Coase

- La segunda firma tiene derecho a un río sin contaminación.
- La firma 1 al operar con x_1 le genera una externalidad (costo) de $\pi_2(0) - \pi_2(x_1)$ a la firma 2. Luego el problema de la firma 1 es:

$$rx_1 - c(x_1) - (\pi_2(0) - \pi_2(x_1))$$

  y las CPO son:

$$r - c'(x_1) + \pi_2'(x_1)$$

  pero $\pi_2'(x_1) = -e'(x_1)$ luego la solución de Coase reestablece eficiencia.

Contenido

1. Ineficiencia del Equilibrio
2. La Solución de Pigou
3. Solución de Coase
4. Mecanismo de compensación

Mecanismo de compensación de Vaian

- Varian [1994]: *A Solution to the Problem of Externalities when Agents are Well-Informed.*
- Implementa asignaciones eficientes como equilibrios perfectos en subjuegos en:
  - Ambientes económicos con externalidades.
  - Problemas de competencia imperfecta.
  - Juegos como el dilema de los prisioneros.
- El mecanismo supone que los agentes conocen las tecnologías y preferencias de los demás agentes pero el regulador no.

Aplicación: Mecanismo de compensación

- El problema es que el regulador no conoce $e(x_1)$.
- El mecanismo de compensación tiene dos etapas:
  1. Etapa de revelación del impuesto: Las firmas son llamadas a anunciar, de forma simultánea, cuál es el impuesto y compensación que debe cobrarse.
  2. Etapa de producción: La firma 1 observa las acciones y decide cuanto producir.
- Pagos netos: El regulador les pide resolver el siguiente problema:
  - La firma 1:

$$rx - c(x) - p_2 x - \alpha_1 (p_1 - p_2)^2$$

    donde α_1 es cualquier parámetro mayor que cero.
  - La firma 2:

$$p_1 x - e(x)$$

Aplicación: Mecanismo de compensación

- Intuitivamente:
  - La firma 1 es llamada a pagar un impuesto proporcional al costo marginal según lo reporta la firma 2 y un costo por reportar algo diferente a lo que reporta 1.
  - La firma 2 recibe una compensación proporcional a lo que la firma 1 reporta como el costo marginal.
- Este juego en dos etapas tiene múltiple equilibrios de Nash: cualquier strategia $((x, p), p)$ donde x maximice el beneficio de la firma 1 es un equilibrio de Nash.
- Sin embargo tiene un único equilibrio perfecto en subjuegos: $((x^*, p^*), p^*)$ que implementa las asignaciones de Pigou.

Aplicación: Mecanismo de compensación

- Para ver esto resolvamos el juego por inducción hacia atrás (obsérvese que en la primera etapa se escogen precios de forma simultánea y en la segunda la firma 1 escoge cantidades y la 2 es pasiva). Supongamos que p_1, p_2 es dado y la firma 1 maximiza su beneficio: esto significa escoger $x^*(p_2)$ tal que:

$$r - c'(x^*(p_2)) - p_2 = 0$$

- En la primera etapa del juego, es un juego estático en el que cada firma escoge precios de forma simultánea. Dado p_2 la firma 1 escoge $p_1 = p_2$. Esa es su mejor respuesta.

Aplicación: Mecanismo de compensación

- Ahora, en la primera etapa si la firma 2 maximiza su beneficio entonces escoge p_2 para maximizar:

$$p_1 x(p_2) - e(x(p_2))$$

que tiene C.P.O:

$$\left(p_1 - e'(x(p_2))\right) x'(p_2)$$

$$\Rightarrow$$

$$p_1 = e'(x(p_2))$$

Combinando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$r - c'(x^*) - e'(x^*) = 0$$

Aplicación: Mecanismo de compensación

- Se puede demostrar que este es también el único equilibrio en estrategias mixtas.
- Este es un mecanismo balanceado en equilibrio pero no por fuera de equilibrio.
- Con más de dos agentes es posible hacer el mecanismo balanceado por fuera de equilibrio.
- También se puede implementar el mecanismo con impuestos no lineales.

Aplicación: Mecanismo de compensación

Example (Dilema de los prisioneros)

Considere el juego:

	C	D
C	5,5	2,6
D	7,1	3,3

La pregunta es, ¿Cómo se puede inducir la asignación eficiente en la que ambos cooperan? Sea $x_1 = 1$ si el jugador 1 coopera. Cero de lo contrario y lo mismo para el segundo jugador. La utilidad de cada jugador la denotamos por $u_i(x_1, x_2)$

Aplicación: Mecanismo de compensación

Example

Mecanismo de compensación 1: El primera etapa los jugadores anuncian: $\left((p_{12}^1, p_{21}^1)\,,\ (p_{21}^2, p_{12}^2)\right)$. En la segunda etapa ellos escogen si cooperan o no. El agente 1 maximiza:

$$u_1(x_1, x_2) + p_{21}^2 x_1 - p_{12}^2 x_2 - (p_{21}^1 - p_{21}^2)^2$$

y 2 maximiza:

$$u_2(x_1, x_2) + p_{12}^1 x_2 - p_{21}^1 x_1 - (p_{12}^2 - p_{12}^1)^2$$

Demostrar que cooperar es un equilibrio perfecto en subjuegos y que cualquier $\left((p_{12}^1, p_{21}^1)\,,\ (p_{21}^2, p_{12}^2)\right)$ tal que:

$$\begin{aligned} 4 &\geq p_{21}^1 = p_{21}^2 \geq 2 \\ 3 &\geq p_{12}^1 = p_{12}^2 \geq 1 \end{aligned}$$

son precios que implementan el equilibrio.

Aplicación: Mecanismo de compensación

Example

Mecanismo de compensación 2: En la primera etapa los jugadores anuncian: $\left(p_2^1,\ p_1^2\right)$. En la segunda etapa ellos escogen si cooperan o no. El agente 1 maximiza:

$$u_1(x_1, x_2) - p_2^1 x_2 + p_1^2 x_1$$

y 2 maximiza:

$$u_2(x_1, x_2) - p_1^2 x_1 + p_2^1 x_2$$

Demostrar que cooperar es un equilibrio perfecto en subjuegos y calcular los precios que implementan el equilibrio.