Aplicaciones Juegos Estratégicos Información Completa[1]

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes y Quantil

Febrero 2024

[1] Basado en Riascos, A. 2022. Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones. www.alvaroriascos.com

Contenido

1. Cournot
2. Bertrand
3. Restricciones de capacidad
4. Aplicaciones al Aprendizaje de Máquinas

Contenido

1. Cournot
2. Bertrand
3. Restricciones de capacidad
4. Aplicaciones al Aprendizaje de Máquinas

Cournot

- Supongamos que n firmas que producen un único bien homogéneo, las firmas son heterogéneas en costos y no tienen restricciones de capacidad.
- $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la demanda agregada y suponemos que satisface la ley de la demanda.
- La función inversa la denotamos por $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- suponemos que cada firma tiene una función de costos creciente $C_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Cournot

- El pago neto es $\Pi_i(q_i, q_{-i}) = P(Q)q_i - C_i(q_i)$.
- En un equilibrio de Nash (interior) $(q_1^*, ..., q_n^*)$, donde q_i es la oferta de la firma i, se cumple:

$$C_i'(q_i^*) - P(Q^*) = P'(Q^*)q_i^* \tag{1}$$

- Esto es es equivalente a:

$$\frac{P(Q^*) - C_i'(q_i^*)}{P(Q^*)} = \frac{-P'(Q^*)}{P(Q^*)} q_i^* = \frac{-1}{\varepsilon(P(Q^*))} \frac{q_i^*}{Q^*}$$

donde ε denota la elasticidad de la demanda agregada.

Cournot

- Esto muestra que el markup depende de:
  1. La elasticidad de la demanda con respecto al precio (entre más inelástica mayor la diferencia).
  2. La participación de mercado $\frac{q_i^*}{Q^*}$ de la firma.

Cournot: Aplicación sector eléctrico

- Demanda inelástica, concentración de mercado y costos de almacenamiento.
- Índice de oferta residual (IOR):

$$IOR_i = \frac{\sum_j Q_j - Q_i}{Q}$$

Q_k es la oferta (declarada) del recurso k, $\sum_j Q_j$ es la capacidad total del sistema y Q es la demanda. Vamos a utilizar el Índice de Oferta Residual (IOR) por firma por hora.

IOR vs. Agente Pivotal

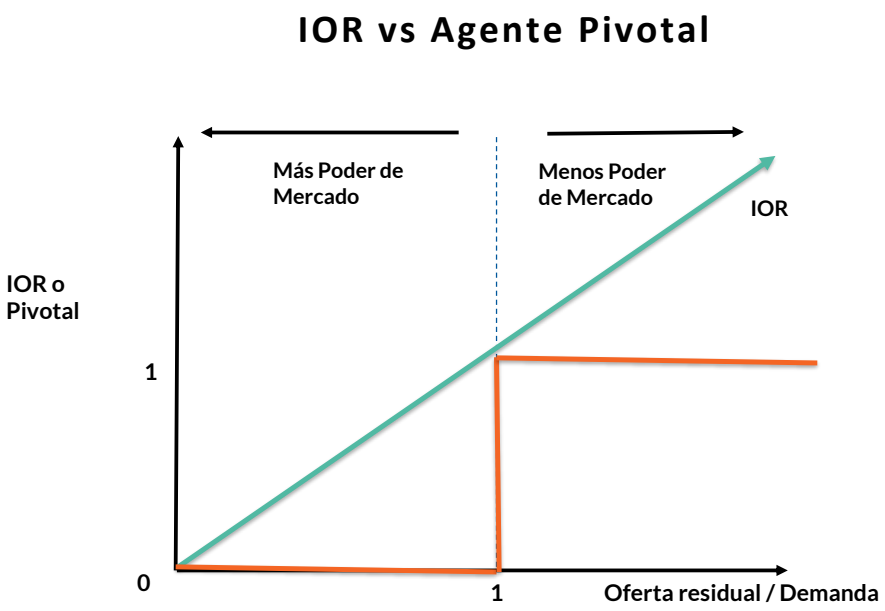


Figura: El IOR_i mide qué tan relevante es la oferta del agente i en la oferta total

IOR: Proporción Horas por Recurso

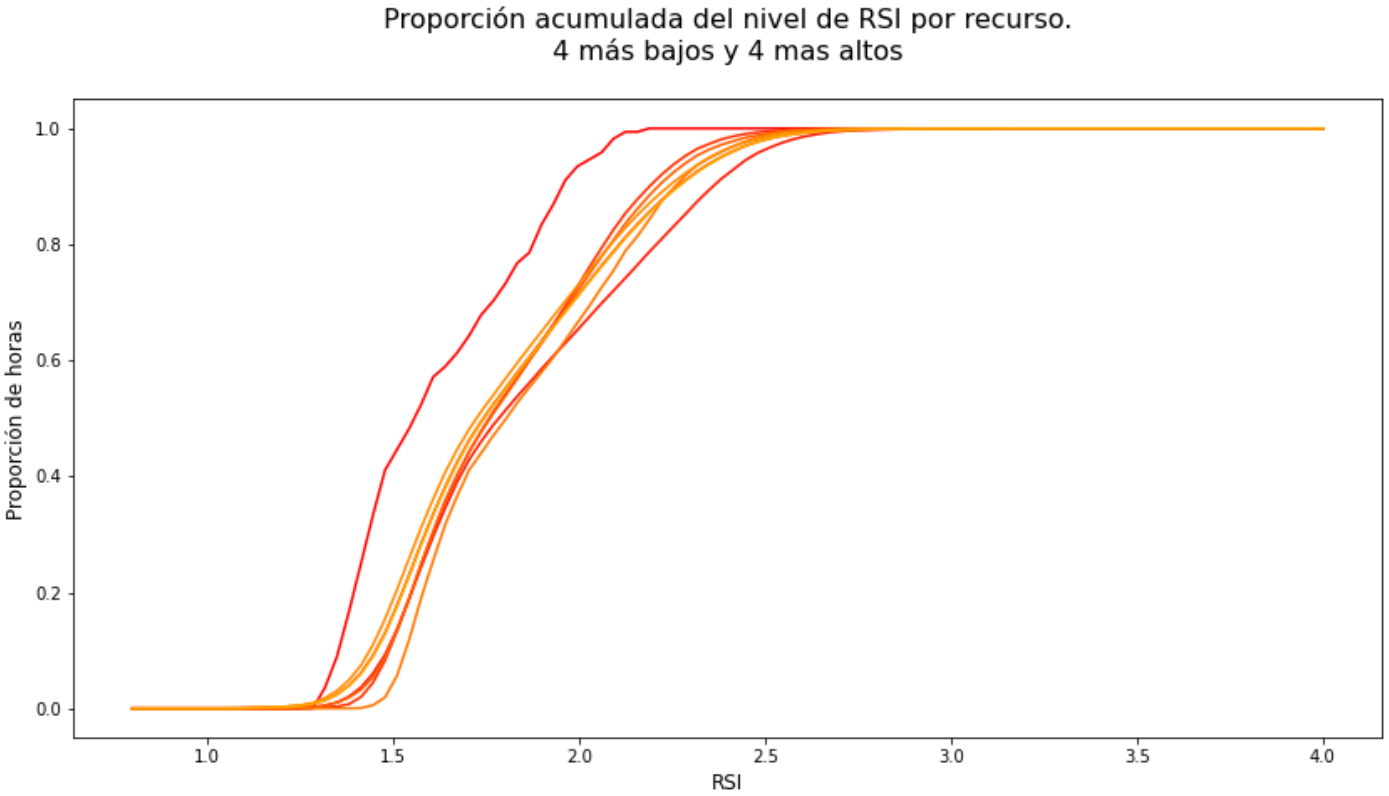


Figura: *IOR* por recurso. Fuente: XM. Cálculos del autor.

IOR: Proporción Horas por Agente

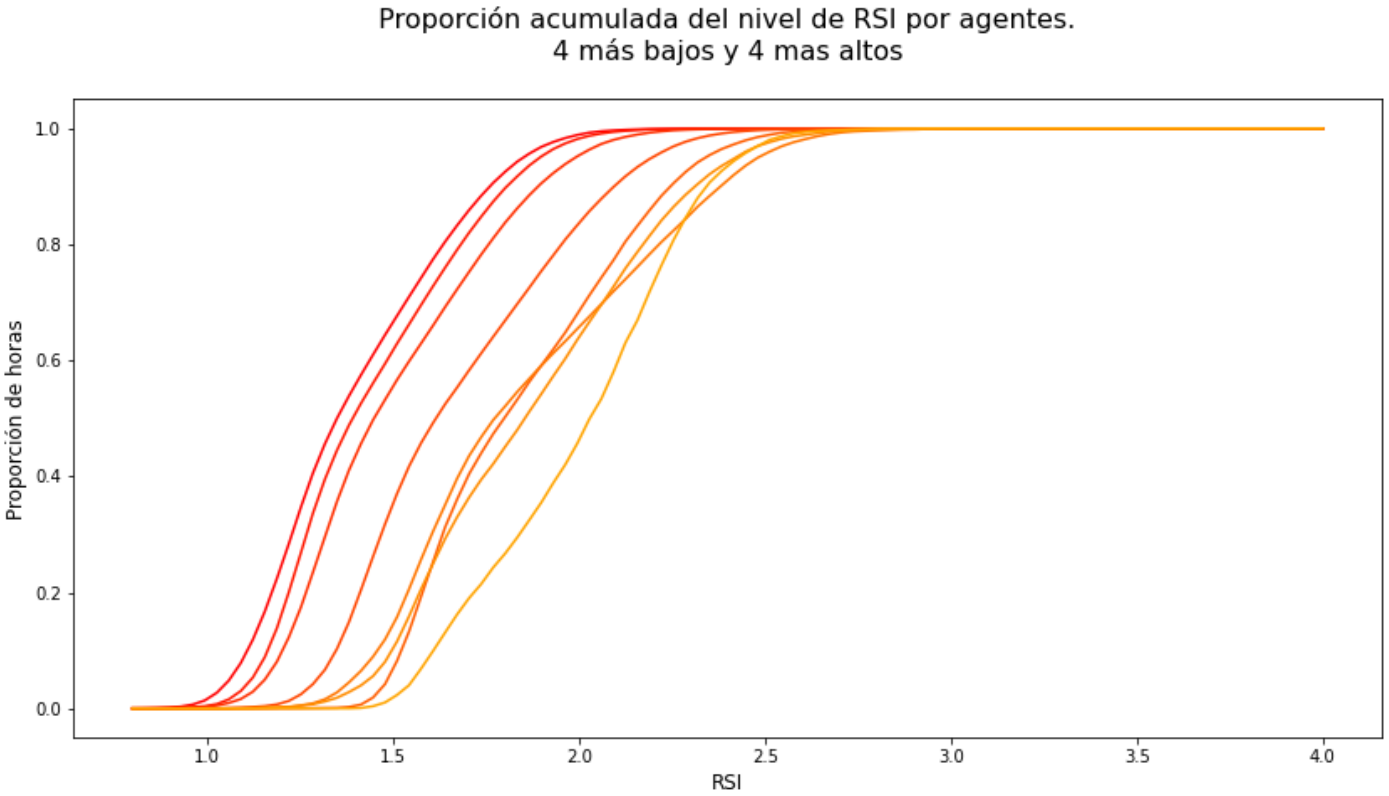


Figura: *IOR* por agentes. Fuente: XM. Cálculos del autor.

IOR: Proporción Horas por Agente Horas Pico vs Valle

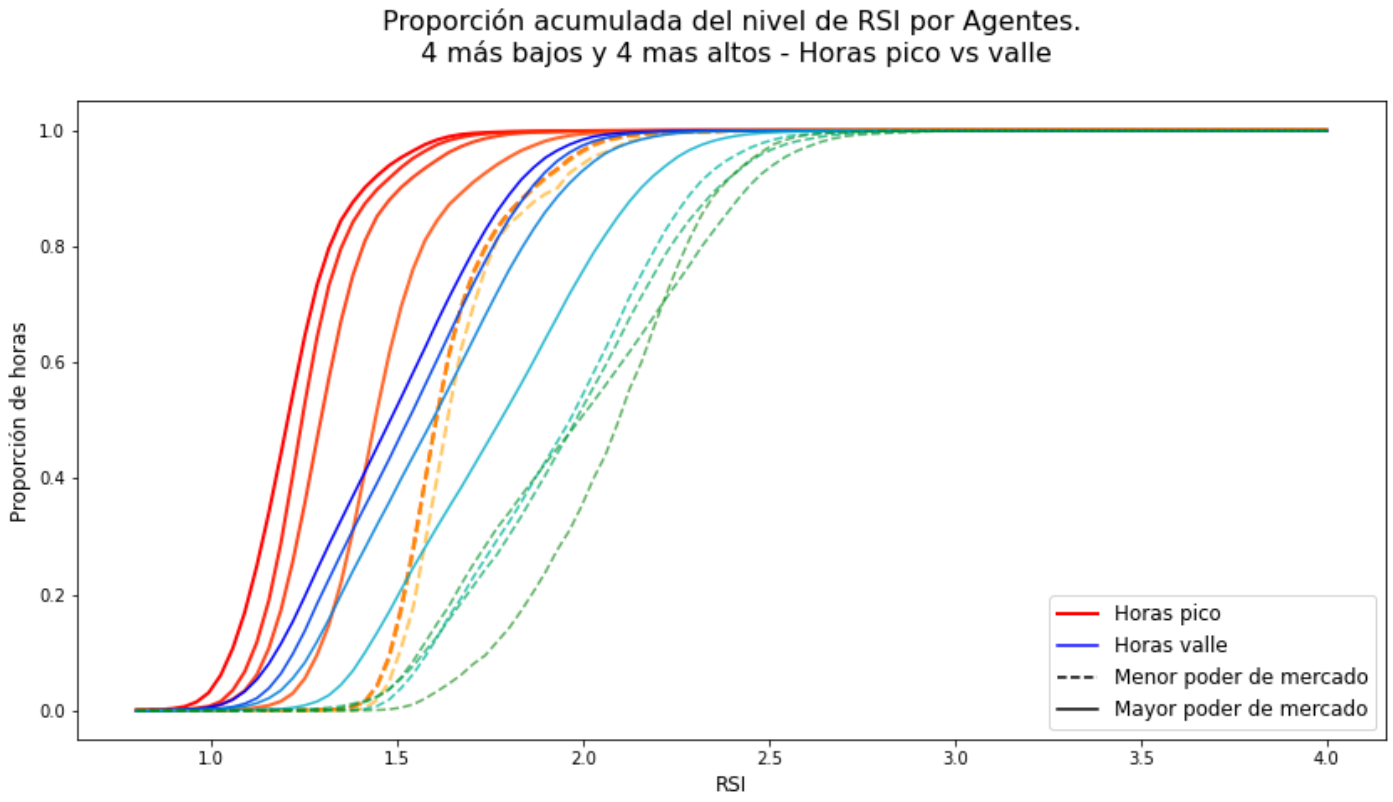


Figura: *IOR* por agentes horas pico vs. valle. Fuente: XM. Cálculos del autor.

Impacto: Resultados Validación Markups y contratos

- La teoría económica sugiere que el *IOR* refleja poder de mercado.
- Volviendo al modelo de Cournot, en equilibrio no es difícil ver que el IOR_i esta relacionado con el *Markup* de acuerdo a la siguiente relación:

$$Markup \equiv \frac{P - CM_i}{P} = -\frac{1}{\epsilon}(1 + (\frac{1}{Q} \sum_{j \text{ recurso no despachado}} Q_j) - IOR_i)$$

Impacto: Resultados Validación Markups y contratos

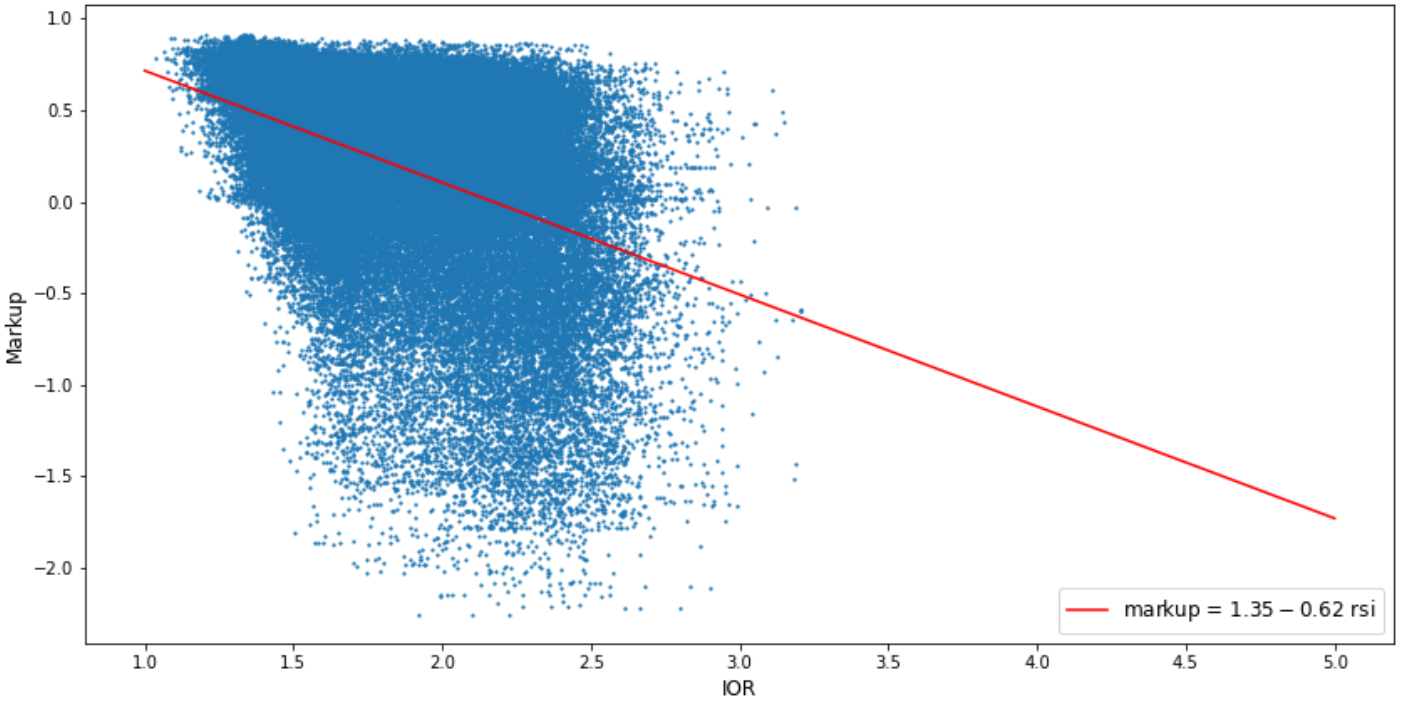


Figura: Relación entre el *markup* y el *IOR*. Fuente: XM. Cálculos del autor.

Impacto: Resultados Validación Markups y contratos

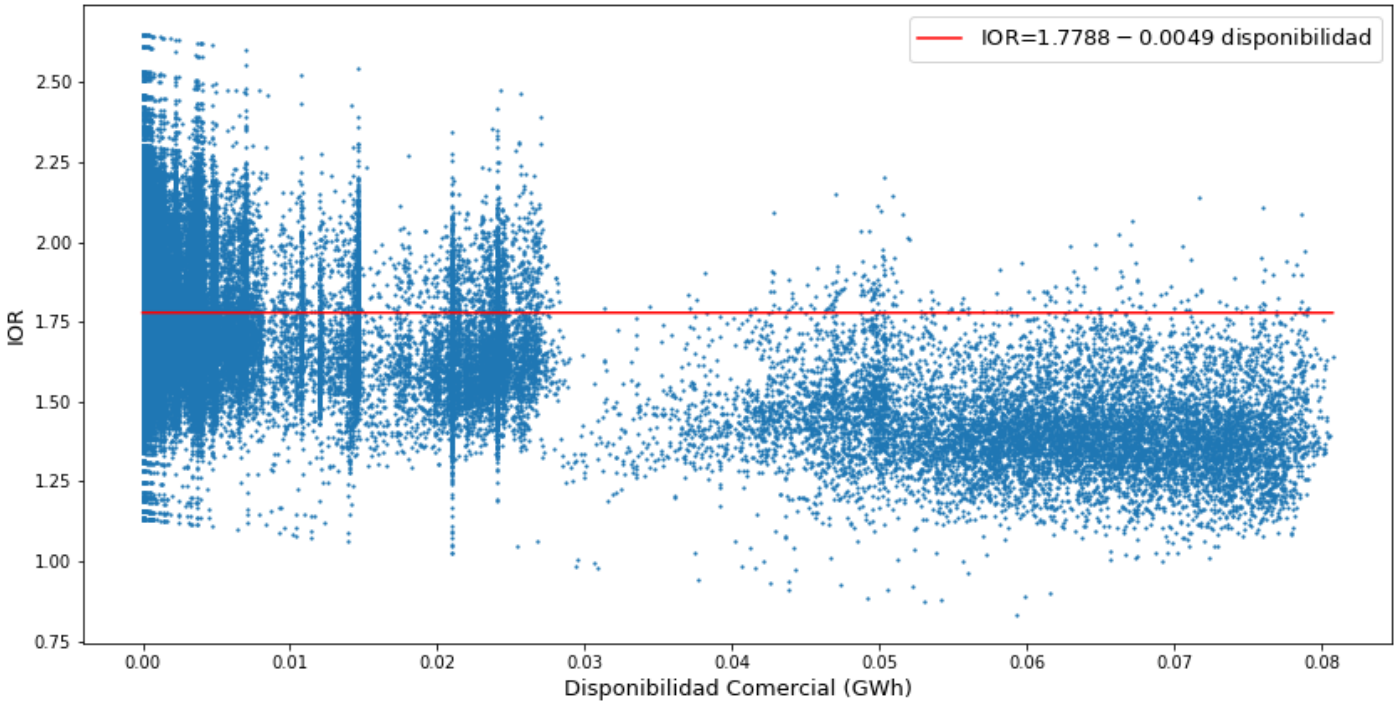


Figura: Relación entre el *IOR* y disponibilidad comercial. Fuente: XM. Cálculos del autor.

- Alternativamente, más energía contratada menos poder de mercado (i.e., menor disponibilidad, menos poder de mercado mayor el IOR).

Contenido

1. Cournot
2. Bertrand
3. Restricciones de capacidad
4. Aplicaciones al Aprendizaje de Máquinas

Bertrand

- Competencia en precios.
- En el modelo de oligopolio de Bertrand consideramos el caso en el que el bien es homogéneo y las firmas son simétricas. En particular vamos a suponer que las firmas tienen costos marginales constantes e iguales entre si.
- El equilibrio coincide con el equilibrio en competencia perfecta y todas las firmas tienen beneficios cero. En caso de empate las firmas se reparten el mercado en la misma proporción.
- existen infinitos equilibrios de Nash y un solo equilibrio de Nash simétrico.
- El resultado no depende de si existen costos fijos o no.

Contenido

1. Cournot
2. Bertrand
3. Restricciones de capacidad
4. Aplicaciones al Aprendizaje de Máquinas

Mecanismo de cesiones y compensaciones

- Estudiamos los efectos de cierto tipo de mecanismos de sesiones y compensaciones en un mercado de commodities.
- Este es un modelo simplificado del mercado del azúcar o el aceite de palma en Colombia.
- Supongamos que n productores venden un producto homogéneo, costos de producción son cero y existen dos mercados para el producto: un mercado interno y un mercado externo. En ambos la demanda es inelástica.
- Sea D la demanda interna por el bien, la demanda externa es residual, todo lo que no se venda internamente se vende en el mercado externo a un precio p^E. Sea p_i^M el precio de venta que fija el productor i en el mercado interno. Definimos $\theta(p^M) = \text{mín}\{p_1^M, ...p_n^M\}$ donde n es el número de productores.

Mecanismo de cesiones y compensaciones

- La capacidad de producción de las firmas la denotamos por Q_i y su producción destinada a atender el mercado interno la denotamos por $q_i(p^M)$.
- Sea $x = \frac{D}{\sum_{i=1}^{n} Q_i}$ la proporción de la capacidad de producción total que representa la demanda interna y
- $x_i(p^M) = \frac{q_i(p^M)}{Q_i}$ la proporción de la producción total de la firma i que se vende en el mercado interno.

Mecanismo de cesiones y compensaciones

- Los beneficios de la firmas son:

$$\pi_i = p^E \times Q_i, \ si \ p_i^M > \theta(p^M) \tag{2}$$

$$\pi_i = \theta(p^M) \times x_i(p^M) Q_i + p^E \times (1 - x_i(p^M)) Q_i, \ si \ p_i^M = \theta(p^M) \tag{3}$$

Mecanismo de cesiones y compensaciones

- Ahora, obsérvese que los beneficios de las firmas se pueden reescribir como:

$$\pi_i = p^E \times Q_i, \ si \ p_i^M > \theta(p^M) \tag{4}$$

$$\pi_i = (\theta(p^M) - p^E) \times x_i(p^M) Q_i + p^E \times Q_i, \ si \ p_i^M = \theta(p^M) \tag{5}$$

Mecanismo de cesiones y compensaciones: Sin mecanismo

- El equilibrio de Bertrand en este caso es $\theta(p^M) = p^E$ (recuerde que la oferta es mayor que la demanda interna).

Mecanismo de cesiones y compensaciones: Sin mecanismo y con aranceles

- Ahora, suponga que existe la posibilidad de importar el bien a un precio $p^I > p^E$ (debido a aranceles que buscan proteger el sector). Es claro que, debido a que la oferta es mayor a la demanda interna, los aranceles no tiene ningún efecto sobre el equilibrio. Este sigue siendo $\theta(p^M) = p^E$.

Mecanismo de cesiones y compensaciones

- Ahora suponga que los productores crean un mecanismo de sesiones y compensaciones que, utilizando las cantidades vendidas por cada productor (reportadas por estos y debidamente auditadas) y los precios de exportación e importación (públicamente disponibles), hacen las siguientes transferencias a cada productor:

$$(p^I - p^E) \times xQ_i, \ si \ p_i^M > \theta(p^M) \tag{6}$$

$$(p^I - p^E) \times (x - x_i(p^M))Q_i, \ si \ p_i^M = \theta(p^M) \tag{7}$$

Mecanismo de cesiones y compensaciones

- Después de recibir las transferencias los beneficios de las empresas son,

$$\overline{p}Q_i, \ si \ p_i^M > \theta(p^M) \quad (8)$$

$$(\theta(p^M) - p^I) \times x_i(p^M)Q_i + \overline{p}Q_i, \ si \ p_i^M = \theta(p^M) \quad (9)$$

donde $\overline{p} = p^I \frac{D}{Q} + p^E \times (1 - \frac{D}{Q})$ y Q es la capacidad total de producción de las firmas.

Mecanismo de cesiones y compensaciones

- En equilibrio $\theta(p^M) = p^I$.
- Los beneficios de equilibrio son $\overline{p}Q_i$ para todas las firmas (vendan o no internamente).

Mecanismo de cesiones y compensaciones

- El mecanismo de sesiones y compensaciones logra sostener un precio interno más alto que en ausencia del mecanismo.

Contenido

1. Cournot
2. Bertrand
3. Restricciones de capacidad
4. Aplicaciones al Aprendizaje de Máquinas

Redes Adversarias Generativas

- Sea p_{datos} la verdadera distribución de los datos en un espacio x (i.e., distribución del ingreso de los colombianos).
- Sea p_g la distribución de un generador de datos en el espacio x (i.e., se generan datos del ingreso de los colombianos a partir de unas encuestas o usando un modelo generador como una red neuronal que requiere un input).
- Considere como generador de los datos en x un red neuronal G que toma valores en z y genera valores x (los valores z se generan con una distribución conveniente p_z).
- Sea D una función de aprendizaje (discriminador) que toma x y arroja la probabilidad $D(x)$ de que los datos vengan de p_{datos} (i.e., $1 - D(x)$ es la probabilidad de que sean generados por p_g).

Redes Adversarias Generativas

- Se entrena el discriminador D para maximizar la probabilidad de asignar la marca correcta de los ejemplos x y minimizar la posibilidad de que marcar de forma equivocada ejemplos del generador G como verdaderos:

$$\max_{D} \; \mathbb{E}_{x \sim p_{\text{data}}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z \sim p_z(z)}[\log(1 - D(G(z)))]$$

- Simútaneamente, se entrena el generador G para minimizar que los ejemplos generados por G sean detectados por D:

$$\min_{G} \; \mathbb{E}_{z \sim p_z(z)}[\log(1 - D(G(z)))]$$

que es equivalente a:

$$\min_{G} \; \mathbb{E}_{x \sim p_{\text{data}}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z \sim p_z(z)}[\log(1 - D(G(z)))]$$

Redes Adversarias Generativas

- Esto sugiere que G y D pueden interpretarse como las acciones de dos jugadores (el generador y el discriminador respectivamente) en un juego de suma cero con función de pagos pago para el jugador D:

$$V(D, G) = \mathbb{E}_{x \sim p_{\text{data}}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z \sim p_z(z)}[\log(1 - D(G(z)))]$$

- Por lo tanto el problema se puede plantear como:

$$\max_D \min_G V(D, G) = \min_G \max_D V(D, G)$$

Redes Adversarias Generativas: Intuición

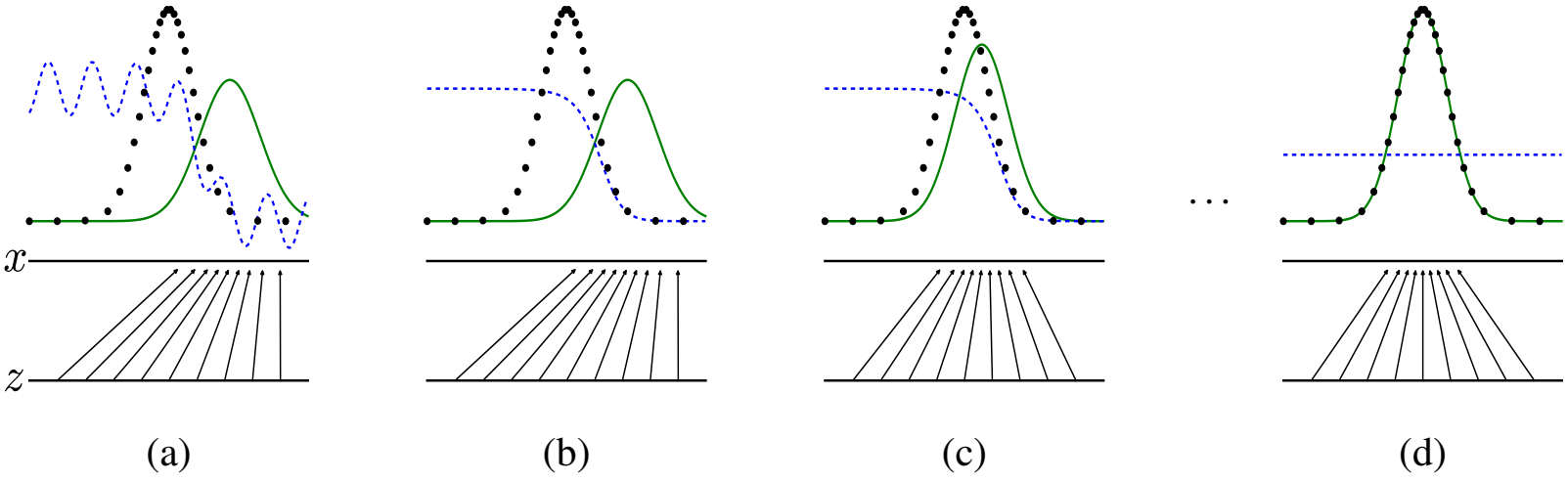
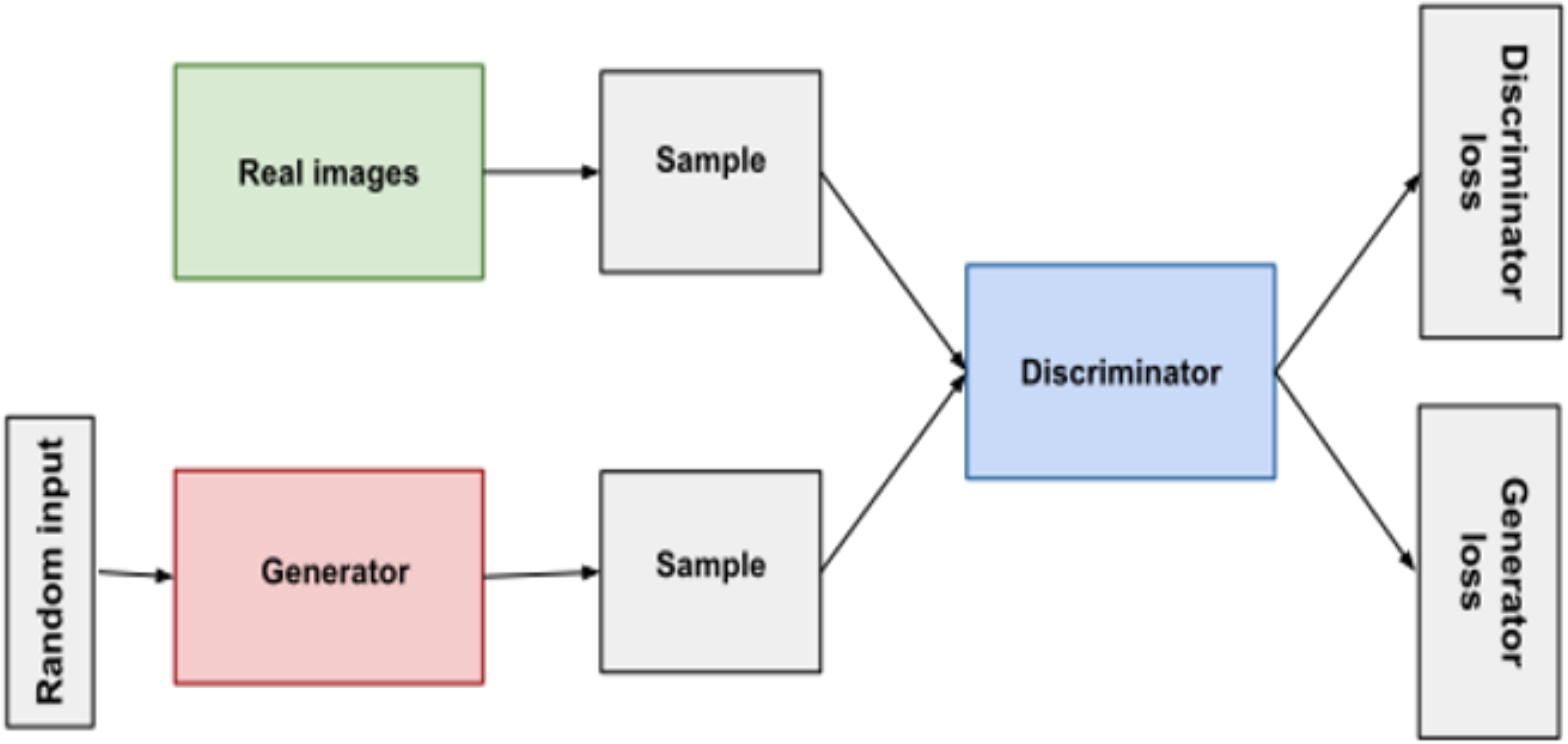


Figure 1: Generative adversarial nets are trained by simultaneously updating the **d**iscriminative distribution (D, blue, dashed line) so that it discriminates between samples from the data generating distribution (black, dotted line) $p_{\boldsymbol{x}}$ from those of the **g**enerative distribution p_g (G) (green, solid line). The lower horizontal line is the domain from which $\boldsymbol{z}$ is sampled, in this case uniformly. The horizontal line above is part of the domain of $\boldsymbol{x}$. The upward arrows show how the mapping $\boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{z})$ imposes the non-uniform distribution p_g on transformed samples. G contracts in regions of high density and expands in regions of low density of p_g. (a) Consider an adversarial pair near convergence: p_g is similar to p_{data} and D is a partially accurate classifier. (b) In the inner loop of the algorithm D is trained to discriminate samples from data, converging to $D^*(\boldsymbol{x}) = \frac{p_{\text{data}}(\boldsymbol{x})}{p_{\text{data}}(\boldsymbol{x})+p_g(\boldsymbol{x})}$. (c) After an update to G, gradient of D has guided $G(\boldsymbol{z})$ to flow to regions that are more likely to be classified as data. (d) After several steps of training, if G and D have enough capacity, they will reach a point at which both cannot improve because $p_g = p_{\text{data}}$. The discriminator is unable to differentiate between the two distributions, i.e. $D(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}$.

Redes Adversarias Generativas: Implementación con imágenes



Redes Adversarias Generativas

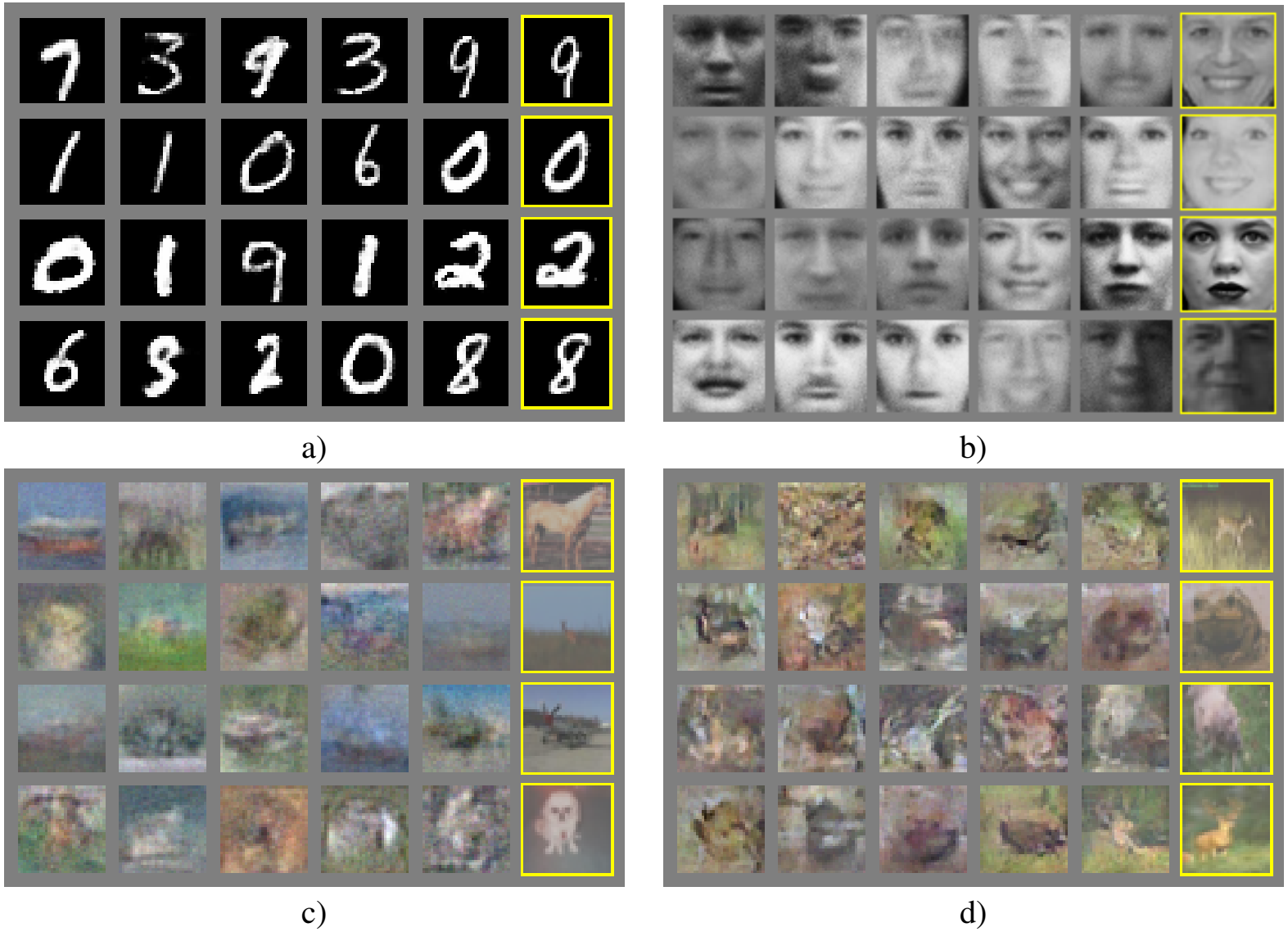


Figure 2: Visualization of samples from the model. Rightmost column shows the nearest training example of the neighboring sample, in order to demonstrate that the model has not memorized the training set. Samples are fair random draws, not cherry-picked. Unlike most other visualizations of deep generative models, these images show actual samples from the model distributions, not conditional means given samples of hidden units.