

# Aplicaciones Juegos Dinámicos <sup>1</sup>

Alvaro J. Riascos Villegas  
Universidad de los Andes y Quantil

Abril de 2024

---

<sup>1</sup>Basado en Riascos, A. 2024. Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones.  
[www.alvaroriascos.com](http://www.alvaroriascos.com)

# Contenido

- 1 Ineficiencia del Equilibrio
- 2 La Solución de Pigou
- 3 Solución de Coase
- 4 Mecanismo de compensación

## Example

Considere dos firmas  $i = 1, 2$ .

- $\pi_1(x_1) = rx_1 - c(x_1)$ , donde  $r$  es el precio de venta del producto,  $x_1$  la cantidad que ofrece la firma 1 y  $c(x_1)$  el costo.
  - $\pi_2(x_1) = -e(x_1)$ . Es decir, la firma 1 impone una externalidad en la firma 2.
- 
- La solución centralizada en la que un planificador central maximiza la suma de los beneficios de ambas firmas es eficiente en el sentido de Pareto.

- La solución descentralizada es ineficiente.

- Tres soluciones clásicas a este problema:
  - Coase: negociación privada en ausencia de costos de transacción y derechos de propiedad bien definidos
    - No se precisa el mecanismo.
  - Arrow: crear un mercado para la externalidad (mercado de derechos para generar la externalidad).
    - El mercado puede ser muy "delgado".
  - Pigou
    - Supone que el regulador conoce las tecnologías y preferencias de los agentes.
    - Este mecanismo motiva una modificación que relaja el anterior supuesto y el la intuición básica del mecanismo de compensación.

# Contenido

- 1 Ineficiencia del Equilibrio
- 2 La Solución de Pigou
- 3 Solución de Coase
- 4 Mecanismo de compensación

## La Solución de Pigou

- El mecanismo de Pigou.
- Cobrar un impuesto a la firma 1 igual a  $e(x)$ .
- El problema de la firma 1 es:

$$rx_1 - c(x_1) - e(x_1)$$

y las C.P.O son:

$$r - c'(x_1^*) - e'(x_1^*)$$

luego si el regulador le impone un impuesto  $p^* = e'(x_1^*)$  y la firma resuelve:

$$rx_1 - c(x_1) - p^* x_1$$

entonces esta tributación (lineal) implementa el mecanismo de Pigou.

# Contenido

- 1 Ineficiencia del Equilibrio
- 2 La Solución de Pigou
- 3 Solución de Coase**
- 4 Mecanismo de compensación

## Coase

- La segunda firma tiene derecho a un río sin contaminación.
- La firma 1 al operar con  $x_1$  le genera una externalidad (costo) de  $\pi_2(0) - \pi_2(x_1)$  a la firma 2. Luego el problema de la firma 1 es:

$$rx_1 - c(x_1) - (\pi_2(0) - \pi_2(x_1))$$

y las CPO son:

$$r - c'(x_1) + \pi_2'(x_1)$$

pero  $\pi_2'(x_1) = e'(x_1)$  luego la solución de Coase reestablece eficiencia.

# Contenido

- 1 Ineficiencia del Equilibrio
- 2 La Solución de Pigou
- 3 Solución de Coase
- 4 Mecanismo de compensación

## Mecanismo de compensación de Vaian

- Varian [1994]: *A Solution to the Problem of Externalities when Agents are Well-Informed.*
- Implementa asignaciones eficientes como equilibrios perfectos en subjuegos en:
  - Ambientes económicos con externalidades.
  - Problemas de competencia imperfecta.
  - Juegos como el dilema de los prisioneros.
- El mecanismo supone que los agentes conocen las tecnologías y preferencias de los demás agentes pero el regulador no.

# Aplicación: Mecanismo de compensación

- El problema es que el regulador no conoce  $e(x_1)$ .
- El mecanismo de compensación
- Dos etapas:
  - 1 Etapa de revelación del impuesto: Las firmas son llamadas a anunciar cual es el impuesto Pigoviano que soluciona el problema de ineficiencia.
  - 2 Pagos netos: El regulador les pide resolver el siguiente problema:
    - La firma 1:

$$rx - c(x) - p_2x - \alpha_1(p_1 - p_2)^2$$

donde  $\alpha_1$  es cualquier parámetro mayor que cero.

- La firma 2:

$$p_1x - e(x)$$

# Aplicación: Mecanismo de compensación

- Intuitivamente:
  - La firma 1 es llamada a pagar un impuesto proporcional al costo marginal según lo reporta la firma 2 y un costo por reportar algo diferente a lo que reporta 1.
  - La firma 2 recibe una compensación proporcional a lo que la firma 1 reporta como el costo marginal.
- Este juego en dos etapas tiene múltiple equilibrios de Nash: cualquier estrategia  $((x, p), p)$  donde  $x$  maximice el beneficio de la firma 1 es un equilibrio de Nash.
- Sin embargo tiene un único equilibrio perfecto en subjuegos:  $((x^*, p^*), p^*)$  que implementa las asignaciones de Pigou.

# Aplicación: Mecanismo de compensación

- Para ver esto resolvamos el juego por inducción hacia atrás (obsérvese que en la primera etapa se escogen precios de forma simultánea y en la segunda la firma 1 escoge cantidades y la 2 es pasiva). Supongamos que  $p_1, p_2$  es dado y la firma 1 maximiza su beneficio: esto significa escoger  $x^*(p_2)$  tal que:

$$r - c'(x^*(p_2)) - p_2 = 0$$

- En la primera etapa del juego, es un juego estático en el que cada firma escoge precios de forma simultánea. Dado  $p_2$  la firma 1 escoge  $p_1 = p_2$ . Esa es su mejor respuesta.

# Aplicación: Mecanismo de compensación

- Ahora, en la primera etapa si la firma 2 maximiza su beneficio entonces escoge  $p_2$  para maximizar:

$$p_1 x(p_2) - e(x(p_2))$$

que tiene C.P.O:

$$\begin{aligned} & (p_1 - e'(x(p_2))) x'(p_2) \\ \Rightarrow & \\ & p_1 = e'(x(p_2)) \end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$r - c'(x^*) - e'(x^*) = 0$$

# Aplicación: Mecanismo de compensación

- Se puede demostrar que este es también el único equilibrio en estrategias mixtas.
- Este es un mecanismo balanceado en equilibrio pero no por fuera de equilibrio.
- Con más de dos agentes es posible hacer el mecanismo balanceado por fuera de equilibrio.
- También se puede implementar el mecanismo con impuestos no lineales.

## Example (Dilema de los prisioneros)

Considere el juego:

	C	D
C	5,5	2,6
D	7,1	3,3

La pregunta es, ¿Cómo se puede inducir la asignación eficiente en la que ambos cooperan? Sea  $x_1 = 1$  si el jugador 1 coopera. Cero de lo contrario y lo mismo para el segundo jugador. La utilidad de cada jugador la denotamos por  $u_i(x_1, x_2)$

## Example

Mecanismo de compensación 1: En la primera etapa los jugadores anuncian:  $((p_{12}^1, p_{21}^1), (p_{21}^2, p_{12}^2))$ . En la segunda etapa ellos escogen si cooperan o no. El agente 1 maximiza:

$$u_1(x_1, x_2) + p_{21}^2 x_1 - p_{12}^2 x_2 - (p_{21}^1 - p_{21}^2)^2$$

y 2 maximiza:

$$u_2(x_1, x_2) + p_{12}^1 x_2 - p_{21}^1 x_1 - (p_{12}^2 - p_{12}^1)^2$$

Demostrar que cooperar es un equilibrio perfecto en subjuegos y que cualquier  $((p_{12}^1, p_{21}^1), (p_{21}^2, p_{12}^2))$  tal que:

$$4 \geq p_{21}^1 = p_{21}^2 \geq 2$$

$$3 \geq p_{12}^1 = p_{12}^2 \geq 1$$

son precios que implementan el equilibrio.

## Example

Mecanismo de compensación 2: En la primera etapa los jugadores anuncian:  $(p_2^1, p_1^2)$  etapa los jugadores anuncian si van a cooperar o no. En la segunda etapa ellos escogen si cooperan o no. El agente 1 maximiza:

$$u_1(x_1, x_2) - p_2^1 x_2 + p_1^2 x_1$$

y 2 maximiza:

$$u_2(x_1, x_2) - p_1^2 x_1 + p_2^1 x_2$$

Demostrar que cooperar es un equilibrio perfecto en subjuegos y calcular los precios que implementan el equilibrio.