Capítulo 4

Aplicaciones juegos estáticos

El propósito de este capítulo es presentar algunas aplicaciones de la teoría de juegos introducida hasta este punto. Estas son: la teoría de competencia imperfecta entre firmas (monopolio y oligopolio), la provisión de bienes públicos, el problema de implementación o diseño institucional, la teoría de redes y el problema de existencia del equilibrio walrasiano en una economía de intercambio con infinitos agentes.

4.1. Oligopolio

Supongamos que hay n firmas que producen un único bien homogéneo. Las firmas son heterogéneas en costos y no tienen restricciones de capacidad. Vamos a denotar con $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la demanda agregada y supondremos que esta satisface la ley de la demanda. La función de demanda inversa la denotamos por $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Adicionalmente, suponemos que cada firma tiene una función de costos creciente $C_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

4.1.1. Cournot

Para modelar el problema de oligopolio según Cournot, vamos a definir el conjunto de estrategias de cada firma como los niveles de producción q_i. El pago neto es $\Pi_i(q_i, q_{-i}) = P(Q)q_i - C_i(q_i)$, donde Q es la oferta total que, en equilibrio, se agota completamente en el mercado.

En un equilibrio de Nash (interior) $(q_1^*, ..., q_n^*)$, donde q_i es la oferta de la firma i, se cumple:

$$C_i'(q_i^*) - P(Q^*) = P'(Q^*)q_i^*$$

donde $Q^* = \sum_{i=1}^{n} q_i$. Esto es es equivalente a:

$$\frac{P(Q^*) - C_i'(q_i^*)}{P(Q^*)} = \frac{-P'(Q^*)}{P(Q^*)}q_i^* = \frac{-1}{\varepsilon(P(Q^*))}\frac{q_i^*}{Q^*}$$

donde ε denota la elasticidad de la demanda agregada.

Obsérvese que competencia perfecta es un caso particular de competencia a la Cournot donde la demanda agregada es perfectamente elástica ($\varepsilon(P(Q^*))$ es infinito). Notemos entonces que la diferencia entre costo marginal y el precio de equilibrio depende de:

1. La elasticidad de la demanda con respecto al precio (entre más inelástica mayor la diferencia).

2. La participación de mercado $\frac{q_i^*}{Q^*}$ de la firma.

Las consideraciones anteriores las podemos resumir en la siguiente relación. Sea $\alpha_i^* = \frac{q_i^*}{Q^*}$ la participación del mercado de cada firma y definamos el índice de Lerner L como:

$$L(q^*) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \frac{P(Q^*) - C_i'(q_i^*)}{P(Q^*)}.$$

Esta es una medida ponderada de las desviaciones de competencia perfecta.

Definimos el índice de Herfindhal H como:

$$H(\alpha^*) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{*2}$$

y la elasticidad de la demanda agregada inversa como λ como:

$$\lambda(Q) = -P'(Q)\frac{Q}{P}.$$

Ejercicio 4.1. Demuestre que $\lambda(Q) = \frac{1}{\varepsilon(P(Q))}$.

Entonces es fácil demostrar que:

$$L(q^*) = \lambda(Q^*)H(\alpha^*)$$

Obsérvese que $H(\alpha^*)$ es un índice de concentración de mercado (su máximo se alcanza cuando para algún i, $\alpha_i^* = 1$). En conclusión, entre más inelástica sea la función de demanda (o más elástica sea la función de demanda inversa) y exista mayor concentración de mercado, mayor es la desviación del equilibrio competitivo. El resultado anterior se obtuvo bajo la hipótesis de homogeneidad del bien producido, más no de las firmas que lo producen.

Ejercicio 4.2. Demuestre que el índice $H(\alpha^*)$ alcanza su valor máximo cuando para un i, $\alpha_i^* = 1$.

En el caso de un duopolio, si adicionalmente suponemos que las firmas son homogéneas, costos marginales constantes y demanda agregada lineal, el equilibrio de Nash es una predicción muy bien fundada pues es el único resultado de la eliminación iterativa de estrategias dominadas, luego es un equilibrio de Nash y, además, es único. Es decir, un duopolio á la Cournot es un juego solucionable en estrategias que sobreviven la eliminación iterativa de estrategias dominadas. [1]

Ejemplo 4.3. Supongamos que J firmas idénticas compiten en un mercado por un bien homogéneo. Vamos a suponer que sus costos marginales son constantes:

$$C(q^j) = cq^j \tag{4.1}$$

donde $c \geq 0$ y q^j es el nivel de producción de la firma j.

Supongamos que la demanda agregada inversa es lineal y la podemos escribir como:

$$p = a - b\sum_{j=1}^{J} q^j \tag{4.2}$$

donde a y b son positivos. Por lo tanto, los beneficios de una firma j son:

$$\Pi^j(q^1, ...q^J) = \left(a - b\sum_{j=1}^{J} q^j\right) q^j - cq^j. \tag{4.3}$$

Maximizando el beneficio de la firma j respecto a q^j, obtenemos que el equilibrio de Nash (Cournot - Nash) de este juego es:

$$q^j = q = \frac{a-c}{b(J+1)}. \tag{4.4}$$

[1] Véase Vega-Redondo, F. (2003). Economics and the Theory of Games. Páginas 76-78

Esto implica que los valores de equilibrio de la demanda (oferta) agregada, precio y beneficios son respectivamente:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} q^j &= \frac{J\,(a-c)}{b(J+1)} \\
c &< p = a - J\frac{a-c}{(J+1)} < a \\
\Pi^j &= \frac{(a-c)^2}{b(J+1)^2}
\end{aligned}
$$

Vale la pena resaltar que cuando $J = 1$ tenemos el caso de una firma monopolista y cuando $J \to \infty$ obtenemos competencia perfecta.

Ejercicio 4.4. Competencia imperfecta, costos de entrada y el número de firmas en la industria[2]. Supongamos que J firmas idénticas compiten en un mercado por un bien homogéneo.

Vamos a suponer que los costos de las firmas son:

$$c(q^j) = cq^j + F \tag{4.5}$$

donde $c \geq 0$ y q^j es el nivel de producción de la firma j y F es un costo fijo.

Supongamos que la demanda agregada inversa es lineal y la podemos escribir como:

$$p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} q^j \tag{4.6}$$

Por lo tanto, los beneficios de una firma j son:

$$\Pi^j(q^1, ...q^J) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} q^j\right) q^j - cq^j - F. \tag{4.7}$$

1. Calcule el equilibrio (simétrico) de Nash en competencia a la Cournot.
2. Calcule los beneficios individuales en equilibrio de cada firma y los beneficios agregados.
3. Muestre que la agregación de los beneficios de las firmas disminuye con el número de firmas.

[2]Tomado de Motta, M. (2004). Competition Theory and Policy. Page 54

4. ¿Cuál es su interpretación de este fenómeno?

Ejercicio 4.5. Competencia por la extracción de rentas de un mercado.[3] Considere n firmas idénticas que compiten por obtener el derecho a explotar como un monopolio un mercado específico. Cada firma decide de forma simultánea su gasto x_i para ganarse el derecho. La probabilidad de ganarse el derecho es $\frac{x_i}{\sum_{j=1,\ldots n} x_j}$. Sea Π (i.e., esta es una constante y su valor no importa para los fines del ejercicio) las rentas monopolístas en caso de obtener el derecho a explotar el mercado. Entonces el pago esperado π_i de la firma i es:

$$\pi_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1,\ldots n} x_j}\Pi - x_i$$

1. Encuentre el equilibrio de Nash simétrico (i.e., las acciones de cada firma son elegir x_i).
2. Calcule el beneficio esperado de cada firma en equilibrio.
3. Muestre que cuando n tiende a infinito el gasto agregado hecho por todas las empresas es igual al beneficio del monopolista Π.

4.1.2. Aplicación al sector eléctrico colombiano

La liberalización del sector eléctrico Colombiano ha tenido como uno de sus principales propósitos promover la eficiencia de la prestación de un servicio esencial para la sociedad de forma confiable y con calidad. Desde un punto de vista económico, en mercados descentralizados la prescripción normativa para ser eficientes es promover la competencia (i.e., mitigar el poder de mercado). El problema es cómo garantizar una operación eficiente en un mercado con la características propias del mercado eléctrico: demanda inelástica, concentración de mercado, altos costos de almacenamiento, etc.

Una forma de racionalizar las dificultades que estas características del mercado imponen al propósito de producir de forma eficiente es utilizando el modelo de Cournot. En un mercado con pocas firmas que producen un bien homogéneo y sin restricciones de capacidad, en competencia a la Cournot, el

[3] Tomado de Motta, M. (2004). Competition Theory and Policy. Página 89.

equilibrio de Nash - Cournot satisface:

$$Markup \equiv \frac{P - CM_i}{P} = -\frac{1}{\epsilon}\frac{Q_i}{Q}$$

donde CM_i es el costo marginal del recurso de generación i, P es el precio de venta (i.e., precio de bolsa), ϵ es la elasticidad de la demanda agregada del mercado, Q_i es la disponibilidad declarada del recurso i y Q la demanda agregada. Como puede observarse de esta ecuación, entre menor es la elasticidad de la demanda o mayor es la participación de una firma en el mercado, mayor es el markup (el precio de venta de la energía por encima de sus costos marginales). Las implicaciones de no poder almacenar la energía de forma eficiente también pueden intuirse de esta ecuación. En equilibrio, Q es igual a la oferta agregada y, por lo tanto, ante una restricción de la oferta (voluntaria o no) o bien la demanda tiene que ajustarse, aumentando el poder de mercado de algunos recursos, o la energía almacenada se utiliza para suplir la deficiencia en la oferta. Dado que este segundo escenario es muy costoso, la consecuencia de no poder almacenar la energía implica que algunos agentes tienen mayor poder de mercado.[4]

Ahora, en el sector eléctrico no es fácil observar los costos marginales de los recursos generadores. Luego, una forma de estimar el poder de mercado es estudiando las participaciones de los participantes y las elasticidades. En esta sección vamos a profundizar y enriquecer el cálculo de las participaciones con el fin de entender mejor el poder de mercado en el sector eléctrico.

Para esto vamos a introducir el Índice de Oferta Residual (IOR):

$$IOR_i = \frac{\sum_j Q_j - Q_i}{Q}$$

Q_k es la oferta (declarada) del recurso k y Q es la demanda. Vamos a utilizar el IOR por firma por hora.

Ahora, la teoría económica sugiere que el IOR es un reflejo del poder de mercado. Volviendo al modelo de Cournot, no es difícil ver que en equilibrio el IOR_i esta relacionado con el *Markup* de acuerdo a la siguiente relación:

$$Markup \equiv \frac{P - CM_i}{P} = -\frac{1}{\epsilon}\left(1 + \frac{1}{Q}\sum_{j \text{ recurso no despachado}} Q_j - IOR_i\right)$$

[4]En sistemas con un componente importante de energía hídrica, los embalses pueden considerarse una forma de almacenamiento. Sin embargo, en situaciones criticas de escasez de agua su capacidad de mitigar este riesgo de ejercer poder de mercado es menor.

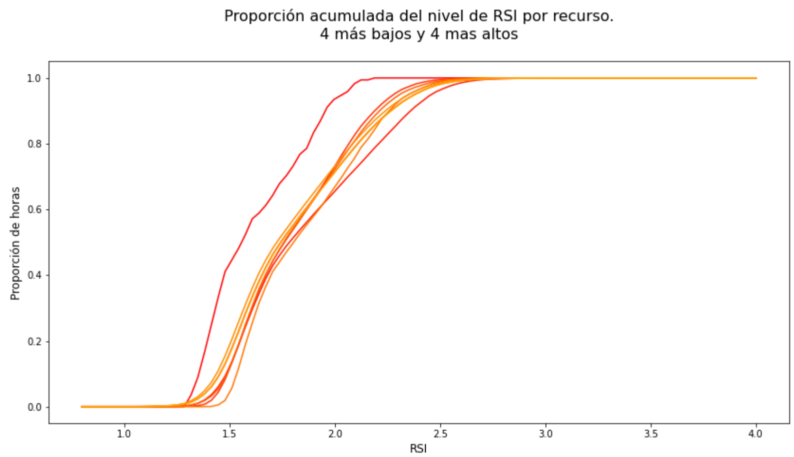


Figura 4.1: IOR por recurso. Fuente: XM. Cálculos del autor.

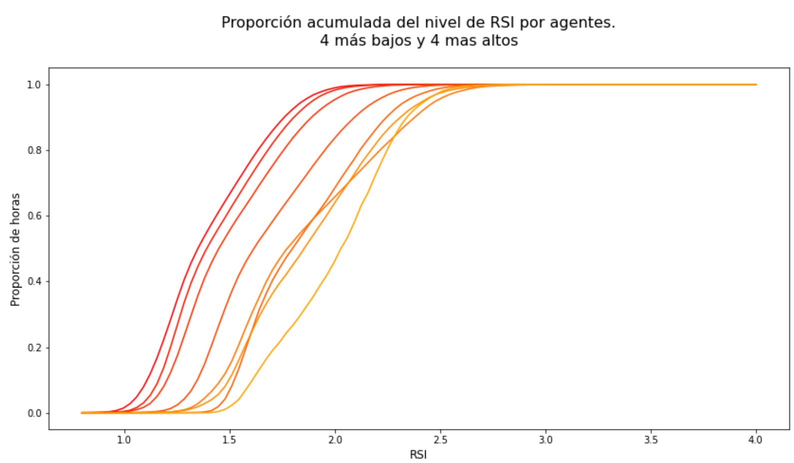


Figura 4.2: IOR por agentes. Fuente: XM. Cálculos del autor.

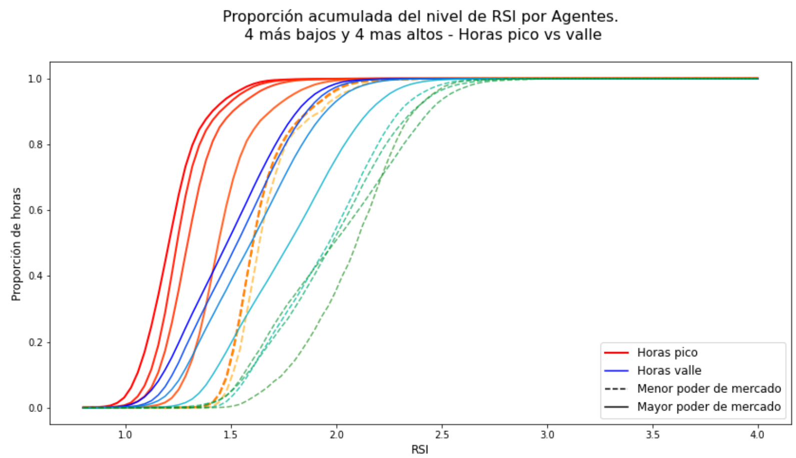


Figura 4.3: IOR por agentes horas pico vs. valle. Fuente: XM. Cálculos del autor.

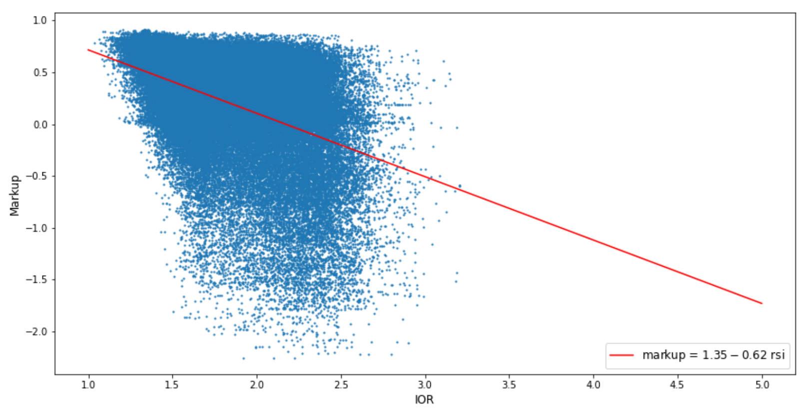


Figura 4.4: Relación entre el *markup* y el IOR. Fuente: XM. Cálculos del autor.

Las siguientes gráficas validan la utilización del IOR como una aproximación a los markups.

Alternativamente, podemos interpretar la anterior gráfica como sigue. Más energía contratada implica menos poder de mercado (i.e., menor disponibilidad, menos poder de mercado mayor el IOR).

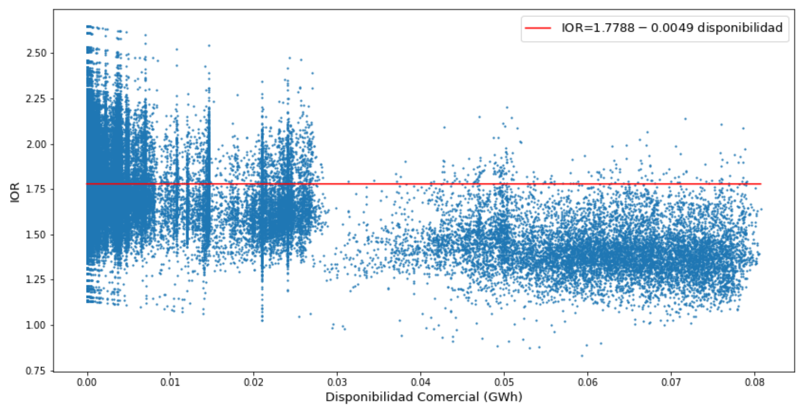


Figura 4.5: Relación entre el IOR y disponibilidad comercial. Fuente: XM. Cálculos del autor.

4.1.3. Bertrand: Bienes homogéneos

En el modelo de oligopolio de Bertrand consideramos el caso en el que el bien es homogéneo y las firmas son simétricas. En particular, vamos a suponer que las firmas tienen costos marginales constantes e iguales entre si.

En el contexto del modelo anterior, si las firmas compiten en precios entonces el equilibrio coincide con el equilibrio en competencia perfecta y todas las firmas tienen beneficios cero. En caso de empate las firmas se reparten el mercado en la misma proporción. Para ver esto, primero obsérvese que si el menor precio ofertado es inferior al costo marginal este no puede ser un equilibrio de Nash. Ahora, suponga que el menor precio ofertado es estrictamente superior al costo marginal (y la función de demanda agregada es continua). Es fácil ver que existe por lo menos una firma que no está atendiendo toda la demanda: o bien es una firma que no está ofreciendo el menor precio o bien es una firma que está ofreciendo el menor precio pero debe compartir el mercado con otra que también ha ofrecido el menor precio.

Es claro que esta firma (que no atiende todo el mercado) tiene incentivos a desviarse (una reducción suficientemente pequeña del precio mínimo ofertado por todas las firmas resulta en un aumento de su beneficio). Luego, el precio de equilibrio debe ser igual al costo marginal. Finalmente, no es difícil verificar que si por lo menos una firma oferta el costo marginal entonces este es un equilibrio de Nash.

Ejercicio 4.6. Demuestre que en el modelo anterior de competencia a la Bertrand existen infinitos equilibrios de Nash y un solo equilibrio de Nash simétrico.

4.1.4. Bertrand: Bienes no homogéneos

Ahora relajemos únicamente el supuesto de bienes homogéneos. Supongamos que tenemos dos firmas simétricas que producen dos bienes diferenciados pero con los mismos costos marginales de producción. Una forma común de clasificar las diferentes formas de diferenciación de los bienes es clasificarlas en diferenciación horizontal o vertical. Decimos que hay diferenciación horizontal cuando de dos bienes con el mismo precio se demandan ambos. Esto suele suceder cuando lo bienes son complementarios o tiene características observables distintas que los hacen claramente diferentes. Decimos que la diferenciación es vertical cuando de bienes con el mismo precio se demanda solo uno de ellos. Esto suele suceder cuando algunas características no observables, como la calidad del bien, o durabilidad del mismo, son distintas. En esta sección vamos a considerar bienes diferenciados horizontalmente.

Las funciones de costos son:

$$C_i(q_i) = cq_i$$

La función inversa de demanda de cada producto es de la forma:

$$P_i\left(q_1, q_2\right) = \text{máx}\{0, M - q_i - bq_j\},\ i, j = 1, 2\ i \neq j$$

lo cual refleja que los productos son percibidos como distintos por los consumidores y las demandas no son independientes.

Las funciones de demanda son:

$$D_i\left(p_1, p_2\right) = \text{máx}\{0, \frac{M}{1+b} - \frac{1}{1-b^2}p_i + \frac{b}{1-b^2}p_j\}$$

El parámetro b refleja el grado de sustitución entre los dos bienes. El pago neto de cada jugador es:

$$\pi_i\left(p_1, p_2\right) = (p_i - c)\,\text{máx}\{0, \frac{M}{1+b} - \frac{1}{1-b^2}p_i + \frac{b}{1-b^2}p_j\}$$

Es fácil demostrar que el equilibrio (interior) simétrico es:

$$p_1^* = p_2^* = \frac{M(1-b)}{2-b} + \frac{c}{2-b}.$$

Cuando $b \uparrow 1$ los bienes son menos heterogéneos y el resultado tiende a los precios de competencia perfecta. [5]

4.1.5. Bertrand: Restricciones de capacidad

En esta sección estudiamos los efectos de cierto tipo de mecanismos de sesiones y compensaciones en un mercado de commodities. Este es un modelo simplificado del mercado del azúcar o el aceite de palma en Colombia. Supongamos que n productores venden un producto homogéneo, que los costos de producción son cero y que existen dos mercados para el producto: un mercado interno y un mercado externo. En ambos la demanda es inelástica. Sea D la demanda interna por el bien. Supondremos que la demanda externa es residual, es decir, que todo lo que no se venda internamente se vende en el mercado externo a un precio p^E. Sea p_i^M el precio de venta que fija el productor i en el mercado interno. Definimos $\theta(p^M) = \text{mín}\{p_1^M, ...p_n^M\}$.

La capacidad de producción de las firmas la denotamos por Q_i y su producción destinada a atender el mercado interno la denotamos por $q_i(p^M)$. Sea $x = \frac{D}{\sum_{i=1}^n Q_i}$ la proporción de la capacidad de producción total que representa la demanda interna y $x_i(p^M) = \frac{q_i(p^M)}{Q_i}$ la proporción de la producción total de la firma i que se vende en el mercado interno.

Vamos a suponer que:

1. La oferta es mayor que la demanda interna: $\sum_{i=1}^n Q_i > D$.

2. Ninguna firma es capaz de suplir la totalidad de la demanda interna (i.e., existen restricciones de capacidad).

3. Las firmas que fijan el menor precio participan en el mercado proporcionalmente a su producción.

Con estas hipótesis los beneficios de la firmas son:

$$\pi_i = p^E \times Q_i, \;\; si\ p_i^M > \theta(p^M) \tag{4.8}$$

$$\pi_i = \theta(p^M) \times x_i(p^M)Q_i + p^E \times (1 - x_i(p^M))Q_i, \;\; si\ p_i^M = \theta(p^M) \tag{4.9}$$

Obsérvese que los beneficios de las firmas se pueden reescribir como:

[5] Otro caso interesante para estudiar es cuando existen restricciones de capacidad.

$$\pi_i = p^E \times Q_i,\ \ si\ p_i^M > \theta(p^M) \tag{4.10}$$
$$\pi_i = (\theta(p^M) - p^E) \times x_i(p^M)Q_i + p^E \times Q_i,\ \ si\ p_i^M = \theta(p^M) \tag{4.11}$$

Ejercicio 4.7. Demuestre que el equilibrio de Bertrand en este caso es $\theta(p^M) = p^E$ (recuerde que la oferta es mayor que la demanda interna).

Suponga que existe la posibilidad de importar el bien a un precio $p^I > p^E$ (debido a aranceles que buscan proteger el sector). Es claro que, debido a que la oferta es mayor a la demanda interna, los aranceles no tiene ningún efecto sobre el equilibrio. Este sigue siendo $\theta(p^M) = p^E$.

Suponga entonces que los productores crean un mecanismo de sesiones y compensaciones que, utilizando las cantidades vendidas por cada productor (reportadas por estos y debidamente auditadas) y los precios de exportación e importación (públicamente disponibles), hace las siguientes transferencias a cada productor:

$$(p^I - p^E) \times xQ_i,\ \ si\ p_i^M > \theta(p^M) \tag{4.12}$$
$$(p^I - p^E) \times (x - x_i(p^M))Q_i,\ \ si\ p_i^M = \theta(p^M) \tag{4.13}$$

Después de recibir las transferencias los beneficios de las empresas son,

$$\overline{p}Q_i,\ \ si\ p_i^M > \theta(p^M) \tag{4.14}$$
$$(\theta(p^M) - p^I) \times x_i(p^M)Q_i + \overline{p}Q_i,\ \ si\ p_i^M = \theta(p^M) \tag{4.15}$$

donde $\overline{p} = p^I \frac{D}{Q} + p^E \times (1 - \frac{D}{Q})$ y Q es la capacidad total de producción de las firmas.

Vamos a demostrar que si $\theta(p^M) = p^I$ entonces este es un equilibrio de Nash. Además, los beneficios de equilibrio son $\overline{p}Q_i$ para todas las firmas (vendan o no internamente).

Para ver esto, primero suponga que $\theta(p^M) < p^I$. En este caso las firmas con el menor precio ganan menos que $\overline{p}Q_i$. Una de estas firmas subiendo el precio lograría un beneficio igual a $\overline{p}Q_i$. Suponga en cambio que $\theta(p^M) > p^I$. Como la oferta es superior a la demanda interna, entonces por lo menos una firma no está vendiendo la totalidad de su producción en el mercado interno (i.e., $x_i < 1$). Tome una de estas firmas y cambie el precio p_i^M por

$\theta(p^M) - \epsilon$ donde ϵ es suficientemente pequeño. Entonces su beneficio sería $(\theta(p^M) - p^I - \epsilon)Q_i + \overline{p}Q_i$. Si no cambiara su precio, su beneficio sería $\overline{p}Q_i$ o $(\theta(p^M) - p^I) \times x_i Q_i + \overline{p}Q_i$. Por tanto, si ϵ es lo suficientemente pequeño, y teniendo en cuenta que $x_i < 1$, entonces:

$$\begin{aligned} & \overline{p}Q_i && (4.16)\\ & < (\theta(p^M) - p^I) \times x_i Q_i + \overline{p}Q_i && (4.17)\\ & < (\theta(p^M) - p^I - \epsilon) \times Q_i + \overline{p}Q_i && (4.18) \end{aligned}$$

Luego existirían incentivos unilaterales a desviarse.

En conclusión, $\theta(p^M) = p^I$ es un candidato a equilibrio. Para mostrar que en efecto es un equilibrio vamos a demostrar dos cosas. Que aquellos que empatan en el menor precio no tiene incentivos unilaterales a desviarse y que lo mismo sucede con aquellos que fijan un precio mayor al menor precio. Sea i tal que $p_i^M = \theta(p^M)$. Si i cambia su precio por $\theta(p^M) - \epsilon$ entonces su beneficio después del mecanismo de compensación es:

$$\begin{aligned} & (\theta(p^M) - \epsilon) \times Q_i + (p^I - p^E)(x - 1) && (4.19)\\ & = (\theta(p^M) - p^I - \epsilon + \overline{p}) \times Q_i && (4.20)\\ & = (-\epsilon + \overline{p}) \times Q_i && (4.21) \end{aligned}$$

porque $\theta(p^M) = p^I$. Pero obsérvese que este beneficio es menor que $\overline{p} \times Q_i$, que es el beneficio antes de intentar desviarse de forma unilateral.

Por último, considere un productor que fija precios superiores al precio $\theta(p^M) = p^I$ e intenta desviarse. Si este disminuye su precio hasta igualar el menor precio, sus beneficios no cambian. Y si lo disminuye por debajo del precio p^I sus beneficios disminuyen.

En resumen, el mecanismo de sesiones y compensaciones logra sostener un precio interno más alto que en ausencia del mecanismo y observacionalmente el resultado es como si las firmas actuaran como un monopolio.

Ejercicio 4.8. Planteé el mismo problema del ejemplo anterior y muestre que los resultados siguen siendo válidos aún cuando la demanda doméstica es elástica.

4.1.6. Resumen

A continuación resumimos algunas de las lecciones principales de los modelos de competencia oligopolística estudiados en la secciones anteriores.

Si las firmas producen un bien homogéneo en competencia oligopolística a la Cournot, la desviación de competencia perfecta depende de la elasticidad de la demanda agregada con respecto al precio (entre más inelástica, más poder de mercado) y el nivel de producción de la firma (entre mayor participación, mayor poder de mercado). Una medida de qué tan distante está el mercado de competencia perfecta es el índice de Lerner, el cual es un promedio ponderado de las desviaciones relativas del precio de equilibrio en competencia imperfecta del costo marginal (con respecto al precio de equilibrio) ponderado por la participación de mercado de cada firma. Este se puede expresar como el producto del índice de Herfindahl y la elasticidad de la demanda inversa.

Cuando las firmas producen un bien homogéneo y además sus costos marginales son constantes e iguales entre ellas, competencia a la Bertrand implica que el equilibrio de Nash simétrico coincide con competencia perfecta. Sin embargo, en presencia de restricciones de capacidad puede no existir un equilibrio.

Si los costos marginales no son iguales, con restricciones de capacidad puede no existir un equilibrio. Si las $n-1$ firmas más pequenñas, en términos de capacidad, no pueden atender la totalidad del mercado, no existe necesariamente un equilibrio.

Si los bienes producidos son diferenciados pero los costos marginales son constantes e iguales entre firmas, competencia a la Bertrand implica que el equilibrio se desvía de competencia perfecta. Entre más diferenciados los bienes (menor sustitución entre ellos) más distante es el equilibrio de competencia perfecta.

4.1.7. Cuantificación del daños de prácticas anticompetitivas

La evaluación cuantitativa de daños monetarios provenientes de presuntas prácticas no competitivas es una tarea central en las investigaciones sobre competencia. Para determinar una compensación justa se requiere una estimación del daño. Para esto se requeriría tener información sobre lo que hubiera sucedido en un mundo paralelo en el que no hubieran existido prácticas anticompetitivas. Este escenario es conocido como el contrafactual y dicha información no existe. Es por esto que es necesario utilizar algún modelo que permita reconstruir y describir el escenario contrafactual de la mejor forma. A pesar de la dificultad metodológica para estimarlo con exactitud, distintos métodos económicos han sido desarrollados y utilizados en las cortes para poder cuantificarlo. El grado de complejidad de los modelos y su precisión varía, y se encuentra íntimamente ligado a restricciones de información, tiempo y otros recursos (Komninos, Assimakis; Oxera, 2010).

Antes de presentar las principales técnicas junto con sus ventajas y desventajas se definirá el daño desde el punto de vista económico. Para lograr estimar el daño se debe definir una medida objetiva y rigurosa que permita cuantificarlo monetariamente. Desde el punto de vista económico, el objetivo es la cuantificación del cambio en el bienestar del consumidor. Si se consideran dos restricciones presupuestales (p^0, m^0) y (p^1, m^1) donde p es un vector de precios y m son los ingresos que enfrenta un consumidor en una situación inicial 0 y una posterior 1. Una medida ideal del cambio en bienestar de pasar de la situación 0 a la situación 1 sería la diferencia en las utilidades indirectas, es decir, $v(p^1, m^1) - v(p^0, m^0)$, donde $v(p, m)$ es la función de utilidad indirecta. No obstante la anterior medida de utilidad es sólo ordinal y no permite tener una medida monetaria del cambio en bienestar. Si definimos $u(q, p, m)$ como el ingreso que el consumidor necesitaría con los precios q para tener el mismo bienestar que tendría con los precios p y el ingreso m, podemos medir monetariamente el cambio en bienestar como la diferencia $u(q, p^1, m^1) - u(q, p^0, m^0)$.

La cuestión pendiente es definir cuáles son los precios bases q, para lo que se tiene dos opciones. Una alternativa es tomar los precios iniciales p^0 como base, en cuyo caso se calcularía la variación equivalente, que responde la siguiente pregunta: ¿cuánto es el cambio en ingreso necesario para alcanzar, con los precios iniciales, el bienestar de la situación posterior? En otras palabras, cuánto es lo máximo que un consumidor estaría dispuesto a pagar para evitar el cambio de precios:

$$VE = u(p^0, p^1, m^1) - u(p^0, p^0, m^0)$$

Si se toma como precios base los de la situación posterior p^1, se calcularía la variación compensada, la cual responde la pregunta: ¿cuánto es el cambio en el ingreso necesario para alcanzar, con los precios posteriores, el bienestar de la situación inicial? Alternativamente, cuánto se debe compensar al consumidor por el cambio de precios.

$$VC = u(p^1, p^1, m^1) - u(p^1, p^0, m^0)$$

La medida clásica de cambio en bienestar es el cambio en el excedente del consumidor, que es el área bajo la curva de la demanda Marshalliana $x(p)$ entre los precios p^0 y p^1:

$$\Delta EC = \int_{p^0}^{p^1} x(t)dt \tag{4.22}$$

Es importante notar que las tres medidas son útiles para cuantificar los cambios en el bienestar de los consumidores, pero tienen diferencias conceptuales. Sin embargo, están íntimamente relacionadas pues siempre tienen el mismo signo. Para los bienes normales, aquellos cuya demanda aumenta cuando el ingreso de los consumidores aumenta, se tiene que las tres medidas se relacionan de la siguiente forma:

$$VC \geq \Delta EC \geq VE$$

Teniendo en cuenta lo anterior, para el presente análisis se definiría el mundo observado como la situación 0 y el mundo contrafactual como la situación 1. De esta manera se podría estimar monetariamente el cambio en el bienestar del consumidor utilizando distintas metodologías que se presentarán enseguida. En el ámbito de prácticas anticompetitivas es importante señalar que una de las técnicas más empleadas es utilizar el sobrecosto resultante de la práctica anticompetitiva y multiplicarlo por las unidades que se vendieron, lo que corresponde al rectángulo A de la Ilustración 1. Esta técnica subestima el daño real, pues sólo tiene en cuenta lo que habrían ahorrado quienes efectivamente adquirieron el producto, sin embargo desconoce que a un precio menor se hubiera vendido una mayor cantidad de producto, que corresponde al triángulo B de la misma ilustración. Por lo tanto no se tendría en cuenta el daño para este grupo de consumidores. Las medidas presentadas anteriormente sí tienen en cuenta este daño.

Existen múltiples modelos que pueden servir para determinar el escenario contrafactual y estimar los daños. Sin embargo, la robustez de los modelos depende crucialmente de la validez de los supuestos sobre los que se construye y qué tan razonables son estos, dado el contexto particular. Se pueden clasificar los modelos de varias formas, sin embargo, siguiendo a Komninos(2010), se plantean modelos basados en 3 grandes categorías: comparaciones, análisis financiero y estructura de mercado.

Los métodos basados en comparaciones se caracterizan por utilizar datos de fuentes ajenas al periodo de la presunta infracción. Cuando se cuenta con

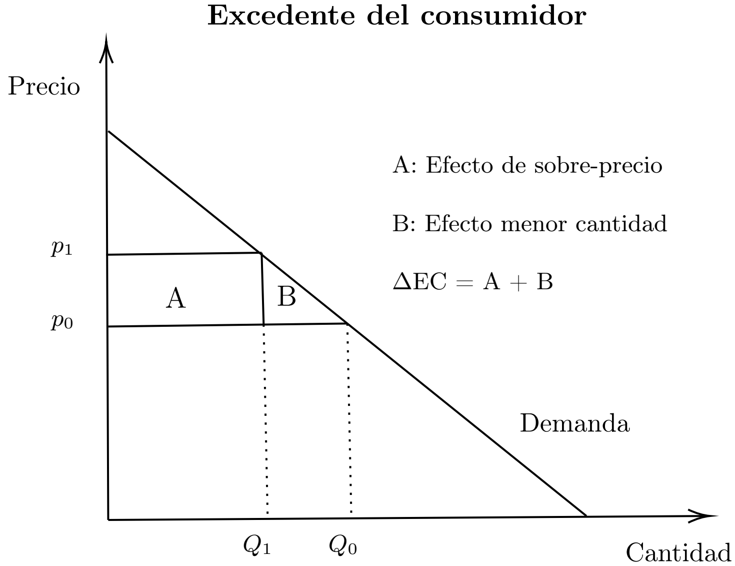


Figura 4.6: Taxonomía de la teoría de juegos estratégicos (i.e., no cooperativos) con algunos ejemplos o aplicaciones importantes.

datos de corte transversal (todos de un mismo periodo de tiempo) se pueden hacer comparaciones con agentes en otros mercados geográficos, otros productos comparables en donde no hubo prácticas anticompetitivas para así construir un contrafactual. Los modelos pueden tener en cuenta factores observables para controlar por diferencias entre los mercados para así aislar el efecto de la práctica anticompetitiva, de lo contrario otros factores que coinciden con el periodo pero que no se tienen en cuenta a la hora de modelar pueden sesgar los resultados. La fortaleza de estas comparaciones transversales depende crucialmente en qué tan parecidos y comparables son los mercados. La principal desventaja de este método es que puede ser difícil encontrar un mercado alternativo comparable y de encontrarlo es posible que características no observadas sesguen los resultados (Brander Ross, 2006). Otra opción es realizar comparaciones en el tiempo, específicamente comparar el mismo mercado en un periodo en el que existió la práctica anticompetitiva con otro periodo en el que no existió. En general se utilizan dos técnicas para utilizar los datos de un mercado en el tiempo, los pronósticos de series de tiempo y utilizar una variable indicadora. Para utilizar la variable indicadora se toman datos para todos los periodos en los que hay datos disponibles, incluyendo periodos donde no existieron prácticas anticompetitivas. Se construye una variable indicadora I_t que toma el valor de 1 si en el periodo t existieron dichas prácticas y 0 de lo contrario y se estima un modelo en el que el precio en el periodo t , P_t es función de dicha variable y otras exógenas X_t: $P_t = f(I_t, X_t)$. Suponiendo una relación lineal, se tendría:

$$P_t = \alpha + \beta X_t +_t +\gamma I_t X_t + \epsilon_t$$

Se estiman los parámetros con los datos y se estudia la significancia estadística y la magnitud de los parámetros que acompañan a la variable indicadora y con esto se determina la magnitud del daño, pues se puede estimar el precio contrafactual. Esta técnica presenta una dificultad, pues se debe decidir si el diferencial del precio se asumirá constante o no, lo que dificulta obtener una estimación del daño. Alternativamente se puede estimar un modelo utilizando periodos en dónde no existieron prácticas anticompetitivas y así lograr descubrir los determinantes de los precios y luego utilizar ese modelo para predecir precios contrafactuales en el periodo de interés. En algunos casos ambas aproximaciones pueden arrojar las mismas predicciones (McCrary Rubinfeld, 2014). Una desventaja de estos modelos es que pueden existir tendencias estacionales y autocorrelación temporal que de no ser controlados pueden generar estimaciones sesgadas. Finalmente, cuando se tiene tanto el componente transversal como el temporal, se cuenta con datos panel que permite controlar por más factores y tener estimaciones más precisas. La técnica de diferencias en diferencias es un ejemplo de lo que se puede hacer con estos datos. La mayor dificultad radica en que, en general, es complejo adquirir datos de estas características. Por otra parte se encuentran los métodos basados en análisis financieros. Estos modelos utilizan información de otras firmas e industrias para tener puntos de referencia sobre tasas de retorno y costos. Utilizando los costos de producción, de capital, márgenes de ganancia, rentabilidades entre otros, se puede estimar precios del escenario contrafactual. En general se usa el desempeño financiero de las firmas. Por ejemplo, un cambio en la rentabilidad de una firma demandante puede ser utilizado para estimar el daño causado. Igualmente resultados financieros excepcionales pueden proporcionar medidas cuantificables del beneficio por parte de las firmas que utilizaron prácticas anticompetitivas.

Otra técnica utilizada para construir el precio contrafactual es analizando la estructura de costos de la firma, así se puede obtener un costo de producción y al aplicarle un margen de referencia se puede establecer un precio contrafactual. Además de las anteriores, en mercados desarrollados se puede utilizar datos sobre los movimientos de las acciones y los bonos de una empresa como insumos en el análisis. Una de las ventajas de estos métodos es que los datos generalmente se encuentran disponibles, al menos en los estados financieros de las empresas. Algo que se debe tener en cuenta es que dicha información corresponde a la empresa como un todo, y es posible que las prácticas correspondan exclusivamente a un área de la compañía. Adicionalmente existen varias desventajas de usar estos métodos. En primer lugar, es difícil distinguir el efecto de factores ajenos a la práctica anticompetitiva que afectan el desempeño financiero de las empresas. Asimismo, los costos observados pueden ser engañosamente altos pues es posible que existan ineficiencias en el proceso productivo como consecuencia de la falta de competencia, o que no se están aprovechando totalmente las economías de escala al restringir los volúmenes de producción.

La tercera categoría son los métodos basados en la estructura de mercado y la teoría. Estas metodologías se basan principalmente en la teoría de la organización industrial, utilizando una combinación entre modelos teóricos y estimaciones empíricas para así determinar un escenario contrafactual. El enfoque consiste en identificar los modelos de organización industrial que mejor se ajustan al mercado relevante. Existe un gran espectro de modelos que explican todo el rango de competencia en un mercado, desde competencia perfecta hasta monopolio. Los modelos utilizados para estimar el daño también están en un rango que va desde totalmente teóricos hasta absolutamente empíricos, sin embargo, en general se utiliza una combinación de modelos teóricos, supuestos y estimaciones empíricas que permiten estimar y simular el mercado bajo diversas circunstancias. Una de las partes más importantes para determinar el modelo a usar son las características del mercado y para determinar esto hay que tener en cuenta varias cosas. Primero, es importante determinar si se compite en precios o cantidades. Si las firmas son tomadoras de precio, con pocas barreras de entrada y salida, y muchos participantes, se presenta un caso de competencia perfecta. Si la competencia es en precio, modelos de Bertrand, o competencia monopolística podrían ser los adecuados. Si se compite en cantidades, modelos tipo Cournot son los adecuados. Cuando la localización de un producto es relevante, o como una forma de modelar las diferencias en calidad de los productos, se puede usar el modelo Hotelling. Si los precios se determinan en subastas, se deben estudiar los modelos de subastas relevantes para estudiar el tipo de competencia. Otra característica relevante son los bienes, se debe utilizar modelos diferentes si los bienes son homogéneos o diferenciados y si existe una diferenciación horizontal o vertical. En la primera no existe un ordenamiento objetivo entre los bienes, mientras que en la segunda sí. Asimismo el número de firmas y las barreras de entrada y salida pueden ser determinantes a la hora de definir la estructura de mercado. Además de los anteriores, otros factores como la estructura de costos pueden ser relevantes. Todo lo anterior permite identificar cuál es el modelo teórico más apropiado para el mercado en cuestión. En general, para estimar el daño, la primera y la tercera categoría utilizan modelos econométricos. Dentro de éstos modelos existen dos grandes categorías, los modelos estructurales y los modelos en forma reducida. En los modelos estructurales se utiliza la teoría económica y supuestos matemáticos que explican cómo un conjunto de variables endógenas se relacionan a un conjunto de variables explicativas observables. Para hacer esto se debe especificar en detalle todas las relaciones entre los agentes que llevan a un resultado económico final. Para lograr estimar estos modelos se deben utilizar supuestos estadísticos razonables sobre la distribución de algunas de las variables (Reiss Wolak, 2007). Como su nombre lo dice, estos modelos desarrollan minuciosamente toda la estructura de las relaciones económicas por lo que es posible realizar algunos cambios para construir escenarios contrafactuales de manera robusta. Por su parte, los modelos en forma reducida son aquellos que relacionan las distintas variables pero sólo en su resultado final, sin especificar en detalle la estructura que llevó a este resultado. Lo modelos en forma reducida son generalmente más fáciles de estimar que los estructurales de los cuales se derivan. Por ejemplo, en un modelo en forma reducida puede ser difícil distinguir entre la demanda y la oferta. En muchas ocasiones las estimaciones en forma reducida pueden ser muy útiles para responder preguntas relevantes. No obstante, sus relaciones no se derivan de un conjunto de ecuaciones estructurales lo que puede generar el riesgo de producir resultados engañosos. Dada la complejidad de los modelos estructurales, éstos requieren una mayor cantidad de datos. En general se prefiere utilizar modelos estructurales, sin embargo en muchas circunstancias no existe suficiente información para caracterizar la estructura subyacente de la complejidad de la interacción entre agentes. En estos casos modelos en forma reducida pueden ser una alternativa confiable al usarlos correctamente (Rubinfeld, 2008). Si los consumidores pueden sustituir fácilmente los productos en cuestión, el ejercicio de poder de mercado tiene un efecto mucho menor, pues los consumidores pueden adquirir otros productos cuyos precios y cantidades no hayan sido modificados. Es por esto que es fundamental estimar tanto las elasticidades propias como las cruzadas con otros productos para analizar los efectos en un mercado. Uno de los modelos estructurales más utilizados para realizar esta tarea fue introducido por (Berry, Levinsohn, Pakes, 1995). Este modelo busca estimar tanto la demanda como la oferta en un mercado y caracterizar ambos lados del mercado. Para estimarla se requieren datos desagregados de compras que permitan identificar las preferencias de los consumidores y a su vez calcular participaciones de mercado. Por el lado de la demanda las decisiones de los individuos se modelan como elecciones discretas entre un conjunto finito de bienes. Con base en los precios, cantidades vendidas por localización y año, las cantidades agregadas de estas (participaciones de mercado por producto) y características básicas agregadas de los individuos como la distribución del ingreso, se estima la utilidad de los agentes, la demanda y las elasticidades cruzadas y con respecto a las características. Por el lado de la oferta se supone que las firmas compiten en precios (Bertrand). Con base en las participaciones de mercado de cada producto se recuperan los costos marginales y el markup (medida de poder de mercado). Utilizando los datos observados del mercado durante el periodo en que existió presuntamente un cartel se pueden estimar los markups y costos marginales. Estos permiten inferir el grado de competencia imperfecta observado. Finalmente usando los costos marginales se pueden inferir los precios del contrafactual bajo otras estructuras de mercado. Con los precios de competencia perfecta se puede estimar las nuevas demandas y excedente del consumidor entre el escenario observado y el de competencia perfecta.

Modelos estructurales

Para ilustrar algunas de las ideas mencionadas sobre los modelos estructurales, a continuación estudiamos un modelo de competencia a la Betrand con miras a resolver un problema de cuantificación del daño de una presunta práctica anticompetitiva.

Esta metodología se basa en [Nevo, 1998]. Considere $i = 1, ..., N$ firmas en el mercado. Cada firma ofrece un conjunto F_j de productos diferenciados. Sea J el número total de productos que se ofrecen. La demanda del producto j viene dada por

$$Q_j = Q(p_1, ..., p_J, Z; \alpha), \quad j = 1, ..., J \tag{4.23}$$

donde Z es un vector de variables exógenas y α es un vector de parámetros que deben ser estimados.

Los beneficios de la firma i son:

$$\Pi_i = \sum_{j \in F_i} (p_j - mc(W_j, \beta))Q_j - C_i \tag{4.24}$$

donde $mc(W_j, \beta))$ es el costo marginal de producir el bien j, W_j es un vector de variables exógenas, β es un vector de parámetros que deben ser estimados,

C_i es el costo fijo. Obsérvese que esta especificación implica que los costos marginales son constantes.

Las condiciones de primer orden (en forma matricial) son:

$$p = mc + \Omega^{-1} Q(p) \tag{4.25}$$

donde $\Omega \equiv \Theta \cdot \partial Q_r(p)/\partial p_j$ y Θ es una matriz de unos y ceros que obedece a varios tipos de competencia.

En particular Θ puede representar tres diferentes tipos de competencia:

1. Matriz identidad: Bertrand con firmas uni-producto.
2. Matriz con bloques de unos: Bertrand con firmas multi-producto.
3. Matriz de unos: Bertrand con firmas en colusión.

La especificación econométrica se completa añadiendo un término de error a la demanda y la ecuación de fijación de precios. Este modelo puede utilizarse para estimar qué tipo de competencia es más apropiada entre un menú de posibilidades. Formalmente esto se puede hacer como sugieren algunos artículos: Bresnahan (1987) y Gasami et.al (1992). También puede utilizarse para constuir escenarios contrafactuales: competencia perfecta, colusión, etc.

El modelo de variaciones conjeturales es idéntico pero excepto que la matriz Θ no se supone de ceros y unos sino parámetros generales (estos representan una medida de poder de mercado). Usualmente se interpretan como las conjeturas que las firmas tienen sobre el comportamiento de las demás. En el capitulo 11 se presenta una aplicación de este modelo en el contexto de juegos repetidos.

4.2. Modelos de Localización

Los modelo de localización son modelo de interacción estratégica entre individuos o empresas que son heterogéneos en diferentes grados y/o compiten por productos heterogéneos como productos diferenciados horizontalmente.[6] A continuación presentamos dos aplicaciones de este tipo de modelos: una aplicación estilizada al mercado de automóviles que ilustra un punto muy

[6] Los productos diferenciados horizontalmente son productos que aún con el mismo precio son demandados. En contraste, la diferenciación vertical de productos se refiere a la diferenciación en calidad. Existe consenso sobre cual es la calidad y el ordenamiento de los producto por calidad.

importante y que puede parecer contra intuitivo. Para ganar participación de un mercado de clientes segmentados, puede ser una mejor estrategia premiar a los clientes actuales con descuentos y aumentarle el precio a los que nos son clientes!

Por último, presentamos un modelo de localización un poco más complejo que permite estudiar el efecto de las tarifas de terminación de llamadas de un operador de celular a otro operador de celular.

4.2.1. Competencia por segmentos de mercado

Los modelos de localización son comúnes en situaciones en las cuales los productos presentan diferenciación horizontal, es decir no se puede encontrar una diferencia observable por todos los consumidores de manera que se pueda catalogar a un producto como mejor que otro. En este sentido la diferenciación horizontal implica que las diferencias entre productos son sutiles y que solo influyen en la demanda en función de las preferencias de los agentes. Para ejemplificar esto, piense en dos detergentes para el lavado de la ropa, imagine que ambos tienen las mismas características con excepción al olor, el primer detergente huele a limón y el segundo a fresas, cada lector podría escoger su favorito en función de sus preferencias por el olor, no obstante ¿se podría utilizar estas preferencias para maximizar los beneficios de una firma?

En la literatura económica se presentan diversos casos como lo son modelo de Hotteling o Harbord - Hoernig, que se describirán brevemente a continuación.

4.2.2. Hotteling: Ciudad Lineal - Oligopolio

El modelo de Hotteling o Ciudad Lineal, como su nombre lo indica este caso se contextualiza en una hipotética ciudad donde sus habitantes se encuentran distribuidos en una línea recta, existe un número N de individuos localizados a lo largo de la ciudad y además se asume que se distribuyen uniformemente a lo largo de la recta. Existe un único bien cuya utilidad es idéntica para cada individuo, este producto puede ser ofrecido por empresas que toman dos decisiones, la primera es ubicarse en la recta y en segundo lugar el precio al que ofrecerán el producto. En este modelo cada individuo puede adquirir solo un bien y cada empresa tiene capacidad para abarcar todo el mercado. Los consumidores pueden adquirir el bien al precio que establezca la firma a la que deseen comprar, sin embargo, deberán incurrir en un costo adicional por la distancia entre su ubicación y la ubicación de la firma, la suma entre el precio del producto y el costo por la distancia la llamaremos costo ajustado.

La ciudad lineal en la que se ubican tanto individuos como firmas representa una escala de preferencias ordenadas donde el costo en el que incurre el agente es la desutilidad producida de comprar un producto lejos de sus preferencias. En este sentido las firmas al momento de escoger su localización lo que realmente están realizando es una seleccionan de las características del producto que lo ubiquen en determinada posición en la escala de preferencias.

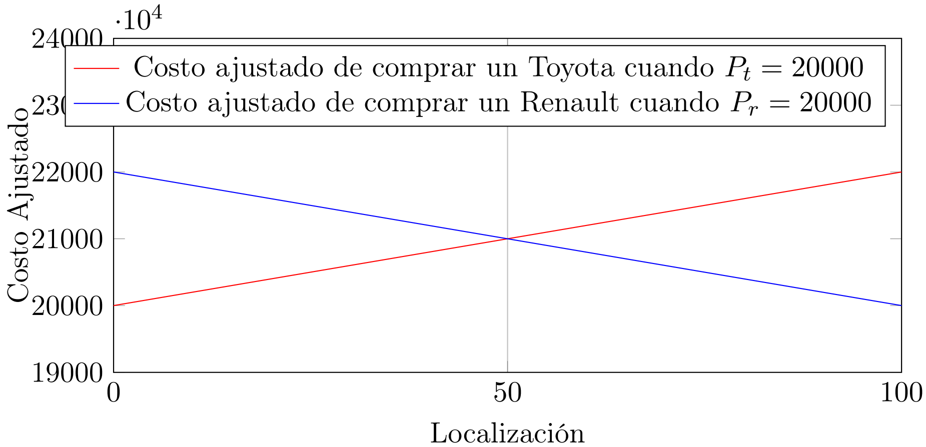
En esta sección se analizará el caso estático de un duopolio. Al ser un juego estático la localización se ha definido previamente y las firmas solo compiten por precio teniendo en cuenta el poder de mercado generado por la diferenciación producto de su ubicación. Sin pérdida de generalidad se tomará el caso de máxima diferenciación, es decir cada empresa se ubica en un extremo de la ciudad.

Para ejemplificar este modelo imagine dos autos uno marca Toyota y otro marca Renault, los autos tienen las mismas características y la única diferenciación se encuentra en la marca. Asuma que existe en una longitud de 100, la empresa Toyota se encuentra en 0 y la ubicación de Renault es 100. Existen 100 consumidores distribuidos equitativamente entre 0 y 100. Cada consumidor se encuentra en una localización X, el costo ajustado de adquirir una Toyota (C_t) o un Renault (C_r) serán

$$\begin{aligned} C_t &= P_t + bX \\ C_r &= P_r + b(100 - X) \end{aligned} \tag{4.26}$$

Entendiendo el parámetro b como cuanto costo adicional le genera al agente alejarse en una unidad en su escala de preferencias. Para nuestro ejemplo asumiremos $b = 20$ también tomemos que el costo marginal de producir un auto para ambas empresas es de $cmg = 19000$.

Por debajo de $X = 50$ Toyota tiene mayor poder de influencia sobre los consumidores ubicados en esa zona, esto debido a que por debajo de 50 ante un mismo precio entre Toyota y Renault los consumidores prefieren adquirir el auto en Toyota. En otras palabras, esta firma puede ofrecer un precio mayor al de Renault debido a que se siente más identificado en sus preferencias a los autos de Toyota en comparación con los Renault.
Toyota sabe que los consumidores compraran el auto más barato comparando sus costos ajustados según su localización, por lo tanto, los individuos



compraran un auto marca Toyota siempre que:

$$
\begin{aligned}
&P_r + 20(100 - X) \geq P_t + 20X \\
&50 - \frac{P_t - P_r}{40} \geq X
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

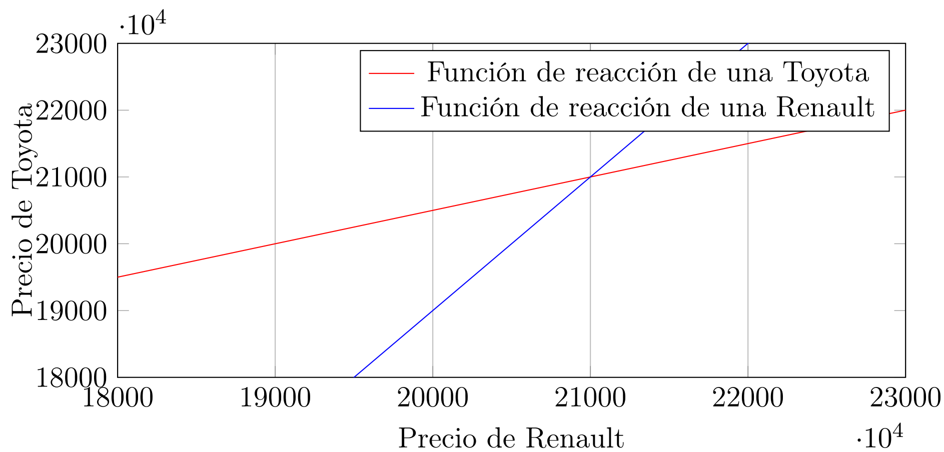
Dado que los consumidores están idénticamente distribuidos a lo largo de la recta, el número de agentes que compraran autos Toyota serán $50 - \frac{P_t - P_r}{40} = Q_t$, de esta forma se puede calcular el precio optimo dado la cantidad demandada y el precio de la competencia

$$
\begin{aligned}
&50 - \frac{P_t - P_r}{40} = Q_t \\
&2000 - 40Q_t + P_r = P_t
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

A partir de esta función inversa de demanda se encuentra el ingreso marginal: $img = 2000 - 80Q_t + P_r$, dado que conocemos el cmg, se puede encontrar las cantidades optimas

$$
\begin{aligned}
&2000 - 80Q_t + P_r = 19000 \\
&\frac{P_r - 17000}{80} = Q_t
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Tomando esta función y reemplazando en la función inversa de demanda se encuentra la función de reacción de Toyota con respecto al precio de Renault



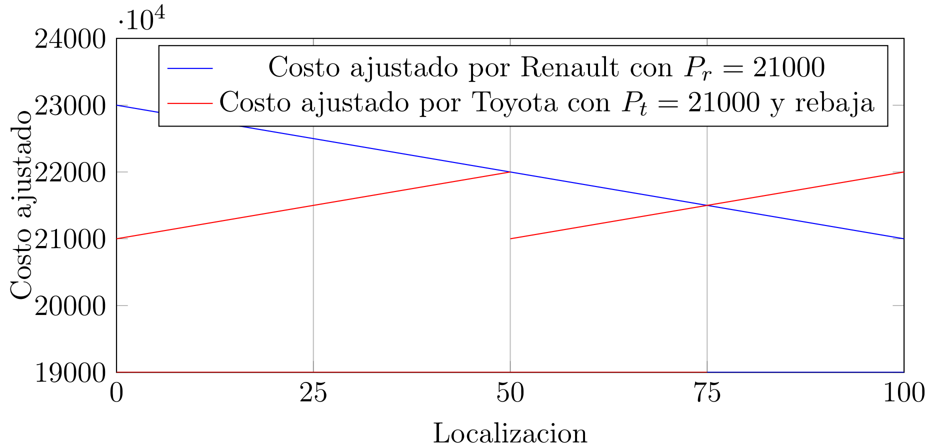
$$\begin{aligned} 2000 - \frac{P_r - 17000}{2} + P_r = P_t \\ \frac{P_r}{2} + 10500 = P_t \end{aligned} \tag{4.30}$$

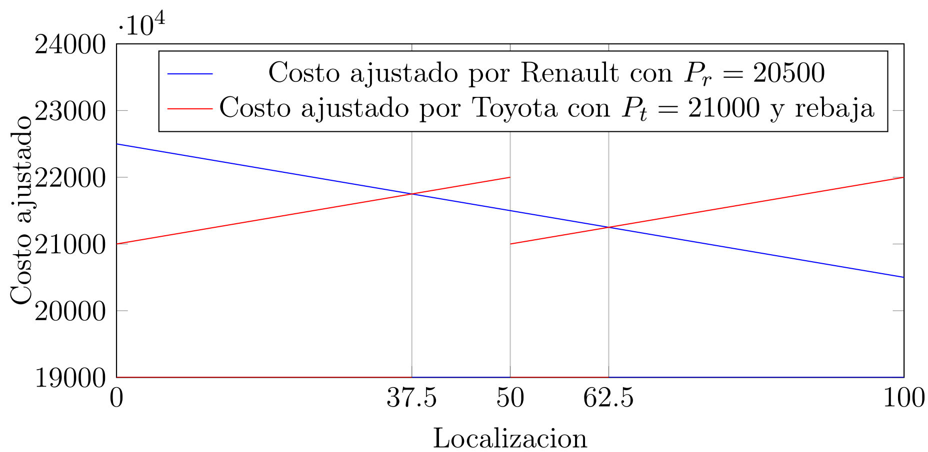
Dado que el escenario planteado es simétrico para ambas firmas, se puede encontrar la función de reacción de Renault como $\frac{P_t}{2} + 10500 = P_r$, teniendo en cuenta estas dos funciones se puede encontrar el equilibrio de Nash.

Como se puede observar el equilibrio se encuentra cuando ambas firmas tienen un precio de 21000 y las cantidades para cada una son de 50 autos vendidos. Dado que estas firmas reconocen que tienen fortalezas y debilidades en ciertos grupos de la población, una pregunta natural es ¿Qué estrategia podrían utilizar para mejorar sus beneficios? En la próxima sección se plantearan dos alternativas: realizar rebajas en la zona de baja influencia para ganar mercado o, por el contrario, realizar programas para fortalecer la lealtad en la zona alta influencia.

Hotteling: Ciudad Lineal - Rebajas

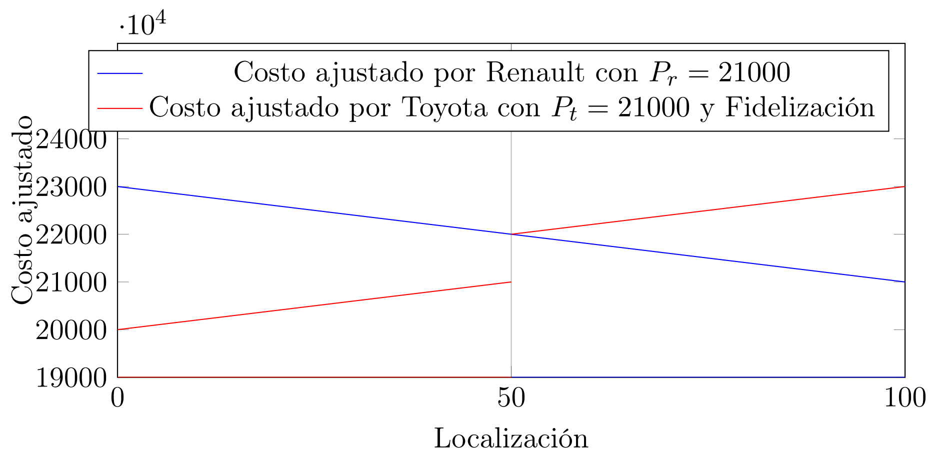
Se asume que las empresas pueden identificar las preferencias de los agentes entre Toyota y Renault, buscando ganar mayor participación del mercado asumamos que Toyota decide darle descuento de 1000 a los consumidores que son más afines con la marca Renault ($x > 50$), dado que ambas empresas ofrecen el mismo precio, la estrategia de Toyota logra robarle parte del mercado a Renault.





Como se logra observar en la figura anterior la rebaja hace que el costo de adquirir un Toyota para los individuos entre 50 y 75 sea menor que si compraran un Renault. Asumamos que Renault buscando aumentar su participación en el mercado reduce el precio a 20500.

Al reducir el precio Renault aumenta su participación en el mercado tanto en el área que había perdido como en la zona de mayor influencia de Toyota, por otro lado, pasa de tener 50000 en beneficios a obtener 75000, por lo que esa reducción en precio le es favorable. En el caso de Toyota la cuota de mercado es exactamente la misma que tenía antes de la rebaja, pero los individuos que le arrebato a Renault tienen un descuento por lo que su beneficio es menor al que tenía antes de la rebaja.



Hotteling: Ciudad Lineal - Programas de fidelización

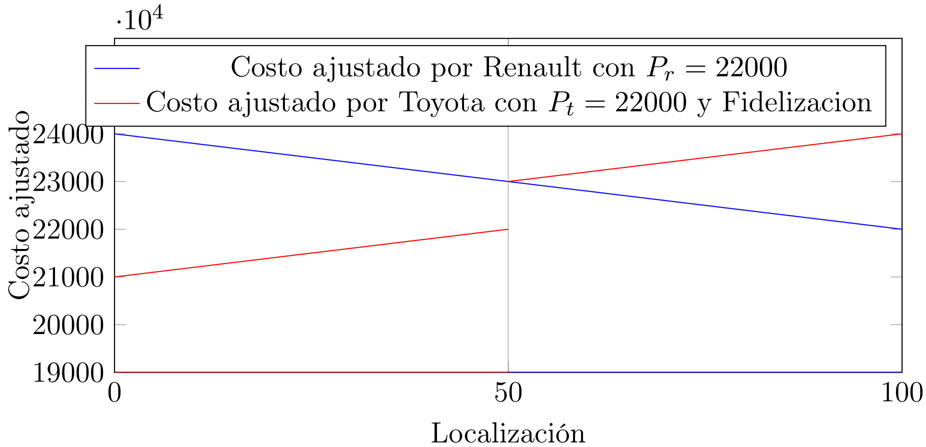
En este caso la firma tratara de fidelizar a sus compradores dándoles un descuento, para nuestro caso asumamos que Toyota decide dar un descuento de 1000 a todos los consumidores en su área de mayor influencia, es decir a quienes se encuentren a una localización menor a 50.

Al hacer el ajuste la competencia con Renault no se ve afectada, no obstante, tiene la oportunidad de subir precios sin perder poder de mercado. El precio mayor de Toyota genera una ventana de oportunidad para que Renault suba su precio sin perder participación de mercado, generando un ciclo en el que ambas empresas pueden subir el precio hasta llegar a la máxima disponibilidad a pagar de sus consumidores y de esta forma apropiarse de todo el excedente del consumidor.

4.2.3. Modelo de Harbord - Hoernig

A continuación describimos el modelo de [**?**] este modelo es una aplicación del modelo de Hotteling para redes de telefonía celular, como particularidad en este modelo las empresas son ubicadas en forma de grafos donde los nodos representan empresas de telefonía celular y los individuos se encuentran uniformemente distribuidos a lo largo de las aristas que comunican dos nodos. En este modelo existe únicamente diferenciación horizontal que se entienden como preferencias por cada operador movil.

Por otro lado, los suscriptores tendrán dos tipos de llamadas, on-net (dentro



de los suscriptores del mismo operador) y off-net (dentro de los suscriptores de otro operador).

Operadores

Suponemos que existen $n \geq 2$ operadores se presenta competencia imperfecta entre los operadores móviles por la provisión de un servicio sustituible y diferenciado horizontalmente como se mencionó anteriormente. Además, se presenta un operador fijo que provee un servicio no sustituible (no hay competencia entre los operadores móviles y el operador fijo). Definimos la participación de mercado (por suscriptores) de un operador i por α_i. Las redes móviles incurren en un costo fijo por suscriptor f_i. El costo por minuto de una llamada on-net $c_{ii} = c_{oi} + c_{ti}$ donde c_{oi} es el costo de la originación y c_{ti} el costo de terminación en la misma red. El costo de terminación (cargo de acceso) del operado i es a_i. Luego, el costo por minuto de una llamada off-net que se origina en i y termina en j es $c_{ij} = c_{oi} + a_j$.

En una red fija, el costo de terminación (cargo de acceso) es a_f. Luego, el costo por minuto de una llamada off-net que se origina en i y termina en f es $c_{if} = c_{oi} + a_f$. Dado que no existe competencia del operador fijo se excluye el costo de llamadas on-net en el operador fijo.

Tarifas

En cuanto a los ingresos de los operadores, estos están definidos por un cargo básico F_i por pertenecer a esa red i, por otro lado podrán cobrar un precio por minuto on-net p_{ii} para los suscriptores del operador i y el precio por minuto off-net de una llamada originada en i que termina en j será p_{ij} . Para simplificar el análisis se asume que el precio off-net es uniforme entre los operadores $p_{ij} = p_{ik}$. Por último, el precio por minuto de llamar a la red fija es p_{if}. El operador fijo cobra p_{fi} por minuto de llamada a un operador móvil.

Consumidores

Existe un número fijo de suscriptores, si p es el precio por minuto de una llamada, cada suscriptor recibirá como utilidad:

1. Una utilidad fija A_i por estar suscritos a una red i (denominado parámetros de asimetría de los operadores).

2. Utilidad por número y duración de llamadas por minutos originadas: $u(q)$ por llamada de duración q. Esta utilidad se mide en términos monetarios. Por definión, la demanda por minutos $q(p)$ satisface $u'(q(p)) = p$.

3. Utilidad de recibir llamadas (externalidad en las llamadas): $\beta u(q)$ por llamada de duración q. $\beta \in [0, 1]$ refleja la intensidad de la externalidad.

Por otro lado, el excedente del consumidor por llamada de duración q es $v(p) = u(q(p)) - pq(p)$. Para simplificar la notación se entenderá como: $q_{ij} = q(p_{ij}), u_{ij} = u(q_{ij}), v_{ij} = v(p_{ij}), etc.$

Antes de tomar en cuenta las preferencias por el operador, un suscriptor del operador i tiene un excedente w_i igual a:

$$w_i = M \sum_{j=1}^{n} \alpha(v_{ij} + \beta u_{ji}) + N(v_{if} + \beta u_{fi}) - F_i.$$

Donde M son los suscriptores de las redes móviles y N los suscriptores de la red fija. La primera parte del excedente representa el beneficio que se recibe por el número de individuos en cada red, teniendo en cuenta el excedente por llamadas realizadas y la externalidad de recibirlas.

Los operadores compiten con todos los demás operadores por los consumidores en sus vecindarios. Un consumidor a una distancia x_{ij} entre el operador i y j, medida desde i, es indiferente entre los dos operadores si:

$$w_i + A_i - tx_{ij} = w_j + A_j - t(\frac{2}{n(n-1)} - x_{ij})$$

Donde los operadores se han distribuido de tal forma que la longitud de un enlace entre dos operadores es $\frac{2}{n(n-1)}$ (obsérve que todos los enlaces tienen la misma longitud y la suma de las longitudes ha sido normalizada a 1) y t representa la intensidad de las preferencias horizontales. Note que si $n = 2$ tiene la misma estructura del modelo de la sección anterior. Despejando se obtiene:

$$x_{ij} = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{2t}(w_i + A_i - w_j + A_j)$$

Sabemos que hasta x_{ij} todos los individuos se suscribirán al operador i, la participación de mercado del operador i será la suma de los suscritos por cada enlace con los demás operadores, luego:

$$\alpha_i = \sum_{j \neq i} x_{ij} = \alpha_{0i} + \sigma \sum_{j \neq i}(w_i - w_j)$$

Donde $\sigma = \frac{1}{2t}$ y $\alpha_{0i} = \frac{1}{n} + \sigma \sum_{j \neq i}(A_i - A_j)$
Las participaciones de mercado de los operadores pueden escribirse en forma matricial de la siguiente forma:

$$\alpha = G\alpha_0 + \sigma H(Nh_f - F) \tag{4.31}$$

Donde $B = (b_{ij})$ es una matriz $n \times n$ tal que $b_{ii} = n-1$ y $b_{ij} = -1$ para $j \neq i$, $G = (I - \sigma MBh)^{-1}$, $H = GB$, $F = (F_i)$, $h = (h_{ij})$ donde $h_{ij} = v_{ij} + \beta u_{ij}$ y $h_f = (h_{if})$ donde $h_{if} = v_{if} + \beta u_{fi}$.

Excedente, Beneficios y Bienestar

El excedente del consumidor en las redes móviles, incluyendo los costos de transacción de estar en una red son:

$$S = M\alpha^T(w + A) - M\sum_{i,j}\int_0^{x_{ij}} tzdz$$

El excedente del consumidor en las llamadas a la red fija es:

$$S^f = NM\sum_i \alpha_i(v_{fi} + \beta u_{if})$$

El beneficio de las firmas móviles es:

$$\pi_i = M\alpha_i(M\sum_j \alpha_j R_{ij} + NQ_i + F_i - f_i)$$

Donde $R_{ii} = (p_{ii} - c_{ii})q_{ii}$ es el beneficio de las llamadas on-net, $R_{ij} = (p_{ij} - c_{ij})q_{ij} + (a_i - c_{ti})q_{ji}$ es el beneficio de la llamadas off-net y $Q_i = (p_{if} - c_{if})q_{if} + (a_i - c_{ti})q_{fi}$ son los beneficios por terminación de llamadas móviles y terminación de fijas respectivamente. El beneficio de la red fija π^f se puede expresar de forma similar.

Las condiciones de primer orden de los operadores móviles permiten determinar F_i:

$$F_i = f_i - NQ_i + M\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\hat{R}_{ij} - R_{ij}) \tag{4.32}$$

Donde $\hat{R}_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $R_{ij} = \frac{1}{\sigma M H_{ii}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{H_{ji}}{H_{ii}} R_{ij}$.

Finalmente, el bienestar social es: $W = S + S^f + \Pi + \pi^f$, donde Π es el beneficio agregado de los operadores móviles.

Los operadores compiten en precios. El equilibrio de Nash es:

$$p_{ii} = \frac{c_{ii}}{1 + \beta}$$

$$p_{if} = c_{if}$$

$$p_{ij} = \frac{\sum_{l \neq i} \alpha_l c_{il}}{1 - (1 + \beta)\alpha_i}, j \neq i$$

Note que en equilibrio el precio on-net será mayor con su costo y entre menor externalidad generan las llamadas de otras redes, esto producto de que la única fuente de utilidad serán las llamadas realizadas por lo que tendrá mayor importancia la selección de la red en la cual suscribirse. En el caso de las llamadas off-net se toma el costo ponderado por las participaciones de mercado de los otros operadores. Por otro lado, el precio será más alto entre más participación del mercado tenga la firma i, en cuanto a la externalidad de las llamadas el efecto es contrario a las llamadas on-net.

4.3. Asignación eficiente de bienes públicos

Consideremos una comunidad de n individuos que debe determinar el nivel x de provisión de un bien público para ellos. Cada individuo determina su contribución individual c_i. La contribución total C financia una cantidad $x = C$ del bien público. Adicionalmente, consideremos que cada individuo tiene una dotación inicial w_i de un bien privado.

Las preferencias de los individuos son de la forma:

$$U_i : R_+ \times (-\infty, w_i] \to R$$

donde U_i es creciente en el primer argumento (consumo del bien público), decreciente en el segundo (contribución individual) y estrictamente cóncava.

El problema que tendría que resolver un planificador central es:

$$\begin{aligned} &\max \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i \\ &s.a \\ &x \leq C, x \geq 0, w_i \geq c_i. \end{aligned}$$

Suponiendo una solución interior, es fácil demostrar que la suma entre individuos de las tasas marginales de sustitución entre bienes públicos y privados es igual a la tasa marginal de transformación (condición de Bowen-Lindahl-Samuelson).

Ejercicio 4.9. Deducir la condición análoga de Bowen-Lindahl-Samuelson cuando la tecnología para producir el bien público es de la forma $f(C) = x$ donde f tiene las propiedades usuales.

Es fácil demostrar que un mecanismo descentralizado en el cual los individuos juegan un equlibrio de Nash es ineficiente. Una forma de reestablecer la eficiencia se basa en el concepto de equilibrio de Lindahl.

La estrategia (p_i^*, c_i^*, x^*) define un equilibrio de Lindahl para el problema en consideración si:

1. Maximización individual:

$$\begin{aligned} &\max U_i \\ p_i^* x &= c_i \\ c_i, x &\geq 0 \end{aligned}$$

2. $\sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1$

3. $\sum_{i=1}^{n} c_i^* = x$

Ejercicio 4.10. Demostrar que todo equilibrio de Lindahl es eficiente.

Un mecanismo descentralizado alterno que reestablece la eficiencia es el mecanismo de Walker. Para ejemplificar, consideremos el siguiente juego. Cada jugador tiene como espacio de estrategias puras al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Las estrategias de los agentes son mensajes. Si m es el mensaje conjunto de todos los agentes la provisión del bien público se determina como:

$$x = \psi(m) = \max \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n}, 0 \right\}$$

donde $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

La contribución que le corresponde a cada agente es:

$$c_i = \left(\frac{1}{n} + m_{i+1} - m_{i+2} \right) \psi(m)$$

donde los jugadores se identifican modulo n (esto sugiere una interpretación del juego en el que los agentes forman un círculo).

Las funciones de pago son:

$$\pi(m_1, ..., m_n) = U(\psi(m), \left(\frac{1}{n} + m_{i+1} - m_{i+2}\right)\psi(m)) \tag{4.33}$$

Para determinar si este mecanismo está bien definido es necesario verificar que dado cualquier mensaje, la contribución agregada es suficiente para producir $\psi(m)$ del bien público (ejercicio).

Ejercicio 4.11. Demostrar que (p_i^*, c_i^*, x^*) es un equilibrio de Lindahl sí y sólo si m^* es un equilibrio de Nash donde: $p_i^* = \left(\frac{1}{n} + m_{i+1}^* - m_{i+2}^*\right)$, $x^* = \psi(m^*)$ y $c_i^* = p_i^* x^*$.

4.4. Diseño de Mecanismos

La teoría del diseño de mecanismos es una teoría dual de la teoría de juegos. Informalmente su principal problema es, dada una asignación de recursos o resultado sobre el que un conjunto de agentes tiene preferencias, encontrar y estudiar el mecanismo (reglas de juego) tales que nuestra mejor predicción del resultado de la interacción de este conjunto de agentes (solución del juego) sea la asignación o resultado dado. Este se llama el problema de implementación.

Inicialmente comenzaremos estudiando mecanismos de información completa.

4.4.1. Elementos básicos

Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$ un conjunto de agentes.

Definición 4.12 (Mecanismos)**.** Un mecanismo es $(\{M_i\}_{i\in N}, F, Y)$, donde para cada agente i, M_i es un conjunto de mensajes posibles del agente i, $M = \prod M_i$ es el conjunto de los mensajes posibles de todos los agentes, Y es un espacio de resultados y $F : M \longrightarrow Y$ es una regla de asignación del espacio de mensajes en los resultados.

Suponemos que las preferencias de cada agente se pueden representar por funciones de utilidad $u_i : Y \longrightarrow \mathbb{R}$. Alternativamente, la función de utilidad de cada agente es: $\widetilde{u}_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $\widetilde{u}_i(m) = u_i(F(m))$. Definimos $\mathbb{U}_i$ el conjunto de todas las funciones de utilidad posibles de cada agente en el sentido de la primera definición. Cuando los resultados son inciertos, restringimos el conjunto de utilidades a aquellas que tienen una representación en forma de utilidad esperada. Sea $T \subseteq \prod \mathbb{U}_i$. T se llama el espacio de tipos. Notemos que no hemos supuesto que T tiene una estructura de producto.

Vamos a suponer que los agentes observan $t \in T$ lo cual les revela sus preferencias individuales y las de todos los demás. Por eso decimos que la estructura de información es una de información completa, por lo menos para los agentes aunque no lo sea para el centro (diseñador, o principal).

Definición 4.13 (Correspondencia de elección social)**.** Una correspondencia (o regla) de elección social es una $F^S : T \rightrightarrows 2^Y$.

Intuitivamente, si el tipo de los agentes es $t \in T$ un planificador busca implementar un resultado en $F^S(t)$. Típicamente vamos a estar interesados en correspondencias sociales que son eficientes o óptimas en algún sentido.

Definición 4.14 (Eficiencia ex-post)**.** Una correspondencia F^S es eficiente ex-post si para todo $t \in T$, $F^S(t)$ es un conjunto de resultados eficientes (en el sentido de Pareto).

Todo mecanismo define un conjunto de juegos estáticos de información completa. Para cada $t \in T, t = (u_1, ..., u_n)$, sea $G_t = (N, (M_i)_{i \in N}, (\widetilde{u}_i)_{i \in N})$. Suponemos que todos los juegos G_t son conocimiento común de todos los agentes. Notemos que $\widetilde{u}_i$ dependen del tipo t. Cuando sea necesario vamos a hacer explícita la dependencia escribiendo $u_i(, t)$ y $\widetilde{u}_i(, t)$.

La característica fundamental de un mecanismo en un ambiente de información completa es que cuando un agente es informado de su tipo también es informado del tipo de todos los demás. Esto determina la forma de las estrategias de los agentes. Para que el problema de implementación sea interesante, suponemos que el planificador central no es informado de ningún tipo.

Definición 4.15 (Estrategia)**.** Una estrategia para el jugador i es una función $\alpha_i : T \to M_i$.

La estrategia depende del tipo de todos los agentes. Esto es la característica fundamental del juego de información completa inducido.

4.4.2. Conceptos de solución

Definición 4.16 (Dominancia)**.** Una estrategia s_i domina débilmente a $\widetilde{s}_i$ si:

$$u_i\left(F \circ (s_i(t), m_{-i}), t\right) \geq u_i(F \circ (\widetilde{s}_i(t), m_{-i}), t)$$

$\forall m_{-i} \in M_{-i}$ and $\forall t \in T$ con desigualdad estricta para algun t y m_{-i}.

Una estrategia es débilmente dominante si domina débilmente a cualquier otra estrategia.

Definición 4.17 (Equilibrio en estrategias dominantes débilmente)**.** Un equilibrio estrategias dominantes débilmente del mecanismo (M, F, Y) es una estrategia conjunta $\overline{s} = (\overline{s}_1, ..., \overline{s}_I), \overline{s}_i : T \longrightarrow M_i$, tal para cada i, $\overline{s}_i$ es una estrategia débilmente dominante.

Definición 4.18 (Equilibrio ex-post o Nash)**.** Un equilibrio ex-post del mecanismo (M, F, Y) es una estrategia conjunta $\overline{s} = (\overline{s}_1, ..., \overline{s}_I), \overline{s}_i : T \longrightarrow M_i$, tal que:

$$u_i\left(F \circ \overline{s}\left(t\right), t\right) \geq u_i\left(F \circ \left(s_i\left(t\right), \overline{s}_{-i}\left(t\right)\right), t\right)$$

para todo $i \in \mathcal{I}, t \in T$ y para todas las estrategias $s_i : T \longrightarrow M_i$.

Este es un equilibrio de Nash del juego de información completa una vez revelada la información de todos los jugadores.

4.4.3. Implementación

Definición 4.19 (Implementación)**.** Una correspondencia social F^s es implementable en estrategias dominantes (débilmente) o estrategias ex-post, si existe un mecanismo (M, F, Y) y un equilibrio $\overline{s}$ tal que $F(\overline{s})$ es consistente con F^S (i.e., $F \circ \overline{s}$ es una selección de F^S: Para todo t, $F(\overline{s}(t)) \in F^S(t)$). Si para todo equilibrio $\overline{s}$ del mecanismo, $F(\overline{s}(t)) \in F^S(t)$ decimos que es fuertemente implementable. Decimos que la implementación es completa cuando todas las elecciones sociales de una correspondecia de elección se pueden obtener como un equilibrio de un mecanismo.[7]

Nota técnica 4.20. Implementación en estrategias dominantes también se denomina *strategy proof implementation*.

[7]La teoría de diseño de mecanismos se ocupa principlamente del primer problema de implementación. Esto determian en ocasiones, una diferencia importante entre en la literatura de la teoría de diseño de mecanismos y la literatura de implementación, que se ocupa principlamente del problema de implementación fuerte y completa.

Dado $t \in T$, $t = (u_1, ..., u_I)$ y $y \in F^S(t)$ decimos que $t' \in T$, $t' = (u'_1, ..., u'_I)$ no aumenta los resultados preferibles a y con respecto a t si para todo i:

$$\{y' \in Y : u_i(y') \leq u_i(y)\} \subseteq \{y' \in Y : u'_i(y') \leq u'_i(y)\} \tag{4.34}$$

Definición 4.21 (Monotonicidad de la función de elección social)**.** Una función de elección social es monótona si se cumple la siguiente condición. Sea $t \in T$, y $y \in Y$ arbitrarios. Supongamos que $t' \in T$ no aumenta los resultados preferibles a y con respecto a t entonces $y \in F^S(t')$.

Teorema 4.22 (Maskin (1977))**.** Si una función de elección social es fuertemente y completamente implementable entonces es monótona.

4.4.4. El problema del Rey Salomón: No monotonicidad de la función de elección social

El Rey Salomón debe decidir a quién entregarle un niño entre dos mujeres, A y B que lo reclaman como su hijo. Su objetivo es entregárselo a la verdadera madre y amenaza con matarlo si no hay consenso entre la mujeres. Formalmente, sea $Y = \{a, b, c\}$, que representa los tres resultados finales: a si el niño se lo entregan a A, b si se lo entregan a B y c si lo matan.

El espacio es $T = \{(u^A(, \alpha), u^B(, \alpha)), (u^A(, \beta), u^B(, \beta))\}$ donde α indica que la mujer A es la verdadera madre y $u^A(a, \alpha) > u^A(b, \alpha) > u^A(c, \alpha)$ y $u^B(b, \alpha) > u^B(c, \alpha) > u^B(a, \alpha)$. Las preferencias cuando el tipo es β son análogas. Por simplicidad escribimos $T = \{\alpha, \beta\}$. Intuitivamente el espacio de tipos indica si A es la verdadera madre (tipo α) o B es la verdadera madre (tipo β).

Notemos que este es un problema de información completa: claramente cada mujer sabe quién es la verdadera madre. El que no sabe es el Rey Salomón. La regla de elección social que desea implementar el Rey Salomón es $F^S(\alpha) = a$ y $F^S(\beta) = b$, y esta función de elección social no es monótona. Luego, por el teorema de Maskin (1977) no es implementable (en un sentido fuerte y completo).

Para ver esto sea $t = \alpha$ y $y = a$. Ahora observemos que $t' = \beta$ no aumenta los resultados preferibles a a con respecto a α (en el estado α, a es el resultado preferible para A lo cual no cambia cuando el estado es β y, en el estado α, a es el peor resultado para B. Cuando el estado es α los preferibles al resultado a disminuyen para B). Por lo tanto, monotonicidad implicaría $\alpha \in F^S(\beta)$ lo cual es una contradicción. Más adelante veremos que un mecanismo dinámico sí podría implementar.[8]

4.4.5. El problema del Rey Salomón: Espacio de mensajes enumerable

En esta sección vamos a demostrar que el problema del Rey Salomón no es fuertemente implementable cuando el espacio de mensajes es de cierto tipo. Supongamos que el espacio de mensajes de cada mujer es de la forma $M^i = \{1, 2, 3, ...\}$ y que existe una regla de asignación $F : M^1 \times M^2 \to \{a, b, c\}$ que determinará un mecanismo que resuelve el problema del Rey Salomón. La función F se puede representar como una matriz $M = M^1 \times M^2$ donde el elemento $M_{i,j} = F(i, j)$. Supongamos además que el verdadero estado es α. Entonces a debe aparecer en la matriz en alguna parte.

Si suponemos que estamos en un equilibrio de Nash, B no tiene incentivos a desviarse cuando el tipo es α y como para B es mejor b o c entonces en la fila donde esta a solo hay a-es. Ahora supongamos que que el verdadero tipo es β y considere las mismas estrategias (i.e., las dos madres siguen enviando los mismos mensajes que cuando el verdadero tipo era α). En este caso a sigue siendo un equilibrio de Nash porque en la fila donde está a, no hay incentivos a desviarse, una contradicción.[9]

En conclusión esto muestra que no existe un mecanismo que resuelva el problema de implementación fuerte del Rey Salomón.

Ahora, si enriquecemos el espacio de mensajes (Palfrey y Srivastara (1991)) muestra que el problema del Rey Salomón si es implementable fuertemente en equilibrios de Nash no dominados débilmente. Supongamos que permitimos el resultado d matar a todos: A,B e hijo. El espacio de mensajes de cada mujer es: $M = \{(t, n) : t = \alpha, \beta, n = 1, 2, 3, ..\}$. La segunda componente del mensaje puede interpretarse como qué tan fuerte habla la mujer.

Los pagos son los siguientes. Si se contradicen sobre cuál es la verdadera madre el resultados es d (el peor resultado posible para todos). Caso contrario los pagos son:

[8] Maskin (1977, 1999) prueba que si la función de elección social satisface la propiedad de no existencia de poder de veto y hay tres o más individuos, entonces es implementable.

[9] En el próximo ejemplo se introduce un nuevo resultado d que consiste en matar a todos incluidas las madres. Bajo el supuesto de que este es el peor resultado para todos, el argumento anterior sigue siendo válido.

A\B	1	2	3	4	...
1	a	a	a	a	
2	c	a	a	a	
3	c	c	a	a	
4	c	c	c	a	
...					

cuando ambas anuncian α, o:

A\B	1	2	3	4	...
1	b	c	c	c	
2	b	b	c	c	
3	b	b	b	c	
4	b	b	b	b	
...					

cuando ambas anuncian β.

Ejercicio 4.23. Las siguientes estrategias son un equilibrio de Nash en estrategias no dominadas débilmente: revelar quién es la verdadera madre y $n = 1$.

Ejercicio 4.24. Competencia a la Bertrand y diseño de mecanismos (el mundo real!). Considere un mercado oligopolista donde n empresas idénticas con costos marginales iguales a cero producen un bien homogéneo perfectamente divisible donde es prohibido la entrada de más firmas y suponga que compiten por suplir dos mercados. El mercado E tiene una demanda infinita al precio exógeno p^E. En el mercado D las firmas enfrentan una demanda inelástica D. Piense en el mercado E como un mercado de exportación y D como un mercado interno. El precio de importación es exógeno e igual a p^I además $p^I > p^E$ (es decir es más caro importar que exportar y ambos precios son exógenos para las firmas).

La capacidad de producción agregada de las firmas es Q, que suponemos es superior a la demanda D interna. Denotamos por $Q_i = Q/n$ la capacidad de producción de cada firma.

1. Suponga que las firmas compiten en precios a la Bertrand. Cuál es el equilibrio de Nash en precios en el mercado D y cuál es la particpación de cada firma en el mercado interno? Ayuda: El precio de equilibrio es único y es uno de los precios ya introducidos arriba. Existen muchas

participaciones que soportan el único precio. Todas ellas debe satisfacer una condición de equilibrio agregado.

2. Cuál es el beneficio de las firmas en este caso?

3. Sea $x = D/Q$ y suponga que la firmas se ponen de acuerdo verbalmente para vender en el mercado interno a un precio p^I. Luego suplen la demanda del mercado D y el resto lo venden en el mercado E. Suponiendo que este arreglo es sostenible, cuál es el beneficio de las firmas en este caso? Es este arreglo estable (recuerde que en ausencia de un mecanismo coercitivo cada firma procuraría maximizar su propio beneficio)? Ayuda: Si el arreglo es sostenible las firmas venderian todo su producto a un precio promedio:

$$\begin{aligned} \overline{p} &= x \times p^I + (1-x)p^E && (4.35) \\ &= p^E + \frac{D}{Q}(p^I - p^E) && (4.36) \end{aligned}$$

4. Considere ahora el siguiente mecanismo. Suponga que un productor i vende una proporción x_i de su producción en el mercado nacional al precio de importación p^I. Su beneficio π_i antes de las cesiones y compensaciones del mecanismo es (esta es la función de beneficios de las firmas en ausencia de mecanismo):

$$\pi_i = p^I \times x_i Q_i + p^E \times (1-x_i)Q_i \tag{4.37}$$

La compensación neta del mecanismo, CM se define como:

$$CM = p^I \times (x - x_i)Q_i + p^E \times ((1-x) - (1-x_i))Q_i \tag{4.38}$$

La lógica de esta compensación neta es que si el productor vende más que la proporción x en el mercado interno, debe cederle al fondo que implementa el mecanismo: $p^I \times (x_i - x)Q_i$ y el fondo lo compensará con $p^E \times ((1-x) - (1-x_i))Q_i$.

Por lo tanto, el beneficio del productor $\overline{\pi}_i$, post compensaciones y cesiones netas del mecanismo es:

$$\overline{\pi}_i = \pi_i + p^I \times (x - x_i)Q_i + p^E \times ((1-x) - (1-x_i))Q_i$$

y sustituyendo π_i se obtiene:

$$\overline{\pi}_i = \overline{p} \times Q_i$$

En conclusión, con este mecanismo, expost el productor es indiferente del mercado en que venda y todas sus unidades se venden en promedio al precio $\overline{p}$.

Suponiendo que la anterior descripción del mercado constituye un equilibrio de Bertrand muestre que los beneficios y precios coinciden con el resultado en que las firmas acuerdan vender a ciertos precios bajo el supuesto de que el arreglo entre ellas es sostenible (item (c) arriba).

El ejemplo siguiente demuestra que el mecanismo anterior en efecto implementa el arreglo colusivo discutido en este ejercicio.

Ejercicio 4.25. Escribir formalmente el problema anterior como un problema de diseño de mecanismos. Más específicamente sea el espacio de tipos $T = \{(q_1, ..., q_n, p^I, p^E) : \sum_i q_i = D\}$ y $M_i = R_+, Y = \{(p_1^M, ..., p_n^M, \bar{p}^I, \bar{p}^E)\}$.

1. Escribir la regla de asignación del mecanismo.
2. Escribir las funciónes de beneficios de los agentes en presencia del mecanismo.
3. Escribir la función de elección social que este mecanismo implementa.

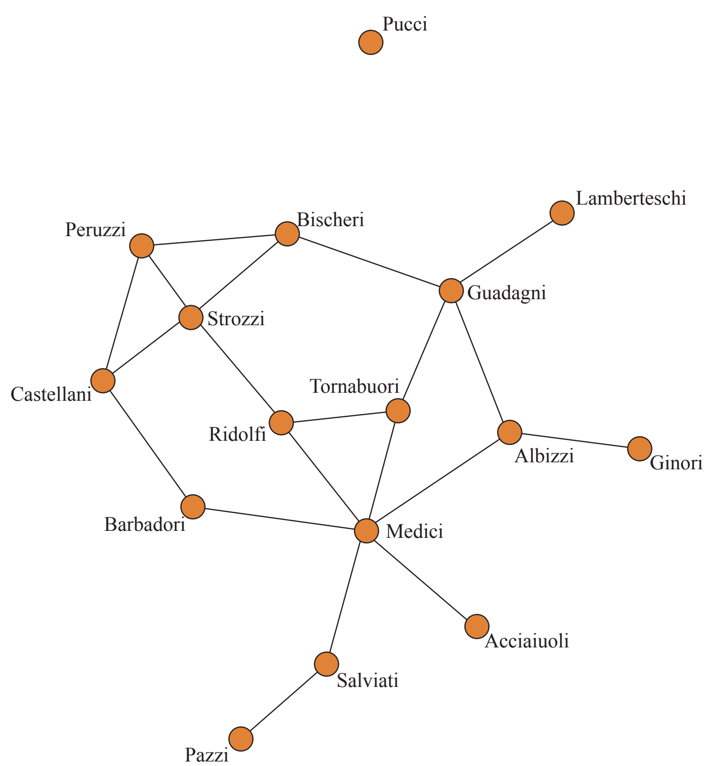
4.5. Teoría de Redes

Primero vamos a estudiar algunos ejemplos de redes.[10] La siguiente es un red de matrimonios de algunas de las familias más importantes en el Siglo XV en Florencia [Padgett and Ansell, 1993]. Cada enlace representa un matrimonio entre miembros de dos familias.

Basados en la riqueza y poder político es difícil explicar como los Medici surgieron como una familia tan importante (la familia Strozzi tenía más riqueza y poder político, sin embargo fueron opacados por los Medici). La hipótesis

[10] Basado en Jackson. Social and Economic Networks.

que se sugiere es que la estructura de relaciones puede ser un determinante. Si contamos con cuántas familias se encuentra una familia específica relacionada y comparamos entre ellas, los Medici sobresalen (3 a 2). Sin embargo, una relación de importancia resulta más sugestiva.



Sea $P(ij)$ el número de caminos más cortos que conectan una familia i con j (la longitud de un camino entre dos nodos es el número de enlaces que existen en el camino). Sea $P_k(ij)$ el número de estos caminos que incluyen a la familia k. Por ejemplo si $i =$Barbadori, $j =$Guadagni, entonces $P(ij) = 2$. Si $k =$Medici entonces $P_k(ij) = 2$ mientras que si $k =$ Strozzi o Albizzi $P_k(ij)$ es cero o uno respectivamente. Podemos calcular una medida de importancia denominada *betweenness* de Freeman de cada familia k como:

$$\sum_{i,j:i\neq j,k\in\{i,j\}} \frac{\frac{P_k(ij)}{P(ij)}}{(n-1)(n-2)/2} \tag{4.39}$$

donde $\frac{P_k(ij)}{P(ij)} = 0$ si no hay caminos entre i y j. El coeficiente $(n-1)(n-2)/2$ es el número máximo de pares de familias que incluirían a la familia k.

Esta medida de poder para los Medici es 0.522. Esto significa que los Medici están en más de la mitad de los caminos más cortos entre todos los caminos más cortos entre cada par de familias. Este mismo cálculo para los Strozzi es 0.103. El segundo más alto es los Guadagni que es 0.255. En este sentido los Medici estaban mejor posicionados que cualquier otra familia. Este ejemplo pone de manifiesto que la estrutura de la red es importante y, cómo caracterizarla, no es trivial.

Ahora, veamos otro ejemplo que resalta otras características de la redes más allá de la importancia de ciertos nodos y se enfoca más en propiedades globales de las red. Es el es ejmplo de amistades y romances en estudiantes secundaria.

Los datos corresponden a las respuestas de $90,000$ estudiantes de la encuesta Add Health entrevistados en los años 90. A los estudiantes se les preguntaba con quién habían tenido relaciones románticas en los últimos seis meses.

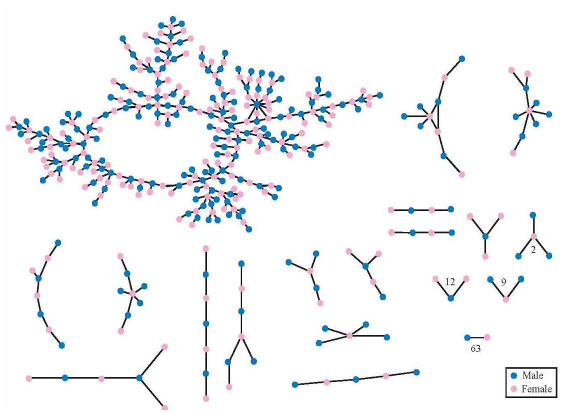


Figure 1.2: A Figure from Bearman, Moody and Stovel [47] based the Add Health Data Set. A Link Denotes a Romantic Relationship, and the Numbers by Some Components Indicate How Many Such Components Appear.

Una característica de esta red es que es un grafo bipartito (cada nodo puede clasificarse en una de dos categorías de tal forma que solo hay enlaces entre nodos de distintas categorías y no los hay entre nodos de la misma categoría, excepto contadas excepciones). Obsérvese la componente (conjunto de nodos para los cuales entre cada par de ellos se puede definir un camino sin salirse del conjunto) gigante que existe (relevante para la difusión de enfermedades, etc.). Es interesante que esta es una estructura similar a la que surge de una red que se forma mediante enlaces aleatorios idénticamente distribuidos. También puede observarse ciertas características como la presencia de homofilia: El 52 % son blancos y el 85 % de sus relaciones de amistad son con blancos. Los hispános están más integrados pero son muchos menos.

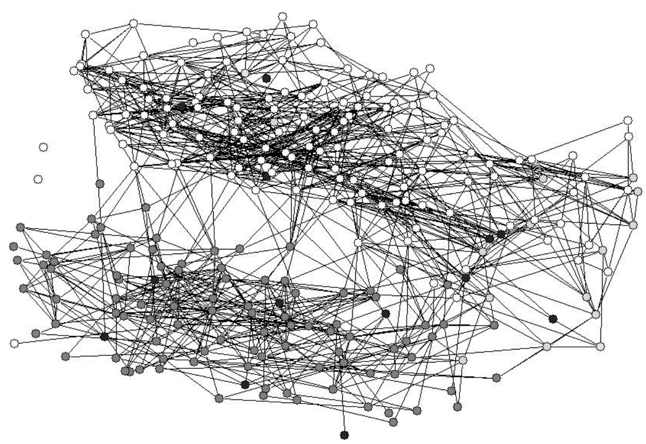


Figure 1.3: "Add Health" Friendships among High School Students Coded by Race: Hispanic=Black, White=White, Black=Grey, Asian and Other = Light Grey.

Ahora, existen varias preguntas interesantes sobre estas redes: ¿es la estructura de vínculos exógena o endógena? ¿Es la red óptima en algún sentido? Un punto de partida natural para responder esta preguntas es comenzar estudiando qué carcaterísticas comparten estas redes reales con redes formadas aleatoriamente. En efecto, sería interesantes distinguir las características que simplemente son el resultado de fenómenos aleatorios de las características que se deben a algún hecho particular del contexto en el que se observa la red o como ésta se forma. Para entender esto vamos a introduccir el modelo más básico pero muy importante de formación aleatoria de redes, el modelo de Erdos - Renyi de 1960.

Sea $N = \{1, ...n\}$ un conjunto de nodos (vertices). Suponga que la probabilidad de que se forme un enlace entre i, j es p y que la formación de enlaces es independiente. Llamamos este modelo de formación de redes el modelo $G(n, p)$. Teniendo esta probabilidad se pueden calcular estadísticas descriptivas. El grado de un nodo es el número de nodos con los cuales tiene un enlace. Ahora, la probabilidad de que un nodo i tenga exactamente d enlaces es:

$$\binom{n-1}{dp^d(1-p)^{n-1-d}} \tag{4.40}$$

Las siguiente figura muestran una red generada usando el modelo binomial ($n = 50, p = 0{,}02$, lo cual implica que el valor esperado del grado de un nodo es 1). Alguna características sobresalientes de grafos generados de esta forma son: la probabilidad de cíclos es baja y existe una componente conexa grande.

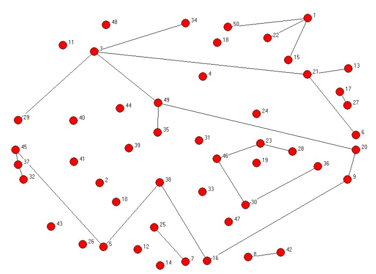


Figure 1.4: A Randomly Generated Network with Probability .02 on each Link

Figura 4.7: Una red generada aleatoriamente con el modelo de formación de redes de Erdos - Reny: $p = 0{,}02$.

Ahora, este modelo de formación aleatoria de redes sirve como un referente para entender en donde es necesario más estrutura. Existen muchos modelos de formación de redes que intentan reproducir características observadas de redes reales pero desde el punto de vista de este libro nos interesa resaltar las interacciones estratégicas que pueden ser cruciales en la forma en que crea una red, se estabiliza, etc. Por ejemplo, es claro que detrás de los dos ejemplos anteriores deben existir motivaciones e incentivos personales que determinan la forma de la red. Sin embargo, es importante entender qué tanto explica el modelo aleatorio las características más sobresalientes de los ejemplos anteriores para entender el papel de otro mecanismos. Como una ilustración

vamos a estudiar un modelo sencillo de formación endógena de redes basado en interacciones estratégicas, el modelo de conexiones simétricas. Para esto, necesitamos introducir funciones de pago o utilidades sobre la configuración de la red.
Sea (N, g) una red (grafo) donde N es el conjunto jugadores y g es una matriz simétrica de ceros y unos que representa la red ($g_{ij} = 1$ si y solamente si existe un enlace entre el nodo i, j). La utilidad $u_i(g)$ que recibe un jugador i de una red g es:

$$u_i(g) = \sum_{j \neq i, i\ j \text{ con un camino que los conecta en } g} \delta^{l_{ij}(g)} - d_i(g)c$$

donde $\delta \in (0, 1)$, $l_{ij}(g)$ es el número de vértices en el camino más corto ente i, j, d_i es el grado de i (el número nodos que están enlazados con i) y c es una constante que refleja el costo para un individuo de mantener un enlace. Decimos que una red es eficiente si maximiza la suma de la utilidad de todos los agentes. Algunas observaciones: (1) Si el costo es muy bajo (inferior a $\delta - \delta^2$) el grafo eficiente es tener el máximo número de elaces. Si el costo es mayor que ese umbral pero no muy grande, el grafo eficiente es una estrella. Teniendo esta caracterización como referente ahora podemos preguntarnos cuál es el resultado de la interacción estratégica de un conjunto de jugadores en una red, y para esto, necesitamos un concepto de equilibrio (una teorá positiva del comportamiento).

4.5.1. Estabilidad por Pares

El concepto de estabilidad por pares introducido por Jackson y Wolinsky (1996), es una extensión natural del concepto de equilibrio de Nash pero observesé que va más allá de este y solamente el concepto de Nash no es una buen herramienta de análisis.

Definición 4.26 (Estabilidad por pares)**.** Decimos que una red (N, g) es estable por pares si:

1. Ningún agente puede beneficiarse de romper con un enlace en el que está directamente involucrado.

2. Ningún par de agentes puede beneficiarse (por lo menos uno de ellos estrictamente) de crear un nuevo enlace.

Algunas propiedades importantes (para las demostraciones véase Jackson [2008]).:

1. Cuando el costo es bajo existe una única red estable por pares que es la red que tiene el máximo número de enlaces.

2. Cuando el costo es mayor, la estrella es estable por pares pero hay muchas más estructuras de redes que son estables. Por ejmplo, cuatro jugadores conectados en un círculo puede ser estable en el rango de costos en el que la estrella es estable y eficiente.

3. Esto pone de manifiesto la posibilidad de que en equilibrio, las redes no necesariamente son eficientes.

4. Con costos aún mayores la estrella puede ser eficiente pero no estable por pares.

Ahora una vez introducimos funciones de pago o funciones de utilidad de los agentes que participan en una red surgen muchos conceptos útiles para su entendimiento. Por ejemplo, el concepto de eficiencia y optimalidad de Pareto en redes. Como lo mencionamos anteriormente, una red es eficiente si maximiza la suma de las utilidades o funciones de pago de los agentes. Una red se dice que es óptima en el sentido de Pareto si ninguna otra red mejora débilmente a todos los agentes y por lo menos a uno estrictamente. Es claro que toda red eficiente es óptima en el sentido de Pareto.

La siguiente figura muestra un ejemplo de los conceptos introducidos. En la figura salen siete distintas de una red de cuatro nodos. Cada nodo es un individuo y estos están etiquetados por un número del uno al cuatro. Encima o abajo de cada nodo se muestra la utilidad que esa configuración particular de la red le da de utilidad al individuo representado por ese nodo. Por simplicidad, las demás configuraciones posibles de redes con cuatro nodos no se muestran en la figura pero se sobre entiende que cualquier otra que no esté en la figura arroja utilidades análogas a la configuración similar que se encuentre en la figura. La figura muestra ejemplos de redes eficientes, óptima en sentido de Pareto y estables.

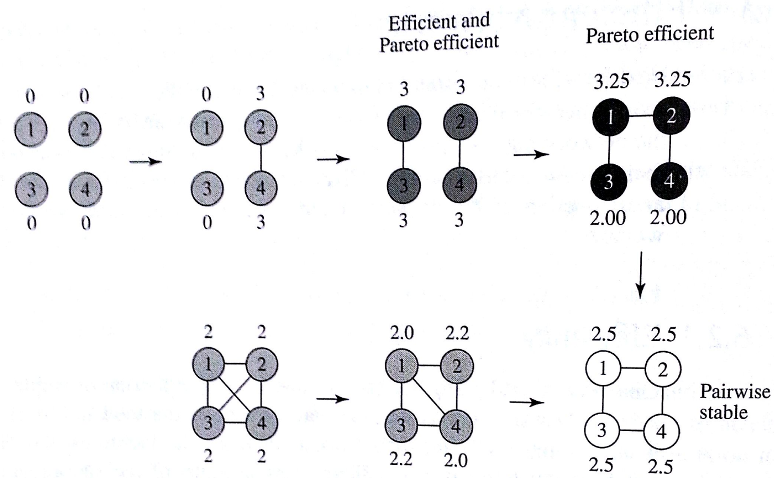


FIGURE 6.1 An example of efficient, Pareto efficient, and pairwise stable networks in a four person society.

Figura 4.8: Ejmeplo de redes eficientes, eficientes de Pareto y estables por pares.

Por último una pregunta importante es qué tan distante en términos de utilidad está un equilibrio de la utilidad de eficiencia. Puesto que existen varias redes en equilibrio, se pueden distinguir dos casos. (1) Utilidad de eficiencia dividido por la menor utilidad en equilibrio (denominado precio de la anarquía). (2) Utilidad de eficiencia dividido por mayor utilidad en equilibrio (denominado precio de la estabilidad). Obsérvese que el precio de la anarquía es siempre superior al precio de estabilidad.

4.5.2. Juegos Gráficos

El modelo anterior es un modelo de formación estartégica de redes. En esta sección vamos a estudiar algunos modelos básicos de comportamiento estartégico en redes predefinidas. Estos modelos se conocen como modelos gráficos. Estos juegos sirven como prototipo para la modelación de interacciones sociales en la que los agentes están expuestos a presiones sociales o de grupo (*peer effects*) como fumar, consumir ciertos bienes, pertencer a un club solcial, etc. Así mismo, da luces sobre actividades que tengan externalidades como, la empresa con la que tenemos nuestro servicio de telefonía móvill, o comprar cierta tecnología colaborativa, etc.

Sea (N, g) una red donde N representa los jugadores. Cada jugador i tiene la posibilidad de tomar una acción binaria $x_i \in \{0, 1\}$ en cada uno de sus nodos. La utilidad de cada agente es $u_i(x_i, x_{N_i(g)})$. Es decir la utilidad de un agente depende no solamente de su acción sino también de la acción de todos sus vecinos.

Ejemplo 4.27 (Juegos con acciones complementarias de umbrales)**.** Supongamos que:

$$u_i(1, x_{N_i(g)}) > u_i(0, x_{N_i(g)}), \text{ sí y sólo sí } \sum_{j \in N_i(g)} x_j \geq t_i$$

donde t_i es el umbral de cada jugador (parte de la definición de su las funciones de utilidad).

Ejemplo 4.28 (Bienes públicos)**.** Supongamos que las funciones de utilidad satisfacen:

$$\begin{aligned} u_i(1, x_{N_i(g)}) &= 1 - c, 0 < c < 1 \\ u_i(0, x_{N_i(g)}) &= 1, \text{ si existe j tal que } j \in N_i(g), x_j = 1 \\ u_i(0, x_{N_i(g)}) &= 0 \text{ si para todo j tal que } j \in N_i(g), x_j = 0. \end{aligned}$$

Intuitivamente, cada agente prefiere que se tome la acción a no tomarla, pero prefiere que otros lo hagan en vez de él hacerlo.

4.6. Existencia del Equilibrio Walrasiano

En esta sección extendemos a Aumann (1966) a economías con mercados de activos incompletos. El objetivo principal es mostrar que, inclusive en economía con mercados de activos incompletos, se puede prescindir del supuesto de convexidad en las preferencias siempre y cuándo existan muchos otros agentes(un continuo de agentes)

Considere una economía con dos periodos $t \in \{0, 1\}$ e incertidumbre sobre la realización del estado de la naturaleza en el segundo periodo $t = 1$. Hay un conjunto finito $\sim$ de posibles estados de la naturaleza que pueden observarse en $t = 1$, a saber $\mathbb{S} = \{1, ..., S\}$ y $s = 0$ denota el único estado de la naturaleza en el periodo $t = 0$. Sea $\mathbb{S}^* = \mathbb{S} \cup 0$.

Hay un conjunto finito $\mathbb{L} = \{1, ..., L\}$ de commodities perfectamente divisibles y perecederos que pueden ser demandados para consumo en mercados a la vista en cada estado de la naturaleza en el segundo periodo. Denotamos por $p_s \in \mathbb{R}_+^L$ el vector de precios a la vista de commodities en la economía.

Existe un conjunto finito $\mathbb{J} = \{1, ..., J\}$ de activos numerarios que pagan en unidades del primer commodity. Una unidad del activo $j \in J$ paga la cantidad $N_{s,j}$ de unidades del *commodity* 1 en caso de que se observe el estado de la naturaleza $s \in \mathbb{S}$. Los activos están disponibles en el primer periodo en un mercado *spot* perfectamente competitivo de activos. Sea $q \in \mathbb{R}^J$ el vector unitario de precios de activos en $t = 0$ y se supone que la oferta neta de activos es cero. Una asignación para un agente es un vector $(x, z) \in \mathbb{R}_+^{L\times S} \times \mathbb{R}^J$ donde x denota la demanda de extitcommodities en el segundo periodo en cada estado y z denota la demanda por activos financieros en el primer periodo.

Hay un continuo medible de agentes representado por $[0, 1]$ (dotado con la medida de Lebesgue) que buscan reasignar su ingreso a través del tiempo usando activos financieros. Por tanto, dados precios (p, q), cada agente $t \in [0, 1]$ (t repetido). quiere maximizar una función objetivo $U^t : \mathbb{R}_+^{L\times S} \to \mathbb{R}$ (que representa sus preferencias sobre el consumo) escogiendo una asignación de su conjunto de presupuestal $B^t(p, q)$, definido como el conjunto de asignaciones financieras y de consumo $(x, z) \in \mathbb{R}_+^{L\times S} \times \mathbb{R}^J$ que satisfacen

$$\sum_{j\in J} q_j z_j \leq 0; \qquad\qquad p_s x_s \leq p_s w_s^t + \sum_{j\in J} p_{s,1} N_{s,j} z_j, \;\; \forall s \in S.$$

donde $w^t := (w_s^t; s \in S) \in \mathbb{R}_+^{L\times S}$ es la dotación inicial de *commodities* del agente $t \in [0, 1]$.

Dado que las restricciones al comercio financiero y de consumo son homogeneas de grado cero en (p, q), se asumirá, sin pérdida de generalidad, que $(p, q) \in \triangle^S \times Q$, donde $\triangle = \left\{p \in \mathbb{R}_+^L : \|p\| = 1\right\}$, $Q = \left\{q \in \mathbb{R}_+^J : \|q\| = 1\right\}$, y donde, dado $x \in \mathbb{R}^m$, $\|x\| \equiv \sum_{i=1}^{m} |x_i|$.

Sea $\mathbb{U}(\mathbb{R}_+^{L\times S})$ el espacio de todas las funciones de utilidad con valores en los reales sobre $\mathbb{R}_+^{L\times S}$ con la topología de la norma supremo.

Definición. Un equilibrio de la economía $\mathcal{E}$ está dado por un vector de precios $(\overline{p}, \overline{q}) \in \triangle^S \times Q$, conjuntamente con asignaciones financieras y de consumo $\left(\overline{x}^t, \overline{z}^t\right) \in \mathbb{R}_+^{L\times S}$ para cada agente $t \in [0, 1]$, de forma que

(1) Para cada agente $t \in [0, 1]$,

$$\left(\overline{x}^t, \overline{z}^t\right) \in \text{argmax}_{(x,z)\in B^t(\overline{p},\overline{q})} U^t(x);$$

(2) Los mercados financieros y de *commodities* se vacían. Es decir,

$$\int_{[0,1]} \overline{x}_s^t dt = \int_{[0,1]} w_s^t dt, \ \ \forall s \in S; \qquad\qquad \int_{[0,1]} \overline{z}_j^t dt = 0, \ \ \forall j \in J.$$

Una técnica estándar para probar la existencia de equilibrio competitivo con mercados de activos incompletos es truncar el espacio de activos y *commodities* (ver Geanakoplos y Polemarchakis (1986)), probar la existencia de un equilibrio para esta economía truncada y luego, al relajar sucesivamente estas restricciones, mostrar que la secuencia de equilibrios de las economías restringidas converge a un equilibrio en la economía original (no restringida). En aras de enfocarnos en la aplicación del teorema generalizado de juegos continuos en la sección anterior, mostraremos como aplicar dicho teorema a una economía truncada. Sea $K \subset \mathbb{R}^{S\times L} \times \mathbb{R}^A$.

Para cada individuo $t \in [0,1]$, considere la restricción presupuestal truncada $B^t(p,q;K) = B^t(p,q) \cap K$.

Un equilibrio competitivo K-truncado para la economia $\mathcal{E}$ está dado por un vector de precios $(\overline{p},\overline{q}) \in \triangle^S \times Q$, conjuntamente con asignaciones financieras y de consumo $\left(\overline{x}^t,\overline{z}^t\right) \in \mathbb{R}_+^{L\times S}$ para cada agente $t \in [0,1]$, de forma que los agentes maximizan su función objetivo sujetos a sus restricciones presupuestales truncadas y los mercadaos financieros y de *commodities* se vacían.

El punto más importante del siguiente teorema es que, aunque algunas funciones de utilidad no son necesariamente cuasi-cóncavas, podemos probar la existencia de un equilibrio usando nuestro resultado principal sobre la existencia de equilibrios en estrategias puras en juegos continuos no-convexos generalizados con jugadores atómicos. La prueba es en el mismo espíritu de Debreu (1952) donde se muestra la existencia de un equilibrio competitivo en el modelo estándar de Arrow-Debreu.

Teorema 4.29. Considere una economía $\mathcal{E}$ y sea $K = [-k_1,k_1]^{S\times L} \times [-k_0,k_0]^J$ un rectángulo compacto centrado en el orígen. Suponga que se satisfacen las siguientes condiciones

- Para todo $t \in [0,1], w^t >> 0$ y existe $W \in \mathbb{R}$ tal qué $\left\|w^t\right\| \leq W$.
- Para cualquier agente $t \in [0,1]$, la función de utilidad U^t es continua y estrictamente creciente (i.e., $U^t \in \mathbb{U}(\mathbb{R}_+^{L\times S})$) y el mapa $t \rightarrow U^t$ es medible.

- Los pagos son no negativos. Es decir $N > 0$ ($N_{s,j} \geq 0; N_{s,j} \neq 0$).
- Se tiene $k_0 > W$ y $k_1 > W + \|N\| k_0$.

Entonces, existe un equilibrio K-truncado para la economía $\mathcal{E}$.

PRUEBA. Se divide la prueba en tres pasos.

Paso 1. Existencia del equilibrio en un juego abstracto generalizado.

Considere un juego $\mathcal{G}_K(T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t\in T}, h)$ donde el conjunto de jugadores es $T = [0,1] \cup S^*$. Para cada jugador $t \in [0,1]$, el espacio de acciones es $K_t = K$. Para el jugador atómico $s = 0$, sea $K_0 = Q$ y para $s \neq 0$, sea $K_s = \triangle$. Denotamos por (x^t, z^t) las acciones del jugador $t \in [0,1]$, por q las acciones de $s = 0$, y por p_s las acciones del jugador s, con $s \in S$.

Sea $h : K \to K$ la función identidad, entonces el espacio de mensajes es:

$$M = \left\{ \int_{[0,1]} (x^t, z^t) dt; \quad (x^t, z^t) : [0,1] \to K, \text{is measurable} \right\}.$$

La correspondencia de estrategias admisibles para un jugador $t \in [0,1]$, $\Gamma_t : M \times \triangle^S \times Q \twoheadrightarrow K$ está definida por $\Gamma_t(m,p,q) = B^t(p,q;K)$. Para $s = 0$ defina $\Gamma_s : M \times \triangle^S \twoheadrightarrow K_0$ por $\Gamma_s(m,p) = K_0$ y para $s \neq 0$ defina $\Gamma_s : M \times \triangle^{(S-1)} \times Q \twoheadrightarrow K_s$ por $\Gamma_t(m, p_{-s}, q) = K_s$ donde p_{-s} equivale al vector p omitiendo p_s.

Para terminar la descripción del juego, definimos la utilidades para jugadores atómicos de la siguiente forma:

$$U_s(m,p,q) = q \cdot \int_{[0,1]} z_j^t dt, \quad \text{if } s = 0;$$

$$U_s(m,p,q) = p_s \cdot \int_{[0,1]} (x_s^t - w_s^t) dt, \quad \text{if } s \in S.$$

Por definición, los espacios de estrategias de los jugadores son no vacíos y compactos. La suposición (a) en el enunciado del teorema 4.29 aseguran que para cualquier $t \in [0,1]$ la correspondencia de estrategias admisibles Γ_t es continua con valores no-vacíos y compactos. Dado que $\triangle$ y Q son no-vacíos, compactos y convexos, se sigue que, para cualquier $s \in S^*$, la correspondencia Γ_s es continua y tiene valores no-vacíos, compactos y convexos. Las funciones objetivo son, por hipótesis, continuas y, para cualquier $s \in S^*$, U_s es lineal respecto a su propia estrategia y, por lo tanto, cuasi-cóncava respecto a esta. Por lo tanto las condiciones (i) y (ii) del [**?**] se satisfacen. Las condiciones (iii) y (iv) del Teorema 1 se satisfacen trivialmente, puesto que todos los jugadores en $[0,1]$ tienen el mismo espacio de acciones. Además, por el supuesto (b), el mapa $t \to U_t$ es medible; por lo que la condición (v) del Teorema 1 se satisface también.

Concluímos que el juego $\mathcal{G}(T,(K_t,\Gamma_t,u_t)_{t\in T},h)$ tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Paso 2. Dado K que satisfaga la condición (iv), en cualquier equilibrio de Nash en estrategias puras $\mathcal{G}(T,(K_t,\Gamma_t,u_t)_{t\in T},h)$, cada jugador $t\in[0,1]$ tiene activa su restricción presupuestal.

Si para algún jugador $t\in[0,1]$ la restricción presupuestal para el primer periodo no está activa, entonces $\overline{z}^t=(k_0,...,k_0)\in\mathbb{R}^J$. De hecho, en otro caso, el jugador t puede incrementar su consumo en $t=1$ (como consecuencia de la no-trivialidad del pago de activos, i.e., la condición (c) en el enunciado del Teorema). Se sigue que, si algún agente t tiene una restricción presupuestal inactiva en el primer periodo, entonces

$$W = W(\|\overline{q}\|) < \sum_{j\in J}\overline{q}_j k_0 \leq 0,$$

una contradicción.

Paso 3. Dado K que satisfaga la condición (iv), cualquier equilibrio de Nash en estrategias puras del juego $\mathcal{G}(T,(K_t,\Gamma_t,u_t)_{t\in T},h)$ es un equilibrio $K-$truncado de la economía $\mathcal{E}$.

Sea $\big((\overline{p},\overline{q});((\overline{x}^t,\overline{z}^t);t\in[0,1])\big)$ un equilibrio de Nash en estrategias puras de $\mathcal{G}(T,(K_t,\Gamma_t,u_t)_{t\in T},h)$.

Como consecuencia de los pasos anteriores, se sigue de la desigualdad (2) que,

$$q\int_{[0,1]}\overline{z}^t dt \quad \leq \quad 0,\ \ \forall q\in Q. \tag{4.41}$$

Evaluando la desigualdad anterior en los vectores canónicos de $\mathbb{R}^J_+$ (Los cuales pertenecen a Q), obtenemos que

$$\int_{[0,1]}\overline{z}^t_j dt \leq 0,\ \ \forall j\in\mathbb{J}.$$

También para $s \in S$,

$$\overline{p}_s \cdot \int_{[0,1]} (\overline{x}_s^t - w_s^t) dt = \sum_{j \in \mathbb{J}} N_{s,j} \int_{[0,1]} \overline{z}_j^t dt \leq 0, \ \ \forall j \in \mathbb{J}.$$

Se sigue de la desigualdad que

$$p_s \cdot \int_{[0,1]} (\overline{x}_s^\theta - w_s^\theta) dt \leq 0, \ \forall s \in S, \forall p_s \in \triangle,$$

Lo cual implica que, para cualquier $(l, s) \in \mathbb{L} \times \mathbb{S}$,

$$\int_{[0,1]} (\overline{x}_{s,l}^t - w_{s,l}^t) dt \leq 0.$$

Dado que, para cada $t \in [0,1]$, la función de utilidad U^t es estrictamente creciente, los precios de extitcommodities y activos son estrictamente positivos. De hecho, si existiera un *commodity* $l \in L$ tal que $\overline{p}_{s,l} = 0$, para algún $s \in S^*$, entonces cada jugador $t \in [0,1]$ haría $\overline{x}_{s,l}^t = k_1$ y por tanto

$$k_1 = \int_{[0,1]} \overline{x}_{s,l}^t dt \leq \int_{[0,1]} w_{s,l}^t dt \leq W < k_1,$$

una contradicción. Análogamente, si $\overline{q}_j = 0$, para algún $j \in \mathbb{J}$, entonces cada agente $t \in [0,1]$ haría $\overline{z}_j^t = k_0$ y por tanto

$$k_0 = \int_{[0,1]} \overline{z}_j^t dt \leq 0,$$

una contradicción también.

Dado que $(\overline{p}, \overline{q}) \gg 0$ y las restricciones presupuestales de los individuos están activas para cada estado de la naturaleza $s \in S^*$, sigue que

$$\int_{[0,1]} (\overline{x}_{s,l}^t - w_{s,l}^t) dt = 0, \ \ \forall (s,l) \in \mathbb{S}^* \times \mathbb{L} \tag{4.42}$$

$$\int_{[0,1]} \overline{z}_j^t dt = 0, \ \ \forall j \tag{4.43}$$

De las condiciones (1), (5) y (6) concluímos que el equilibrio en estrategias puras del juego generalizado $\mathcal{G}(T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t \in T}, h)$ es un equilibrio $K-$truncado equilibrium para la economía $\mathcal{E}$. $\square$

4.7. Aprendizaje de Máquinas

El problema central del aprendizaje de máquinas, una subárea de las ciencias de la computaciónón y la inteligencia artificial, es encontrar patrones en un conjunto de datos observados. Por ejemplo, dada una base de datos de registros médicos de un conjunto de pacientes, determinar las características (edad, sexo, resultados de exámenes médicos, factores hereditarios, comorbilidades, etc,) que tienen los pacientes que tienen cáncer, en comparación con los que no tienen cáncer. Una vez se aprende esas características se podría tomar las caracerísticas de un nuevo paciente y predecir si tiene o no cáncer o quizás asignarle una probablilidad de tenerlo. Este, que es un problema típico de análisis supervisados puede formalizarse así. Sea $\{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$ una muestra de n datos observados de, por ejemplo, n pacientes. Para cada paciente i observamos sus características o atributos x_i, posiblemente un vector m-dimensional con componentes continuas y/o categóricas, y observamos $y \in \{0, 1\}$ una variable dicótoma que es la que queremos explicar en función de los atributos (i.e., no tener o tener cáncer). El problema de aprendizaje consiste en construir una función, $f : X \to Y$ donde X es el espacio en donde estan las caracerísticas ($x_i \in X$) y $Y = \{0, 1\}$ de tal forma que se satisfaga algún criterio de optimalidad. Por ejemplo en el caso en discusión es común utilizar como criterio de optimalidad el error de clasificiación. Más precisamente sea $L : Y \times Y \to \{0, 1\}$ la función de pérdida estándar donde $L(y, \hat{y}) = 0$ si $y = \hat{y}$ y uno en caso contrario. Entonces el problema de construir una función, $f : X \to Y$ se puede plantear como:

$$\min_f \sum_{i=1}^{n} L(f(x_i), y_i) \tag{4.44}$$

Evidentemente, sin restricciones adicionales este problema tiene una solución trivial en la que $f(x_i) = y_i$ y en los $x \neq x_i$, f toma cualquier valor. Sin embargo, esta solución es probablemente muy poco útil para clasificar ejemplos nuevos al haberse sobreajustado a la muestra de entrenamiento. Una forma de reducir ese sobreajuste en el entrenamiento es restringiendo el conjunto de funciones candidatas a resolver el problema. Es decir, imponiendo más estructura sobre la funciones. Por ejemplo, f puede ser simplemente una función linea de y contra x (i.e., $f(x) = \beta_0 + \beta \cdot x$) o funciones complejas altamente no lineales como las redes neuronales. En cualquier caso la idea es restringir la familia de funciones a un conjunto $f(x, \theta)$ parametrizado por un parámetro θ. A continuación planteamos un problema de aprendizaje que se puede interpretar como un juego de suma cero. En este, básicamente aplica la teoría que hemos desarrollado anteriormente para juegos de suma cero (extendiendo la teoría al caso de conjuntos de acciones continuos).

Sea p_{datos} la verdadera distribución de los datos en un espacio x (i.e., distribución del ingreso de los colombianos). Sea p_g la distribución de un generador de datos en el espacio X (i.e., se generan datos del ingreso de los colombianos a partir de unas encuestas o usando un modelo generador como una red neuronal que requiere. Considere como generador de los datos en x un red neuronal G que toma valores z de un espacio Z, $z \in Z$ y genera valores x (los valores z se generan con una distribución conveniente p_z). Finalmente sea D una función de aprendizaje (discriminador) que toma x y arroja la probabilidad $D(x)$ de que los datos vengan de p_{datos} (i.e., $1 - D(x)$ es la probabilidad de que sean generados por p_g). Ahora la idea es entrenar el discriminador D para maximizar la probabilidad de asignar la marca correcta de los ejemplos x y minimizar la posibilidad de que marcar de forma equivocada ejemplos del generador G como verdaderos:

$$\max_D \; \mathbb{E}_{x\sim p_{\text{data}}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z\sim p_z(z)}[\log(1 - D(G(z)))]$$

Simútaneamente, se entrena el generador G para minimizar que los ejemplos generados por G sean detectados por D:

$$\min_G \; \mathbb{E}_{z\sim p_z(z)}[\log(1 - D(G(z)))]$$

que es equivalente a:

$$\min_G \; \mathbb{E}_{x\sim p_{\text{data}}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z\sim p_z(z)}[\log(1 - D(G(z)))]$$

Esto sugiere que G y D pueden interpretarse como las acciones de dos jugadores (el generador y el discriminador respectivamente) en un juego de suma cero con función de pagos pago para el jugador D:

$$V(D, G) = \mathbb{E}_{x\sim p_{\text{data}}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z\sim p_z(z)}[\log(1 - D(G(z)))]$$

Por lo tanto el problema se puede plantear como:

$$\max_D \min_G V(D, G) = \min_G \max_D V(D, G)$$

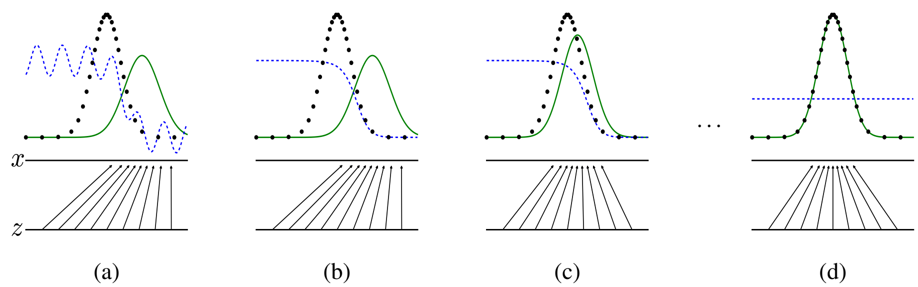
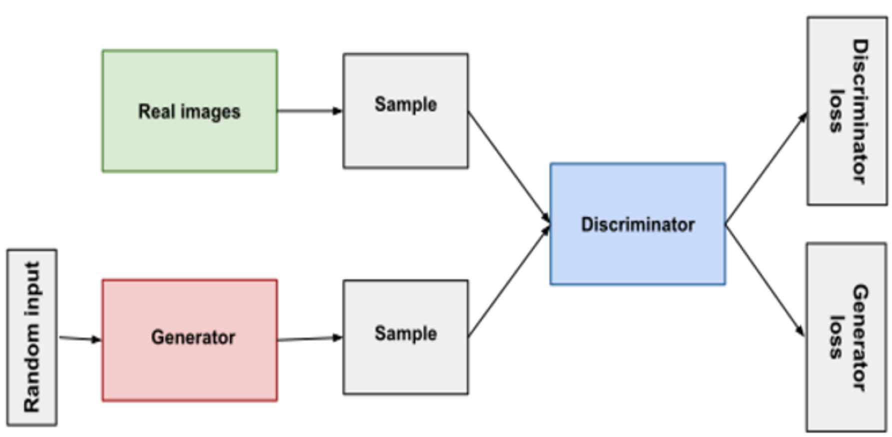


Figure 1: Generative adversarial nets are trained by simultaneously updating the **d**iscriminative distribution (D, blue, dashed line) so that it discriminates between samples from the data generating distribution (black, dotted line) $p_{\boldsymbol{x}}$ from those of the **g**enerative distribution p_g (G) (green, solid line). The lower horizontal line is the domain from which $\boldsymbol{z}$ is sampled, in this case uniformly. The horizontal line above is part of the domain of $\boldsymbol{x}$. The upward arrows show how the mapping $\boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{z})$ imposes the non-uniform distribution p_g on transformed samples. G contracts in regions of high density and expands in regions of low density of p_g. (a) Consider an adversarial pair near convergence: p_g is similar to p_{data} and D is a partially accurate classifier. (b) In the inner loop of the algorithm D is trained to discriminate samples from data, converging to $D^*(\boldsymbol{x}) = \frac{p_{\text{data}}(\boldsymbol{x})}{p_{\text{data}}(\boldsymbol{x})+p_g(\boldsymbol{x})}$. (c) After an update to G, gradient of D has guided $G(\boldsymbol{z})$ to flow to regions that are more likely to be classified as data. (d) After several steps of training, if G and D have enough capacity, they will reach a point at which both cannot improve because $p_g = p_{\text{data}}$. The discriminator is unable to differentiate between the two distributions, i.e. $D(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}$.



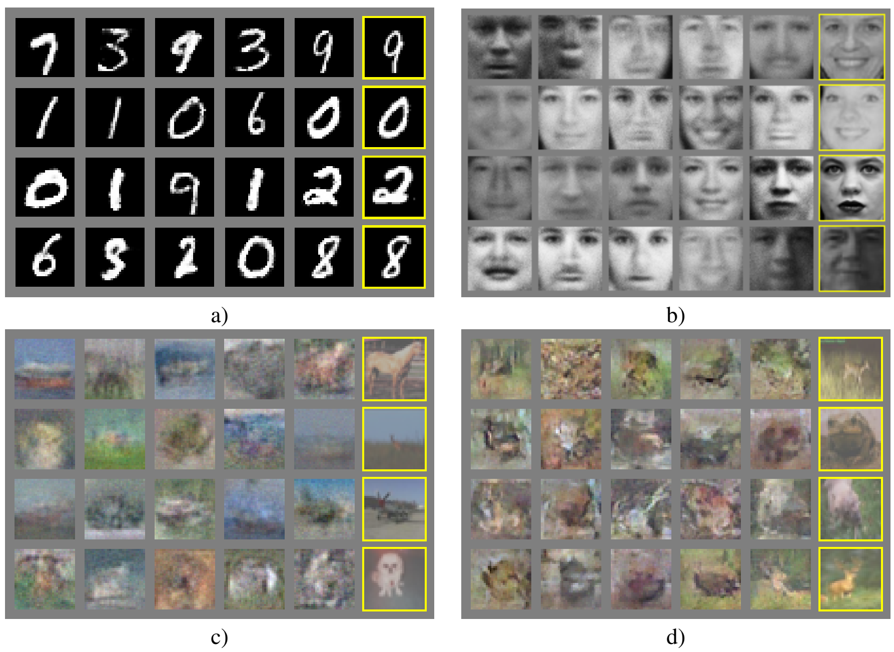


Figure 2: Visualization of samples from the model. Rightmost column shows the nearest training example of the neighboring sample, in order to demonstrate that the model has not memorized the training set. Samples are fair random draws, not cherry-picked. Unlike most other visualizations of deep generative models, these images show actual samples from the model distributions, not conditional means given samples of hidden units. Moreover, these samples are uncorrelated because the sampling process does not depend on Markov chain mixing. a) MNIST b) TFD c) CIFAR-10 (fully connected model) d) CIFAR-10 (convolutional discriminator and "deconvolutional" generator)

Ejercicios

1. Considere una industria con N firmas simétricas que produce un bien homogéneo. El costo de producción es $C = cq+F$ donde q es la cantidad producida, c el costo marginal y F un costo fijo. La demanda agregada esta caracterizada por $p = 1-Q$ donde p es el precio y Q es la demanda agregada.

   a) Plantear el problema de competencia a la Cournot.
   Cada firma $i \epsilon \{1, ..., N\}$ soluciona el siguiente problema de maximización:

   $$\max_{q_i \epsilon \mathbb{R}_+} \pi_i = Pq_i - cq_i - F$$

   Es decir, cada firma i elige una cantidad (q_i) no negativa que maximiza su función de beneficios.

   b) Calcular el equilibrio de Nash simétrico, y la cantidad agregada y el precio en equilibrio.
   Se reemplaza la demanda $P = 1 - Q = 1 - \sum_{i=1}^{N} q_i$ en la función de beneficios de la firma i, $\pi_i = Pq - cq_i - F$:

   $$\pi_i = \left(1 - \sum_{i=1}^{N} q_i\right) q_i - cq_i - F$$

   Se deriva esta expresión respecto a q_i y se iguala a 0 para hallar una función de reacción de la firma i a cualquier cantidad (estrategia) conjunta q_{-i}:

   $$\begin{aligned} \frac{d\pi_i}{dq_i} &= 1 - \sum_{i=1}^{N} q_i - q_i - c = 0 \\ q_i &= \frac{1 - c - \sum_{j \neq i} q_j}{2} \end{aligned}$$

   Dado que se pregunta por el equilibrio simétrico, se supone que todas las firmas actúan de igual forma, por lo que $q_i = q_j = q$:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1-c-q(N-1)}{2} \\ Nq+2q-q &= 1-c \\ q &= \frac{1-c}{N+1} \end{aligned}$$

Note que para que $q\epsilon\mathbb{R}_+$ y para que el costo marginal sea no negativo, se necesita que $c\epsilon\left[0,1\right]$. Bajo este equilibrio simétrico se tiene que la cantidad agregada es:

$$Q = \frac{N\left(1-c\right)}{N+1}$$

y el precio de equilibrio es:

$$\begin{aligned} P &= 1-\frac{N}{N+1}\left(1-c\right) \\ P &= \frac{1+cN}{1+N} \end{aligned}$$

c) Mostrar que cuando el número de firmas N aumenta, el precio de equilibrio disminuye y la cantidad producida aumenta. Esto implica que el excedente del consumidor aumenta con el número de firmas.

Para ver esto note que, dado que $c\epsilon\left[0,1\right]$:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dN} &= \frac{c(1+N)-(1+cN)}{(1+N)^2} \\ \frac{dP}{dN} &= \frac{(c-1)}{(1+N)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dN} &= (1-c)\,\frac{1+N-N}{(1+N)^2} \\ \frac{dQ}{dN} &= \frac{(1-c)}{(1+N)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

d) Calcular el beneficio de las firmas y el beneficio agregado de todas las firmas.

Se reemplaza el precio ($P = \frac{1+cN}{1+N}$) y la cantidad $\left(q = \frac{1-c}{N+1}\right)$ de equilibrio en la función de beneficios de la firma i, $\pi_i = Pq_i - cq_i - F$:

$$\begin{aligned}
\pi_i &= \left(\frac{1+cN}{N+1}\right)\left(\frac{1-c}{N+1}\right) - c\left(\frac{1-c}{N+1}\right) - F \\
\pi_i &= \left(\frac{1-c}{N+1}\right)\left[\left(\frac{1+cN}{N+1}\right) - c\right] - F \\
\pi_i &= \left(\frac{1-c}{N+1}\right)\left(\frac{1+cN-cN-c}{N+1}\right) - F \\
\pi_i &= \left(\frac{1-c}{N+1}\right)^2 - F
\end{aligned}$$

El beneficio agregado de todas las firmas está dado por:

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = N\left(\frac{1-c}{N+1}\right)^2 - NF$$

e) Mostrar que el beneficio agregado de las firmas es decreciente en el número de firmas.

Para ver esto note que, dado que $N \epsilon \mathbb{N}$:

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^{N}\pi_i\right)}{dN} = (1-c)^2\left(\frac{(1-N)}{(N+1)^3}\right) - F < 0$$

f) ¿Qué mensaje nos deja este modelo sobre una política que busca maximizar el número de firmas en una industria?

Este modelo sugiere que en un mercado en el que las firmas compiten a través de cantidades, adoptar una política que busca maximizar el número de firmas de una industria resulta beneficioso para los consumidores. Lo anterior debido a que un incremento en el número de firmas resulta en una caída de los precios y en un aumento de la cantidad, por lo que incrementará el excedente del consumidor. Sin embargo, el costo de asumir este tipo de política es que la mejora en los consumidores se da a expensas de los beneficios de las empresas, que a medida que enfrentan más competencia, pierden participación en el mercado.

2. Una aplicación de la teoría de juegos a la política económica (basado en Brams (2012)). Considere una situación en la que se desea construir una vía pública y se discute la contribución de los involucrados. Participa un individuo con un nivel de riqueza considerable (J1) y el resto del público con un nivel de riqueza común (J2) . Suponga que es de esperarse que ambas partes contribuyan para poder llevar a cabo la construcción de la vía pública, en ello cada parte tiene dos estrategias a seguir: contribuir (C) o no contribuir (NC). La utilidad asociada a cada posible estrategia conjunta se denota en la tabla.

1\2	C	NC
C	4,4	1,5
NC	5,1	2,2

En primer lugar, es de observar que dado que la estrategia NC domina estrictamente a C para ambos jugadores, estos tienen incentivos a no contribuir, puesto que de igual forma obtendrán beneficios mayores que si lo hicieran, independientemente de lo que haga el otro. A este concepto se le denomina "free-riders".

3. Juego del gallina (basado en Shubik (1984)). Dos pilotos de avión dirigen sus areonaves en la msima línea recta, uno en sentido sur-norte y otro en sentido norte-sur. En el momento en el que la colisión es inminente, si uno de los dos pilotos desvía el rumbo de su avión a la derecha o izquierda (D) entonces este es considerado como gallina y obtiene un pago menor al del otro piloto, en el caso en que ambos se desvían, ningunoo obtiene un pago y cuando ninguno se desvía (ND) la colisión genera un pago mucho menor a ambos jugadores. La matriz de pagos de esta situación es la siguiente:

1\2	ND	D
ND	-10,-10	5,-5
D	-5,5	0,0

Encuentre el equilibrio de Nash de este juego.

En este caso, los equilibrios de Nash en estrategias puras son $EN = \{(L,R),(R,L)\}$. Adicional al anterior equilibrio, existe otro en estrategias mixtas: $\sigma^* = (1/2, 1/2)$. Se puede apreciar que en cada equilibrio en estrategias puras, el pago de un jugador es negativo y el otro es positivo. En el equilibrio en estrategias mixtas el pago es negativo para ambos, y por lo tanto no es óptimo, pues ambos jugadores podrían coordinar y llegar a un pago estrictamente superior para ambos que se obtendría al jugar (D,D).

4. (Basado en Motta). Supongamos que n firmas compiten en un mercado para vender un bien homogéneo. Suponga que kn firmas son idémticas y tiene costos marginales (constantes) altos c_h y que $(1-k)n$ firmas son idénticas y tienen costos marginales (constantes) bajos c_l, $(c_h > c_l)$, donde $k \in (0,1)$. Sea H el conjunto de firmas con costos marginales altos y L el conjunto de firmas con costos marginales bajos. La oferta total Q se puede escribir como: $Q = \sum_{i \in L} q_i + \sum_{i \in H} q_i$ donde q_i son los niveles de producción de cada firma y supongamos que la función de demanda es $p = 1 - Q$.

   a) Escribir la función de beneficios de cada firma.
   b) Calcular el equilibrio de Nash simétrico (el mismo nivel de producción entre firmas del mismo tipo) cuando las firmas compiten a la Cournot.
   c) Mostrar que entre mayor sea el número de firmas más difícil es que las firmas con costos marginales altos produzcan cantidades positivas del bien.
   d) Cuál es su intepretación de estos resultados?
   e) Ahora suponga que las firmas con costos marginales altos no participan del mercado. Calcule el nuevo equilibrio.

5. Ese este equilibrio mejor o peor para los consumidores?

6. (Basado en Motta). Supongamos que J firmas identicas compiten en un mercado por un bien homogéneo.

   Vamos a suponer que los costos de las firmas son:

$$c(q^j) = cq^j + F \tag{4.45}$$

   donde $c \geq 0$ y q^j es el nivel de producción de la firma j y F es un costo fijo.

Supongamos que la demanda agregada inversa es lineal y la podemos escribir como:

$$p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} q^j \tag{4.46}$$

donde a y b son positivos.

Por lo tanto, los beneficios de una firma j son:

$$\Pi^j(q^1, ...q^J) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} q^j\right) q^j - cq^j - F. \tag{4.47}$$

a) Calcualr el equilibrio (simétrico) de Nash en Competencia a la Cournot.

b) Calcular los beneficios individuales en equilibrio de cada firma y los beneficios agregados.

c) Mostrar que los beneficios agregados de las firmas disminuyen con el número de firmas.

d) Cuál es su intepretación de este fenómeno.

Referencias

Brams, S. J. (2012). Game theory and the humanities : bridging two worlds. Cambridge, Massachusetts : MIT Press, 2012.

Shubik, M. (1984). Game theory in the social sciences : concepts and solutions. Cambridge, MA ; London : MIT Press, 1984.