Capítulo 8

Aplicaciones juegos dinámicos

En este capítulo vamos a estudiar algunas aplicaciones de juegos dinámicos a problemas de competencia imperfecta (i.e., oligopolio) y diseño de mecanismos. En la práctica, un resultado importante que vamos a obtener en el caso de competencia imperfecta es la equivalencia entre el problema de competencia a la Betrand con restricciones de capacidad en un juego con dos etapas (i.e., en la primera etapa las firmas eligen su capacidad de producción y en la segunda el precio de venta) y competencia a la Cournot en un juego estático. Este resultado de Kreps y Schienkamn racionaliza el uso del modelo de Cournot en muchas aplicaciones en donde en principio pareceria más natural el modelo de competencia en precios a la Bertrand.

8.1. Oligopolio: Stackelberg

Este es un juego en dos etapas en el cual una firma es líder y toma su decisión de producción. En la segunda etapa las demás firmas deciden sus niveles de producción. Consideremos el caso de dos firmas: $C_i(q_i) = cq_i$ y $P(Q) = max\{M - dQ, 0\}$, $M, d > 0$ y $Q = q_1 + q_2$. El espacio de estrategias de la firma líder es $S_1 = R_+$. El espacio de estrategias para la firma seguidora es el conjunto de todas las funciones de los reales no negativos en los reales no negativos (la estrategia de la firma seguidora es condicional a la cantidad producida por la firma líder). La forma de resolver este juego de información perfecta es hacer inducción hacias atrás. Primero encontramos la función de mejor respuesta de la firma seguidora ante cualquier estrategia de la firma líder. Segundo, calculamos la mejor estrategia de la firma líder cuando esta anticipa que la firma seguidora utilizará su mejor respuesta. En esta caso la solución es:

$$q_1 = \frac{M-c}{2d} \tag{8.1}$$

$$q_2 = \frac{M-c-dq_1}{2d} = \frac{M-c}{4d} \tag{8.2}$$

Si comparamos este equilibrio con el equilibrio simétrico en el caso de competencia a la Cournot, la firma líder produce más que en el caso de competencia a la Cournot y la firma seguidora, menos. La misma relación se mantiene para los beneficios agregados.

Ejercicio 8.1. Compare los resultados de este modelo de competencia de Stackelberg con los resultados de competencia monopolística, Cournot y Bentrand. En particular, muestre que en términos de excedente del consumidor el orden de menor a mayor excedente del consumidor es: monopolio, Cournot, Stackelberg y Bertrand. ¿Existen otros equilibrios del juego de Stackelberg que sean equilibrios de Nash? ¿Son estos creíbles? ¿Por qué la firma seguidora, a pesar de que cuenta con más información que en el caso de competencia a la Cournot, acaba en un equilibrio peor?

Ejercicio 8.2. Demuestre que si comparamos este equilibrio con el equilibrio simétrico en el caso de competencia a la Cournot, la firma líder tiene mayores beneficios relativo a dicho caso, y la firma seguidora, menos.

8.2. Delegación de la administración

En la práctica, la administración de una empresa u organización se delega y el problema se transforma en un problema de agencia: la interacción se da entre un principal, los dueños de la firma, y sus empleados o gerente de la misma. En este caso, la hipótesis de maximización de beneficios no es muy convincente. Considere el siguiente modelo.[1]

En una primera etapa los dueños de la firma eligen incentivos (α_i, f_i) El primero pondera la participación en los beneficios (antes del salario total del administrador) e ingresos y el segundo representa el sueldo básico. En la segunda etapa los administradores compiten a la Cournot. La función de demanda inversa es: $p(q) = 1 - q_1 - q_2$. El costo marginal es constante $c \in (0,1)$. Los beneficios de las firmas son: $\pi(q_1, q_2) = p(q)q_i - cq_i$. El pago para el administrador es:

[1] Tomado de Wolfstetter (2002). Topics in Microeconomics.

$$M_i(q_1, q_2) = \alpha_i \pi + (1 - \alpha_i) p(q) q_i + f_i. \tag{8.3}$$

y la restricción de participación es $M_i \geq m$, donde m es el salario de reserva. Cada administrador maximiza su ingreso sujeto a la restricción de participación.

Ahora, los dueños de la empresas deben fijar el contrato óptimo. Para resolver este problema vamos a usar el siguiente truco. Suponga que los dueños fijan el salario básico para que los administradores sean indiferentes respecto al salario de reserva. El beneficio de los dueños es:

$$\Pi_i - M_i = \Pi_i - m$$

donde hemos usado el truco mencionado anteriormente.

El problema de los dueños es optimizar sus beneficios escogiendo adecuadamente α_i. Obsérvese que al ser f_i un salario que no afecta el margen (es fijo) de los beneficios de los dueños, entonces se justifica haber utilizado el truco anterior.

Ejercicio 8.3. Demostrar que en equilibrio:

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{6c-1}{5c}$

2. $f_1 = f_2 = m - \frac{4(1-c)^2}{25}$

3. $\pi_1 = \pi_2 = \frac{2(1-c)^2}{25} - m$

4. $M_1 = M_2 = m$

Ejercicio 8.4. Demostrar que en equilibrio:

1. Si $c > \frac{1}{6}$ entonces $\alpha_i \in (0, 1)$. Caso contrario $\alpha_i \leq 0$

2. Los beneficios en equilibrio son menores a los obtenidos si la firma maximizara los beneficios sin un administrador. Es decir, con administradores, no es un equilibrio maximizar los beneficios directamente (i.e., existiría un incentivo a desviarse y vender más).

8.3. Competencia con restricciones capacidad

Este modelo pone de manifiesto la relevancia del modelo de Cournot en la práctica. Si bien es cierto que rara vez vemos a las firmas competir en cantidades, sí es una mejor descripción de la realidad suponer que estas están sujetas a restricciones de capacidad y que compiten en precios a la Bertrand. El mensaje del siguiente modelo es que si las firmas en una primera etapa definen sus capacidades de producción y en una segunda etapa compiten en precios, el equilibrio es equivalente al equilibrio de Cournot (véase Vega-Redondo: El modelo de Kreps y Scheinkman).

8.4. Productos diferenciados

En secciones anteriores vimos que con productos homogéneos competencia a la Bertrand no permitía mayores oportunidades de hacer uso del poder de mercado en un oligopolio. Con restricciones de capacidad, como en el modelo de Kreps y Scheinkman, si puede suceder que las firmas utilicen su poder de mercado (i.e., el problema es equivalente a competencia a la Cournot). También vimos que, en un modelo sencillo con diferenciación exógena en los productos, entre menor sustitución exista en los bienes, más oportunidades tienen las firmas de ejercer su poder de mercado. En la siguiente aplicación extendemos el modelo espacial (Hotelling) a un contexto dinámico. Este puede ser interpretado como un modelo de competencia entre productos diferenciados en el que en la primera etapa los agentes escogen el grado de diferenciación del producto y en la segunda compiten en precios.

Considere dos firmas cuya posición (localización) del producto que ofrece en un espacio de características corresponde a su elección del producto. Los consumidores se ubican en ese espacio reflejando sus diferencias en preferencias por los productos ubicándose en el conjunto de características que más los satisfacen. En la medida que el consumidor compre un bien más apartado del punto donde se encuentra, esto le traerá una mayor desutilidad.

Supongamos que el espacio de carterísticas (i.e., calidad) es $[0, 1]$. Existen dos firmas con costos marginales de producción $c > 0$ constantes. Los consumidores están distribuidos de forma uniforme en el espacio de características. La utilidad de consumir el producto de mayor preferencia es $\hat{u} > 0$ en unidades monetarias. La función de utilidad de un consumidor ubicado en $h \in [0, 1]$ que desea consumir un producto de características $s_i \in [0, 1]$ producido por la firma i con precio de venta p_i es:

$$\hat{u} - \nu(h - s_i)^2 - p_i \tag{8.4}$$

donde ν refleja el grado de desutilidad que le produce a un consumidor consumir una calidad distinta a su más preferida h.

Ejercicio 8.5. Por simplicidad y sin perdida de generalidad, supongamos que $s_1 < s_2$. Mostrar que si $\hat{u} > 3\nu + c$ entonces todos los consumidores compran un bien de algunas de las dos firmas en equilibrio.

El juego ahora es el siguiente. En la primera etapa las firmas eligen la calidad del producto s_1, s_2. En la segunda etapa, conscientes de la calidad de ambos productos, escogen sus precios.

Ejercicio 8.6. Demostrar que el EPS es: $s_1 = 0, s_2 = 1$ y que los precios de equilibrio son:

$$p_1(s_1, s_2) = p_2(s_1, s_2) = c + \nu$$

8.5. Diseño de mecanismos

Vamos a estudiar dos aplicaciones a la teoria de diseño de mecanismos: el mecanismo de compensación de Varian y el problema del Rey Salomón.

8.5.1. Un problema de externalidades

En muchas actividades económicas de producción las acciones de una firma afectan de forma directa los beneficios de las demás firmas que operan en ese u otros mercados. Este es un caso clásico de interacción estratégica entre agentes (i.e., externalidades) para el cual la teoría de juegos nos da una herramienta de análisis. Además, bajo estas condiciones sabemos que usualmente el resultado de la intereacción es ineficiente socialmente.

Existen por lo menos tres soluciones clásicas a este problema:

1. Coase: negociación privada en ausencia de costos de transacción y con derechos de propiedad bien definidos.

2. Arrow: crear un mercado para la externalidad (mercado de derechos de producción de la externalidad). El problema es que el mercado puede ser muy "delgado" (tener muy pocos participantes).

3. Pigou: supone que el regulador conoce las tecnologías y tributando y/o subsidiando, puede restablecer la eficiencia social.

En esta sección vamos a estudiar algunas de estas soluciones mientras dejamos otras como ejercicios. El mecanismo de compensación de Varian es un juego dinámico que complementa la solución de Coase suponiendo que los agentes están bien informados de los fundamentales económicos de los demás agentes, pero el regulador no conoce esta características.[2] Este es un ejemplo típico de diseño de mecanismos con información completa pues, si bien el regulador desconoce los fundamentales de las firmas, estas sí se conocen entre ellas. Este mecanismo de compensación implementa asignaciones eficientes como equilibrios perfectos en subjuegos en:

1. Ambientes económicos con externalidades.
2. Problemas de competencia imperfecta.
3. Juegos como el dilema de los prisioneros.

Para poner en perspectiva el mecanismo de Varian, primero vamos a discutir las soluciones de Coase y Pigou.

La solución de Coase

En un artículo muy importante en 1960 titulado *The Problem of Social Cost*, por el cual al autor le fue otrogado el premio Nobel de Economía en 1991, Ronald Coase expuso la siguiente idea. Él notó que en muchas ocasiones el problema de la ineficiencia que ocurría en casos como el que hemos expuesto anteriormente se debía a la falta de un mercado para la externalidad que mediara el efecto que tiene sobre los otros agentes la producción de cada uno. En el caso particular de esta sección, es claro que no existe un mercado para comprar o vender contaminación, razón por la cual, la firma 1 no internaliza la contaminación que produce en el río. De la misma forma, la firma 2 no tiene la posibilidad de comprar agua sin contaminar. Más notable aun fue observar que la razón por la cual no existía un mercado para este "bien", la contaminación, era la ausencia de derechos de propiedad bien definidos sobre él. Para ser más precisos, la ausencia de derechos de propiedad bien

[2]Varian [1994]: *A Solution to the Problem of Externalities when Agents are Well-Informed.* En efecto, usando juegos dinámicos es posible implementar una gran cantidad de funciones de elección social en equilibrios perfectos en subjuegos.

definidos se refiere al derecho o no a contaminar. En primer lugar, podríamos argumentar que la firma 2 tiene el derecho a un río sin contaminación. De la misma forma podríamos argumentar que la firma 1 tiene el derecho a contaminar. En cualquiera de los dos casos es claro que la definición y asignación precisa de cuál de las dos partes tiene los derechos sobre la contaminación es el primer paso en la creación de un mercado para el bien.

Por otro lado, la presencia de costos de transacción hace referencia a una forma muy precisa de estos costos. Específicamente, aquellos costos que impedirían una negociación privada creíble entre las partes con relación a un posibe intercambio del bien en cuestión. Supongamos que una vez definida la propiedad sobre el bien, los agentes pueden negociar un intercambio del bien y que la negociación no requiere de un agente externo que garantice el cumplimiento del contrato. Es decir, en ausencia de este costo de transacción que podría verse reflejado en la intervención del gobierno para garanatizar el cumplimiento o la contratación de abogados para precisar los contratos en caso de una eventualidad negativa para alguna de las partes, la contratación privada tendría el efecto de establecer un precio de negociación para el bien. En estas circunstancias podríamos decir que se han dado las dos condiciones más importantes para la creación de un mercado para el bien contaminación: propiedad del bien y precio. Sorprendentemente, Coase no solamente mostró que el problema radicaba en la falta de derechos de propiedad sino que demostró que, en ausencia de costos de transacción, es posible reestablecer la eficiencia social independientemente de a quién se le otorgue los derechos. Ésto es conoido como el teorema de Coase. Ilustraremos todas estas idea a través de un ejemplo.

Vamos a mostrar que en ambos casos es posible, mediante la negociaión privada entre las partes, reestablecer el óptimo social y que la solución no depende de a quién se le otorguen los derechos (una ilustración del teorema de Coase). Sin embargo, a quién se le otorgue los derechos y la forma de la negociación privada sí tiene consecuencias distribucionales.

Para comenzar, primero debemos caracterizar la solución centralizada (eficiente) y la solución descentralizada (ineficiente). La primera se puede caracterizar suponiendo que existe un planificador central que puede administrar ambas firmas y maximizar la suma de los beneficios de las firmas. Es decir, el planificador central resuelve el problema:

$$\max_{L_1, L_2} p_2 F^2(L_1, L_2) - wL_2 + p_1 F^1(L_1) - wL_1$$

Las condiciones de primer orden son:

$$
\begin{aligned}
p_1 \frac{\partial F^1(L_1)}{\partial L_1} + p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_1} &= w \\
p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_2} &= w
\end{aligned}
$$

Ejercicio 8.7 (Solución Eficiente)**.** Demostrar que la solución anterior es en efecto socialmente eficiente (en el sentido de Pareto).

Ahora consideremos el problema descentralizado. En este, cada firma elige la demanda de trabajo que maximice sus beneficios. Para la firma 1 el problema es: $\pi_1(L_2) = \max_{L_1} p_1 F^1(L_1, L_2) - wL_1$ y para la firma 2 es un problema similar: $\pi_2(L_1) = \max_{L_2} p_2 F^2(L_1, L_2) - wL_2$. Las condiciones de primer orden de este problema implican que la productividad marginal del trabajo de cada empresa es igual al salario correspondiente. Luego, comparando con la solución centralizada podemos ver que la solución descentralizada no es socialmente eficiente.

Con estos preliminares ahora estamos preparados para discutir la solución de Coase a este problema. Consideremos separadamente cada caso de asignación de derechos de propiedad.

Caso 1 (La segunda firma tiene derecho a un río sin contaminación)**.** Consideremos de nuevo el problema de la firma 2. Dada una demanda de trabajo L_1 por parte de la firma 1 el máximo beneficio posible de la firma 2 es:

$$\pi_2(L_1) = \max_{L_2} p_2 F^2(L_1, L_2) - wL_2$$

Si la firma 1 no operara entonces los beneficios de la firma 2 serían $\pi_2(0)$. Al operar a una escala L_1 la firma 1 perjudica a la firma 2 y el costos para esta ultima es: $\pi_2(0) - \pi_2(L_1)$. Ahora, dado L_1 sea $L_2 = h(L_1)$, la solución óptima al problema anterior. Entonces la función de beneficios de la firma se puede escribir como:

$$\pi_2(L_1) = p_2 F^2(L_1, h(L_1)) - wh(L_1)$$

Al ser responsable la firma 1 por la contaminación el río entonces ella debe compensar a la firma 2. La cantidad en la que debe compensarla es igual al perjuicio causado: $\pi_2(0) - \pi_2(L_1)$. Luego, siendo la firma 1 consiente de este costo adicional el probema que enfrenta es:

$$\max p_1 F^1(L_1) - wL_1 - (\pi_2(0) - \pi_2(L_1))$$

y la firma 2 resuelve:

$$\max p_2 F^2(L_1, L_2) - wL_2 + (\pi_2(0) - \pi_2(L_1))$$

Las condiciones de primer orden son, respectivamente,

$$\begin{aligned} p_1 \frac{\partial F^1(L_1)}{\partial L_1} + \frac{\partial \pi_2(L_1)}{\partial L_1} &= w \\ p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_2} &= w \end{aligned}$$

Ahora, como $\pi_2(L_1) = p_2 F^2(L_1, h(L_1)) - wh(L_1)$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_2(L_1)}{\partial L_1} &= p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_1} + \left(p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_2} - w \right) \frac{\partial h(L_1)}{\partial L_1} \\ &= p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_1} \end{aligned}$$

por las condiciones de primer orden de la firma 2. Luego, las condiciones de primer orden de las dos firmas se reducen a las condiciones de optimalidad social.

Caso 2 (La primera firma tiene derecho a contaminar el río)**.** En este caso, la firma 2 puede compensar a la firma 1 con el fin de que esta disminuya la contaminación del río. Supongamos que la firma 1, gracias a la compensación de la firma 2, disminuye su escala de operación a $L_1 < L_1^p$. Por lo tanto la firma 2 estaría dispesta a compensar a la firma 1 con $\pi_2(L_1) - \pi_2(L_1^p)$ ya que este sería el aumento en el beneficio de esta última. Luego, el problema que la firma 1 resuelve es:

$$\max p_1 F^1(L_1) - wL_1 + (\pi_2(L_1) - \pi_2(L_1^p))$$

y la firma 2 resuelve:

$$\max p_2 F^2(L_1, L_2) - wL_2 - (\pi_2(L_1) - \pi_2(L_1^p))$$

Las condiciones de primer orden son, respectivamente,

$$\begin{aligned} p_1 \frac{\partial F^1(L_1)}{\partial L_1} + \frac{\partial \pi_2(L_1)}{\partial L_1} &= w \\ p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_2} &= w \end{aligned}$$

y recordamos que:

$$\frac{\partial \pi_2(L_1)}{\partial L_1} = p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_1}$$

entonces reestablecemos la optimalidad social.

Obsérvese que la primera solución que se discutió anteriormente corresponde al caso en el que la primera firma le ofrece una compensación a la segunda igual al perjuicio causado.

La segunda solución corresponde al caso en el que la primera firma tiene derecho a contaminar y la segunda le ofrece un compensación por reducir su actividad.

Ahora, suponga que la segunda firma tiene derecho a un río sin contaminación y que la negociación consiste en que la segunda firma le hace una oferta a la primera, acepta o rechaza de la siguiente forma: La segunda firma demanda una compensación T por los perjucicios causados. Luego, la segunda firma va escoger la compensación igual al menor valor que hace indiferente a la firma uno de aceptar la propuesta o rechazarla. Es fácil mostrar que este tipo de negociación también restablece el nivel de producción socialmente eficiente pero distinto a las dos soluciones anteriores.

Todas estas formas de negociación privada y asignación de derechos de propiedad restablecen eficiencia social y todas tienes consecuencias distribucionales distintas.

La solución de Pigou

En la siguiente sección vamos a introducir la solución de Pigou, pero antes, es bueno reescribir el problema centralizado, descentralizado y la solución de Coase en el siguiente contexto. Considere dos firmas $i = 1, 2$ con función de beneficios $\pi_1(x_1) = rx_1 - c(x_1)$, donde r es el precio de venta del producto, x_1 la cantidad que ofrece la firma 1 y $c(x_1)$ el costo. Por su parte, $\pi_2(x_1) = -e(x_1)$. Es decir, la firma 1 impone una externalidad en la firma 2, la cual, para propósitos del desarrollo de esta sección, toma la forma de contaminación sobre un río.

Ejercicio 8.8. Caracterice la solución eficiente de este problema como un problema de optimización de un planificador central y escriba las condiciones de primer orden del problema. Muestre que la solución descentralizada no satisface estas ecuaciones y, por lo tanto, es ineficiente. Caracterice la solución eficiente de este problema usando el mecanismo de Coase.

Ahora si consideremos la aproximación de Pigou. Supongamos que un planificador central le cobra un impuesto a la firma 1 igual a $e(x)$.

El problema de la firma 1 es:

$$rx_1 - c(x_1) - e(x_1)$$

y las C.P.O son:

$$r - c'(x_1^*) - e'(x_1^*) = 0$$

luego si el regulador le impone un impuesto $p^* = e'(x_1^*)$ y la firma resuelve:

$$rx_1 - c(x_1) - p^* x_1$$

entonces esta tributación (lineal) implementa el mecanismo de Pigou. El problema es que el regulador no conoce $e(x_1)$.

El mecanismo de compensación

El mecanismo de compensación consiste de un juego de información imperfecta en dos etapas.

1. Etapa de revelación del subsidio e impuesto: Las firmas son llamadas a anunciar cual es el subsidio e impuesto Pigoviano que soluciona el problema de ineficiencia: (p_1, p_2).

2. Pagos netos: Las firmas deben resolver el siguiente problema:

   La firma 1:

   $$rx - c(x) - p_2 x - \alpha_1 (p_1 - p_2)^2$$

   donde α_1 es cualquier parámetro mayor que cero.

   La firma 2:

   $$p_1 x - e(x)$$

Intuitivamente la firma 1 es llamada a pagar un impuesto proporcional al costo marginal según lo reporta la firma 2 y un costo por reportar algo diferente a lo que reporta 2. La firma 2 recibe una compensación proporcional a lo que la firma 1 reporta como el costo marginal. Este juego en dos etapas tiene múltiple equilibrios de Nash: cualquier strategia $((x,p),p)$ donde x maximice el beneficio de la firma 1 es un equilibrio de Nash. Sin embargo, tiene un único equilibrio perfecto en subjuegos: $((x_1^*, p^*), p^*)$ que implementa las asignaciones de Pigou.

Para ver esto resolvamos el juego por inducción hacia atrás. Obsérvese que en la primera etapa se escogen precios de forma simultánea y en la segunda la firma 1 escoge cantidades y la 2 es pasiva. Supongamos que p_1, p_2 es dado y la firma 1 maximiza su beneficio: esto significa escoger $x_1^*(p_2)$ tal que:

$$r - c'(x^*(p_2)) - p_2 = 0$$

En la primera etapa del juego, es un juego estático en el que cada firma escoge precios de forma simultánea. Dado p_2 la firma 1 escoge $p_1 = p_2$. Esa es su mejor respuesta.

Ahora, en la primera etapa si la firma 2 maximiza su beneficio entonces escoge p_2 para maximizar:

$$p_1 x(p_2) - e(x(p_2))$$

que tiene C.P.O:

$$\begin{aligned} &\left(p_1 - e'(x(p_2))\right) x'(p_2) \\ \Rightarrow & \\ &p_1 - e'(x(p_2)) \end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$r - c'(x^*) - e'(x^*) = 0$$

Se puede demostrar que este es también el único equilibrio en estrategias mixtas. Este es un mecanismo balanceado en equilibrio (i.e., en equilibrio la suma neta de subsidios y tranferencias es cero) pero no por fuera de equilibrio. Con más de dos agentes es posible hacer el mecanismo balanceado por fuera de equilibrio. También se puede implementar el mecanismo con impuestos no lineales.

Ejemplo 8.9 (Dilema de los prisioneros)**.** Considere el juego:

1\2	C	D
C	5,5	2,6
D	7,1	3,3

La pregunta es, ¿cómo se puede inducir la asignación eficiente en la que ambos cooperan y el equilibrio es eficiente y además la única asignación eficiente? Sea $x_1 = 1$ si el jugador 1 coopera. Cero de lo contrario y lo mismo para el segundo jugador. La utilidad de cada jugador la denotamos por

$u_i(x_1, x_2)$.

Mecanismo de compensación I: El primera etapa los jugadores anuncian: $\left(\left(p^1_{12}, p^1_{21}\right),\ \left(p^2_{21}, p^2_{12}\right)\right)$, el jugador 1 y 2 respectivamente. En la segunda etapa ellos escogen si cooperan o no. El agente 1 maximiza:

$$u_1(x_1, x_2) + p^2_{21}x_1 - p^2_{12}x_2 - (p^1_{21} - p^2_{21})^2$$

y 2 maximiza:

$$u_2(x_1, x_2) + p^1_{12}x_2 - p^1_{21}x_1 - (p^2_{12} - p^1_{12})^2$$

Demostrar que cooperar es un equilibrio perfecto en subjuegos y que cualquier $\left(\left(p^1_{12}, p^1_{21}\right),\ \left(p^2_{21}, p^2_{12}\right)\right)$ tal que:

$$\begin{array}{l} p^1_{21} = p^2_{21} \geq 2 \\ p^1_{12} = p^2_{12} \geq 1 \end{array}$$

son precios que implementan el equilibrio.

Ahora, mostrar adicionalmente que si:

$$\begin{array}{rcl} 4 & \geq & p^1_{21} = p^2_{21} \geq 2 \\ 3 & \geq & p^1_{12} = p^2_{12} \geq 2 \end{array}$$

El equilibrio es eficiente y es la única asignación eficiente.

Alternativamente, para este caso podemos dar otra version del mecanismo de compensación.

Mecanismo de compensación II: En la primera etapa los jugadores anuncian: $\left(p^1_2,\ p^2_1)\right)$etapa los jugadores anuncian si van a cooperar o no. En la segunda etapa ellos escogen si cooperan o no. El agente 1 maximiza:

$$u_1(x_1, x_2) - p^1_2 x_2 + p^2_1 x_1$$

y 2 maximiza:

$$u_2(x_1, x_2) - p^2_1 x_1 + p^1_2 x_2$$

Demostrar que cooperar es un equilibrio perfecto en subjuegos y calcular los precios que implementan el equilibrio.

Ejemplo 8.10. Considere el siguiente juego en dos etapas. En la primera es idéntico al dilema de los prisioneros. Cada jugador elige cooperar o acusar a su contrincante. En la segunda etapa los agentes deciden si aprueban o no lo que su adversario eligió. Si ambos aprueban se juega lo que propusieron y se obtiene el pago correspondiente del dilema de los prisioneros. Si alguno desaprueba se obteiene el pago que en el dilema de los prisioneros se obtiene cuando ambos acusan. Mostrar que estas estrategias implementan la cooperación entre los agentes haciendo inducción hacia atrás eliminando estrategias débilmente dominadas. Sin embargo, mostrar que no es un equilibrio perfecto en subjuegos. Es interesante que existe evidencia experimental que muestra que estas etrategias implementan cooperación en el 90 % de la veces en la primera ronda y 93,2 % a lo largo de varias rondas, mientras que el mecanismo de Varian implementa cooperación en el 63,3 % de la veces en la primera ronda y 75,2 % a lo largo de varias rondas (véase:L Tatsuyoshi Saijo, Takehito Masuda y Takafumi Yamakawa. (2018). Approval mechanism to solve prisoner's dilemma: comparison with Varian's compensation mechanism. Social Choice and Welfare).

8.5.2. El problema del Rey Salomón

El problema del Rey Salomón también ilustra las nuevas oportunidades estratégicas que surgen en juegos dinámicos y que permiten enriquecer el conjunto de resultados que son implementables.

Consideremos de nuevo el el problema del Rey Salomón. Dos mujeres, A y B, se aparecen en frente al Rey Salomón con un bebé. Cada una de las mujeres reclama al bebé como suyo. El valor para la verdadera madre del bebé es 100 y 50 para la mujer que no es la verdadera madre. El Rey no sabe quién es la verdadera madre pero sí sabe las valoraciones mencionadas. El Rey les propone jugar el siguiente juego.

1. El Rey va a preguntarle a la mujer A si ella es la verdadera madre. Si dice que no lo es le entrega el bebé a la mujer B. Si A responde afirmativamente se continua con el siguiente paso.

2. El Rey le pregunta a la mujer B si es la verdadera madre. Si dice que no lo es se le entrega el bebé a la mujer A. Si responde afirmativamente la mujer B le debe pagar al Rey 75 y se queda con el bebé y la mujer A debe pagarle 10 al Rey.

Ejercicio 8.11. Responda las siguientes preguntas.

1. Describa los dos juegos en forma extensiva que resultan de suponer que la mujer A es la verdadera madre y que la mujer B es la verdadera madre.

2. Calcular el equilibrio perfecto en subjuegos de cada juego.

3. A pesar de que el Rey no sabe cuál es el juego en forma extensiva que se está jugando, logra él con este mecanismo entregarle el bebé a la verdadera madre?

4. Tiene este juego otro equilibrio que no sean perfecto en subjuegos?