

Capítulo 1

Juegos estratégicos¹

En este capítulo introducimos formalmente el modelo que utilizaremos para estudiar las interacciones estratégicas en un contexto estático con información completa. Este modelo se conoce como el juego en forma normal.

1.1. Juegos en forma normal

Definición 1.1 (Juego en forma normal). Un juego en forma normal es una estructura $G = (N, \{S_i\}_{i=1,\dots,n}, \{\pi_i\}_{i=1,\dots,n})$ donde

1. N es el conjunto de jugadores, $N = \{1, \dots, n\}$.
2. S_i es el conjunto de acciones o estrategias puras para cada jugador².
3. $\pi_i : \prod_{i=1}^n S_i \rightarrow \mathbb{R}$ es la utilidad (pago neto) de cada jugador.

Ejemplo 1.2 (Dilema de los prisioneros). Sea $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{A, C\}$. El pago neto de cada agente lo representamos mediante la siguiente tabla. La convención que vamos a utilizar es que la estrategia del jugador 1 la representan las filas, y las del jugador 2, las columnas. El pago neto del primer jugador es el primer número de cada celda, el del segundo jugador, el segundo.

¹Riascos, A. Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones. Versión 9, 2026.

²Más adelante, cuando estudiemos juegos dinámicos, vamos a hacer una diferenciación entre acciones y estrategias.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Ejemplo 1.3 (Batalla de los sexos). Supongamos que hay dos agentes $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{B, S\}$, $\pi_1, \pi_2 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$. El pago neto de los jugadores lo representamos con la siguiente tabla.

M\H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Ejemplo 1.4 (Juego de conducción). Supongamos que hay dos conductores que, en ausencia de normas de tránsito, deben decidir todos los días por cuál carril (derecho o izquierdo) conducir su carro. Entonces $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{D, I\}$, $\pi_1, \pi_2 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$

M\H	D	I
D	1,1	0,0
I	0,0	1,1

Obsérvese que la batalla de los sexos y el juego de conducción son juegos en los que los jugadores quisieran coordinar sus acciones para obtener un mejor pago.

Ejemplo 1.5 (Juego de revelación). Considere el siguiente juego entre un ser superior (SB) y una persona (P).³ Las estrategias para SB son: $S_{SB} = \{RE, NRE\}$, $S_P = \{CE, NCE\}$. Donde RE y NRE significan respectivamente que SB revela su existencia y que no revela su existencia, y CE , NCE significan respectivamente que P cree o no cree en su existencia.

SB\P	CE	NCE
RE	3,4	1,1
NRE	4,2	2,3

Este ejemplo busca representar de forma explícita las siguientes hipótesis sobre el comportamiento e interacción entre un ser superior y un agente. Por una parte, el primer supuesto es que el principal objetivo de un ser superior es lograr que el agente crea en la existencia de un ser superior. Su

³?

segundo objetivo es que él prefiere no revelar su existencia. Por otra parte, suponemos que el primer objetivo la persona es poder validar su creencia en la existencia o no de un ser superior. Su segundo objetivo es que prefiere creer en la existencia de un ser superior.

Las preferencias de la tabla son apenas una representación posible de estos objetivos. El ser superior prefiere que la persona elija la primera columna y dada la elección de una de las dos columnas, prefiere no revelar su existencia. La persona prefiere comprobar la existencia o no de un ser superior, resultados en la diagonal. Ahora, por fuera de la diagonal, él prefiere creer en la existencia de un ser superior que no creer.

1.2. Soluciones de un juego

Para fijar ideas, en esta sección supongamos que todos los jugadores son *racionales* en el sentido de que sus acciones son una mejor respuesta a sus conjeturas sobre las acciones de los demás. Más adelante consideraremos otras formas de racionalidad. Supongamos también que los jugadores escogen sus estrategias de forma *independiente* de los demás. Además, que todos los jugadores conocen cada uno de los elementos del juego G . Más precisamente, en el juego, la racionalidad de los jugadores y el conocimiento de los mismos es conocimiento común. A lo largo de este libro estudiaremos diferentes niveles de conocimiento y racionalidad de los jugadores. Es decir, qué tipo de racionalidad y conocimiento se supone sobre los demás y si es conocimiento común o no.

La pregunta más fundamental de la teoría de juegos es: ¿cuál es nuestra mejor predicción de la interacción de los agentes en el juego? Es decir, dadas las hipótesis mencionadas anteriormente, ¿qué estrategias consideramos razonables para cada jugador? Esto es lo que denominamos una solución de un juego. Todo concepto de solución de un juego está basado en un supuesto sobre todas las características fundamentales de un problema de decisión con múltiples agentes.

Una solución de un juego es una descripción sistemática del resultado que podríamos esperar de la interacción de los jugadores en el juego. Hay tres conceptos claves que unifican las ideas principales relacionadas con la solución de un juego. Se trata de los conceptos de dominancia, estabilidad y seguridad. El primer concepto está relacionado con la identificación de estrategias que un agente racional no jugaría. El segundo representa un concepto de equilibrio que busca identificar estrategias en las cuales no existen in-

centivos a desviarse, y el tercero identifica estrategias que garantizan cierta utilidad para los jugadores en el peor de los casos.

Notación 1. Sea $S = \prod_{i=1}^n S_i$ el conjunto de estrategias conjuntas de todos los jugadores y para cualquier jugador i sea $S_{-i} = \prod_{j \neq i}^n S_j$. Dada una estrategia conjunta $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ y cualquier jugador i también denotamos la estrategia conjunta s como $s = (s_i, s_{-i})$ donde $s_i \in S_i$ es la estrategia del jugador i y $s_{-i} \in S_{-i}$ es la estrategia conjunta de todos los jugadores con excepción del jugador i .

1.2.1. Dominancia

Existen dos ideas básicas asociadas al concepto de dominancia. La primera es la idea de estrategias dominadas y la eliminación de estrategias dominadas de forma iterada. La segunda es la idea de estrategias racionalizables y la eliminación de estrategias no racionalizables de forma iterada.

1.2.2. Eliminación de estrategias dominadas

Definición 1.6 (Dominancia). Una estrategia $\hat{s}_i \in S_i$ domina débilmente una estrategia $s_i \in S_i$, o s_i es una estrategia débilmente dominada por $\hat{s}_i$, si para todo $s_{-i} \in S_{-i}$:

$$\pi_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i})$$

con desigualdad estricta por lo menos para un s_{-i} . Cuando en la definición anterior podemos sustituir la desigualdad débil por una estricta para todo $s_{-i} \in S_{-i}$ decimos que $\hat{s}_i \in S_i$ domina (estrictamente) la estrategia s_i , o en otras palabras, que s_i es una estrategia dominada (estrictamente) por $\hat{s}_i$.

Nota técnica 1.7. Mientras no se diga lo contrario, el término domina o dominada se utiliza en un sentido estricto.

Ejemplo 1.8. En el siguiente juego, para el agente 1, Y domina a Z .

1\2	A	B	C
X	2,7	2,0	2,2
Y	7,0	1,1	3,2
Z	4,1	0,4	1,3

Observe que $\pi_1(Y, s_2) > \pi_1(Z, s_2)$ para cualquier $s_2 \in S_2$. Es decir:

- $\pi_1(Y, A) = 7 > \pi_1(Z, A) = 4$
- $\pi_1(Y, B) = 1 > \pi_1(Z, B) = 0$
- $\pi_1(Y, C) = 3 > \pi_1(Z, C) = 1$.

Ejercicio 1.9. Demuestre que U es una estrategia dominada débilmente por V.

1\2	T	U	V
L	1,4	7,0	0,2
M	0,0	2,-6	3,5
N	5,1	1,4	4,4

Definición 1.10 (Estrategias dominantes). Una estrategia $\hat{s}_i \in S_i$ es una estrategia dominante débilmente para i si domina débilmente a toda estrategia de i . Decimos que es dominante (estrictamente) si domina (estrictamente) a toda estrategia.

Definición 1.11 (Equilibrio en estrategias dominantes). Cuando cada uno de los jugadores tiene una estrategia dominante estrictamente (débilmente) $\hat{s}_i \in S_i$, decimos que el juego tiene un equilibrio en estrategias dominantes estrictamente (débilmente). Este equilibrio es el perfil de estrategias $\hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_n) \in S$.

Ejemplo 1.12 (Dilema de los prisioneros). En el dilema de los prisioneros cada uno de los agentes tiene una estrategia dominante.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Obsérvese que $\pi_i(A, s_{-i}) > \pi_i(C, s_{-i})$ para todo i y para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.

Ejemplo 1.13 (Batalla de los sexos). En la batalla de los sexos ningún jugador tiene una estrategia dominante.

M\H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Note que $\pi_1(B, B) > \pi_1(S, B)$, sin embargo $\pi_1(B, S) < \pi_1(S, S)$ por lo que ni B domina a S , ni al contrario. De igual manera, para $i = 2$ $\pi_2(B, B) > \pi_2(B, S)$ pero $\pi_2(S, B) < \pi_2(S, S)$.

Ejercicio 1.14. Demuestre que si existe un equilibrio en estrategias dominantes (estrictamente o débilmente) entonces es único.

El equilibrio en estrategias dominantes es un concepto de equilibrio muy fuerte desde el punto de vista estratégico, ya que requiere de la existencia de estrategias dominantes para cada jugador. Sin embargo, es muy débil desde el punto de vista del grado de conocimiento que se supone de los jugadores. El equilibrio en estrategias dominantes estrictamente se basa en una hipótesis de comportamiento débil: los individuos no juegan nunca una estrategia que es dominada. Luego, al existir una estrategia dominante estrictamente, esta es la única a considerar como racional (la hipótesis en el caso de estrategias dominantes débilmente es más discutible como veremos más adelante).

Estas características hacen que este concepto de solución sea muy fuerte y que no exista en muchos ejemplos. La tensión entre los diferentes conceptos de solución, las exigencias desde el punto de vista estratégico de un juego y el conocimiento que se supone de los jugadores será una constante a lo largo de este libro.

Para estudiar más a fondo la idea de condiciones mínimas que debe satisfacer un concepto de solución introduciremos el concepto de estrategias no dominadas iterativamente. El concepto de dominancia sugiere una forma de identificar un conjunto de estrategias en el cual las estrategias del resultado de un juego deberían de estar.

Definición 1.15 (Estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa). Sea $S_i^0 = S_i$ y definamos S_i^k , $k \geq 0$ de la siguiente forma:

$$S_i^{k+1} = \left\{ s_i \in S_i^k : \text{No existe } \hat{s}_i \in S_i^k \text{ tal que } \pi_i(\hat{s}_i, s_{-i}) > \pi_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}^k \right\}$$

y $S_i^\infty = \bigcap_{k=1}^\infty S_i^k$. El conjunto S_i^∞ se denomina el conjunto de estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa del agente i y el conjunto $S^\infty = \prod_{i=1}^N S_i^\infty$ el conjunto de estrategias conjuntas no dominadas estrictamente de forma iterativa del juego G .

Definición 1.16 (Juegos solucionables en estrategias no dominadas iterativamente). Si S^∞ consiste de un sólo elemento, decimos que el juego es solucionable en estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa.

Ejemplo 1.17. Consideremos el juego:

1\2	A	B	C
X	2,7	2,0	2,2
Y	7,0	1,1	3,2
Z	4,1	0,4	1,3

El proceso de eliminación arroja:

$$\begin{array}{l|l}
 S_1^0 = \{X, Y, Z\} & S_2^0 = \{A, B, C\} \\
 S_1^1 = \{X, Y\} & S_2^1 = \{A, B, C\} \\
 S_1^2 = \{X, Y\} & S_2^2 = \{A, C\} \\
 S_1^3 = \{Y\} & S_2^3 = \{A, C\} \\
 S_1^4 = \{Y\} & S_2^4 = \{C\}
 \end{array}$$

Recuerde que, mientras no se diga lo contrario, nos referiremos con estrategia no dominada a cualquier estrategia no dominada en un sentido estricto.

Observemos que el concepto de estrategias no dominadas iterativamente de un juego lo hemos definido únicamente como un proceso de eliminación secuencial de estrategias dominadas estrictamente. Un ejemplo que ilustra los problemas de utilizar estrategias no dominadas débilmente será discutido más adelante.

La definición de dominancia iterativa supone que en cada iteración se eliminan *todas* las estrategias dominadas estrictamente. Esto no es esencial en la definición. En efecto, se puede demostrar que el resultado final es independiente de si se eliminan algunas o todas y del orden en el que se eliminan.⁴

De forma análoga a la definición anterior, podemos definir W_i^k , W_i^∞ y W^∞ utilizando el concepto de estrategias dominadas débilmente. De la definición es implícito que en cada iteración todas las estrategias dominadas débilmente se deberían de eliminar. Ahora, a diferencia de la dominancia estricta, el concepto de supervivencia de estrategias débilmente dominadas iterativamente sí depende de si se eliminan todas las estrategias o no y del orden en el que se eliminan. Los siguientes ejemplos ponen en evidencia estas características.

Ejemplo 1.18 (Eliminación de estrategias dominadas débilmente). Consi-

⁴Véase Osborne and Rubinstein (1994) página 60, para una definición que solo supone que se eliminan algunas estrategias en cada iteración.

dere el siguiente ejemplo:

1\2	L	R
U	5,1	4,0
M	6,0	3,1
D	6,4	4,4

Observe que D domina débilmente tanto a U como a M . Si se empieza el proceso eliminando a U solamente, el resultado es diferente a si se empieza eliminando a M solamente y es diferente a si se eliminan ambas al comienzo. Eliminando a U sobreviven $\{(D, R)\}$. Eliminando a M sobreviven $\{(D, L)\}$. Dominando débilmente a U y a M sobreviven $\{(D, L), (D, R)\}$.

Ejemplo 1.19 (Eliminación de estrategias dominadas débilmente). Considere el siguiente ejemplo:

1\2	W	X	Y
A	1,2	2,3	0,3
B	2,2	2,1	3,2
C	2,1	0,0	1,0

Si aquí se eliminan tanto A como C el resultado es diferente a si se elimina solo C . Si se elimina C sobreviven $\{(B, Y)\}$. Si se elimina A y C sobreviven $\{(B, W), (B, Y)\}$.

Estas características del proceso de eliminación iterativa débil hacen más difícil de racionalizar este proceso como hipótesis de comportamiento. Sin embargo, una forma de hacerlo es la siguiente. Suponga que los jugadores suponen que sus adversarios pueden tener una mano temblorosa. Vamos a ilustrar esto a través de un ejemplo muy sencillo.

Ejemplo 1.20. Considere el siguiente juego.

1\2	A	B
A	1,2	2,3
B	2,2	2,0

La estrategia A es dominada débilmente para el jugador 1. Ahora si el jugador 1 piensa que su adversario va jugar con probabilidad positiva cada una de sus acciones (mano temblorosa) entonces en valor esperado la estrategia A es dominada estrictamente. Observemos que la hipótesis de racionalidad de no jugar estrategias dominadas débilmente es una hipótesis más fuerte que suponer que los jugadores no juegan estrategias dominadas estrictamente.

Ejercicio 1.21 (Subasta al segundo precio con información completa). Considere un juego en el que un conjunto de jugadores (*i.e.*, participantes de una subasta) están ofertando por un único bien que se está subastando. Cada jugador tiene una valoración privada del objeto (*i.e.*, en este contexto esto quiere decir que la valoración que cada agente tiene del objeto no depende de la valoración que los demás tengan del objeto, es independiente) pero esta es conocimiento común de todos los jugadores (*i.e.*, esto es lo que se conoce como información completa, concepto que estudiaremos más adelante). Los agentes deben ofertar de forma simultánea por el bien y gana el que más oferte gana pero paga la segunda oferta más alta (*i.e.*, subasta al segundo precio). Por simplicidad supongamos que no hay empates. El pago para cada jugador es, en caso de ganar, igual a su valoración menos lo que paga. De lo contrario, es cero. Demuestre que la eliminación débil de estrategias dominadas débilmente tiene una predicción muy precisa: gana el jugador que tienen la valoración más alta del objeto.

Ejercicio 1.22. Se puede demostrar que $W^\infty \subseteq S^\infty$ aunque la prueba no es fácil. Ahora, dé un ejemplo que muestre que en general la contención es estricta.

Ejercicio 1.23. Sea EW y ES el conjunto de equilibrios en estrategias dominantes débilmente y estrictamente respectivamente. Demuestre que:

$$ES \subseteq EW \subseteq W^\infty \subseteq S^\infty$$

El concepto de estrategias no dominadas iterativamente enmarca los requerimientos mínimos que debe tener cualquier candidato a solución de un juego. Sin embargo, no es un concepto de equilibrio estrictamente hablando, en el sentido de que no lleva en consideración una noción de estabilidad en la cual, con ese conjunto de estrategias, los jugadores no tengan incentivos unilaterales a desviarse. En cambio, se trata de un conjunto de estrategias que deberían contener a cualquier concepto de solución de un juego.

El concepto de estrategias no dominadas iterativamente es un concepto muy débil y en ocasiones no provee de ninguna información adicional sobre el resultado del juego. Por ejemplo, en la batalla de los sexos, ningún jugador tiene una estrategia dominada y, por lo tanto, S^∞ es el mismo conjunto de estrategias del juego original.

En este orden de ideas, aunque la idea de eliminación de estrategias dominadas iterativamente es un concepto muy débil desde el punto de vista estratégico, supone algo más de conocimiento por parte de los jugadores.

Este conocimiento está relacionado con qué conoce cada jugador sobre cómo los demás se comportan. Específicamente, la hipótesis de comportamiento es que ningún jugador juega una estrategia dominada y se supone que todo jugador sabe que el otro no jugará una estrategia dominada y, a su vez, cada uno de ellos sabe que el otro sabe, etc.

Las hipótesis de racionalidad y conocimiento común permiten, en principio, considerar como irracionales algunas otras estrategias que no son eliminadas por el proceso de eliminación de estrategias dominadas estrictamente. Esto nos conduce al siguiente concepto; el de estrategias racionalizables.

1.2.3. Estrategias racionalizables

Definición 1.24 (Mejor respuesta). Una estrategia $\hat{s}_i$ es mejor respuesta para el jugador i cuando las estrategias de los demás son s_{-i} si:

$$\pi_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i})$$

para todo s_i . Una estrategia s_i nunca es una mejor respuesta si no existe s_{-i} tal que s_i sea mejor respuesta cuando las estrategias de los demás son s_{-i} .

Ejemplo 1.25 (Dilema de los prisioneros). En el dilema de los prisioneros la mejor respuesta para los dos jugadores es A para todo s_{-i} :

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Cuando 2 juega A (*i.e.* $s_{-1} = A$) la mejor respuesta del jugador 1 es jugar $\hat{s}_1 = A$ dado que $\pi_1(A, A) = -10 \geq \pi_1(C, A) = -12$. Del mismo modo, cuando $s_{-1} = C$ la mejor respuesta del jugador 1 sigue siendo $\hat{s}_1 = A$ dado que $\pi_1(A, C) = 0 \geq \pi_1(C, C) = -1$. Dado que los pagos de este juego son simétricos, la mejor respuesta del jugador 2 será $\hat{s}_2 = A$ tanto para $s_{-2} = A$ como para $s_{-2} = C$.

Ejercicio 1.26. Muestre que en la batalla de los sexos $\hat{s}_1 = B$ es la mejor respuesta para $s_{-1} = B$ y que $\hat{s}_1 = S$ es la mejor respuesta para $s_{-1} = S$. Encuentre la mejor respuesta de 2 para cada estrategia de 1.

La hipótesis de racionalidad sugiere que un jugador sólo jugará una estrategia que sea mejor respuesta a algún perfil de estrategias de los demás jugadores

(esta es una hipótesis de racionalidad más fuerte que suponer que los jugadores no jugarían estrategias dominadas, véase ejercicio 1.29). Ahora, es natural pensar en la misma línea que la definición de eliminación iterativa de estrategias dominadas estrictamente e introducir un concepto de eliminación iterativa de estrategias que nunca son mejor respuesta.

Definición 1.27 (Estrategias racionalizables). Las estrategias que sobreviven al proceso de eliminación iterativa de estrategias que nunca son mejor respuesta conforman el conjunto de estrategias racionalizables R^∞ .

Ejemplo 1.28. Considere el siguiente juego:

$1 \backslash 2$	A	B	C
X	2,7	2,0	2,2
Y	7,0	1,1	3,2
Z	4,1	0,4	1,3

Para el jugador 1:

Si $s_{-1} = A \rightarrow \hat{s}_1 = Y$

Si $s_{-1} = B \rightarrow \hat{s}_1 = X$

Si $s_{-1} = C \rightarrow \hat{s}_1 = Y$

Como Z nunca es mejor respuesta no se considera en el análisis de 2. De la misma forma se van a descartar estrategias abajo.

-Para el jugador 2:

-Si $s_{-2} = X \rightarrow \hat{s}_2 = A$

-Si $s_{-2} = Y \rightarrow \hat{s}_2 = C$

-Para el jugador 1:

-Si $s_{-1} = A \rightarrow \hat{s}_1 = Y$

-Si $s_{-1} = C \rightarrow \hat{s}_1 = Y$

-Para el jugador 2:

-Si $s_{-2} = Y \rightarrow \hat{s}_2 = C$

-Para el jugador 1:

-Si $s_{-1} = C \rightarrow \hat{s}_1 = Y$

Con esto se concluye que $R^\infty = \{(Y, C)\}$

Se puede demostrar que el proceso de eliminación es independiente del orden.

Ejercicio 1.29. Demuestre que una estrategia estrictamente dominada nunca es una mejor respuesta.

Ejercicio 1.30. Demuestre o dé un contraejemplo de la afirmación $R^\infty \subseteq S^\infty$.

Paradójicamente, una estrategia dominada débilmente puede ser una mejor respuesta. Esta observación muestra que el concepto de eliminación iterativa

de estrategias débilmente dominadas no tiene bases racionales tan sólidas como el concepto basado en eliminación estricta. Sin embargo, como veremos más adelante, este tipo de eliminación puede eventualmente eliminar equilibrios de Nash lo cuál resulta atractivo en presencia de múltiples equilibrios.

1.2.4. Equilibrio de Nash - Cournot

Definición 1.31 (Equilibrio de Nash - Cournot). Una estrategia conjunta $\hat{s} \in S$ es un equilibrio de Nash - Cournot si para todo jugador i y para toda estrategia $s_i \in S_i$:

$$\pi_i(\hat{s}_i, \hat{s}_{-i}) \geq \pi_i(s_i, \hat{s}_{-i})$$

Notemos que este concepto de solución tiene como eje central una idea de estabilidad. En otras palabras, en este tipo de equilibrios se cumple que ningún agente tiene incentivos unilaterales a desviar porque cualquier otra de sus estrategias, suponiendo las de los demás fijas, le trae un pago menor o igual. De ahora en adelante nos referiremos a estos equilibrios simplemente como equilibrios de Nash.

Ejemplo 1.32 (Dilema de los prisioneros). En el dilema de los prisioneros el equilibrio de Nash $\hat{s} = \{(A, A)\}$ coincide con el equilibrio en estrategias dominantes.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Note que $\hat{s} = \{(A, A)\}$ es un equilibrio de Nash ya que no hay incentivos unilaterales a desviar:

$$\pi_i(A, A) \geq \pi_i(C, A). \quad \forall i$$

Como se demostró antes, en este juego cada jugador tiene una única estrategia dominante $s_i = A$ por lo que el equilibrio en estrategias dominantes es el perfil de estrategias (A, A) y coincide con el equilibrio de Nash.

Ejemplo 1.33 (Batalla de los sexos). La batalla de los sexos tiene dos equilibrios de Nash, ninguno de los cuales es un equilibrio en estrategias dominantes.

M\H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Note que $\hat{s} = \{(B, B)\}$ es un equilibrio de Nash ya que no hay incentivos unilaterales a desviar

$$\pi_i(B, B) \geq \pi_i(S, B). \quad \forall i$$

De igual manera $\hat{s} = \{(S, S)\}$ es un equilibrio de Nash ya que no hay incentivos unilaterales a desviar

$$\pi_i(S, S) \geq \pi_i(B, S). \quad \forall i$$

Como se demostró antes, en este juego no hay ninguna estrategia que domine a la otra, por lo que no hay un equilibrio en estrategias dominantes.

Ejercicio 1.34. Demuestre que todo equilibrio en estrategias dominantes débilmente es un equilibrio de Nash.

Ejemplo 1.35 (Tragedia de los comunes). n jugadores desean compartir una banda de transmisión de información. La capacidad máxima es uno y cada agente debe escoger qué cantidad $x_i \in [0, 1]$ desea transmitir. El beneficio para cada agente i es:

$$\pi_i = x_i \left(1 - \sum_j x_j \right)$$

Esto quiere decir que a cada jugador le genera utilidad la cantidad que transmite, pero también la genera utilidad que la banda no esté tan congestionada. Un equilibrio de Nash de este ejemplo es:

$$x_i = \frac{1}{n+1}$$

Para demostrar que este efectivamente es un equilibrio de Nash se calcula el beneficio de usar esta estrategia y después se prueba que no existe ninguna estrategia con un pago estrictamente mayor.

Pago de seguir la estrategia:

$$\pi_i = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1-n}{n+1} \right) = \frac{1}{(n+1)^2} \quad (1.1)$$

Pago de ocupar $\varepsilon > 0$ más de banda, es decir de desviarse hacia arriba:

$$\pi_i = \left(\frac{1}{n+1} + \varepsilon \right) \left(1 - \frac{n-1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \varepsilon \right) = \left(\frac{1+\varepsilon(n+1)}{n+1} \right) \left(\frac{n+1-n+1-1-\varepsilon(n+1)}{n+1} \right) \quad (1.2)$$

$$\pi_i = \left(\frac{1+\varepsilon(n+1)}{n+1} \right) \left(\frac{1-\varepsilon(n+1)}{n+1} \right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \varepsilon^2 \quad (1.3)$$

Dado que el pago es menor no hay incentivos a desviarse hacia arriba. Un argumento similar se puede utilizar para mostrar que no hay incentivos a desviarse hacia abajo, por lo tanto es un equilibrio de Nash.

Luego valor social de esta solución descentralizada, que es la suma del pago neto de cada jugador es $\frac{n}{(1+n)^2} \sim \frac{1}{n}$.

Ahora, si maximizamos el valor social de la solución centralizada, suponiendo que cada agente usa la misma proporción x de la banda entonces debemos resolver este problema:

$$\sum_i x_i \left(1 - \sum_j x_j \right) = nx(1 - nx)$$

y obtenemos la solución socialmente eficiente $x = \frac{1}{2n}$ que implica un beneficio social igual a $\frac{1}{4}$, el cual es muy superior al beneficio social de la solución descentralizada (para $n \geq 4$).

El dilema de los prisioneros y la tragedia de los comunes llaman la atención sobre el costo social de la descentralización (*i.e.*, el costo de la competencia y el comportamiento egoísta o individualista). Esto se conoce como el precio de la anarquía (*price of anarchy*).

Ejemplo 1.36 (Paradoja de Braess). Este ejemplo se le atribuye a Dietrich Braess, ingeniero civil quien llamó la atención sobre sus características paradójicas a comienzos de los años 50. Considere la Figura 1.1 en la cual se representan esquemáticamente las posibles formas de ir en carro de la ciudad A a la ciudad B utilizando las dos carreteras que se muestran en la figura.

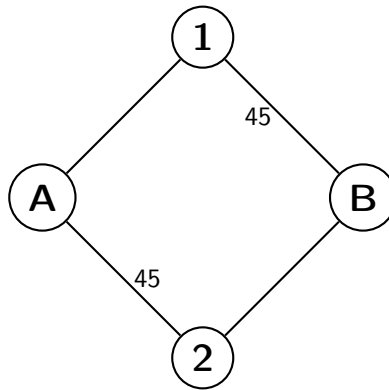


Figura 1.1: Rutas posibles para ir de la ciudad A a la B.

Debido a las características de las rutas, el tiempo que dura el trayecto de A hasta la ciudad intermedia 1 depende del tráfico, mientras que el tiempo de la ciudad intermedia 1 hasta la ciudad B es independiente del tráfico y siempre toma la misma cantidad de minutos. De forma similar, el trayecto de A a la ciudad intermedia 2 es independiente del tráfico, mientras que el de la ciudad intermedia 2 hasta la ciudad B depende del tráfico de la misma forma que de A hasta la ciudad intermedia 1. No es difícil convencerse que, dado un cierto número de carros que debe viajar desde el A hasta B, si cada uno de ellos tiene conocimiento sobre los detalles mencionados anteriormente y cada uno evalúa de forma independiente e individualista cuál carretera va utilizar, el flujo esperado es que la mitad de los carros utilizarán un trayecto y la otra mitad el otro. Concretamente supongamos que el número de carros es 4000. En el trayecto sujeto a congestión, el tiempo es igual al número de carros dividido por 100. En los trayectos que no están sujetos a congestión el tiempo es 45. En el equilibrio de Nash el tiempo de traslado es 65 minutos, 45 minutos en el trayecto no sujeto a congestión y $2000/100=20$ minutos en el trayecto que sí. Ahora, supongamos que las autoridades competentes deciden construir una carretera entre las ciudades intermedias 1 y 2 con el fin de mitigar los problemas de congestión de viajar de A a B (línea punteada de la Figura 1.2).

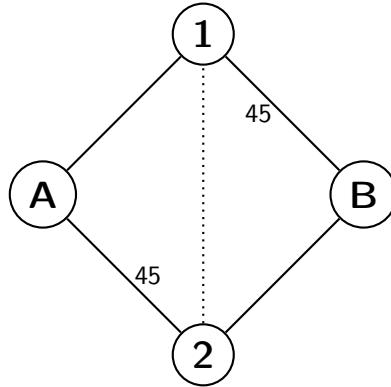


Figura 1.2: Rutas posibles para ir de la ciudad A a la B al construir una nueva carretera (línea punteada).

Más aún, supongamos que el tiempo de desplazamiento entre 1 y 2 es prácticamente cero. Ahora, la pregunta sobre el flujo vehicular esperado dado que cada individuo actúa de forma individual, conoce las características del problema mencionadas y supone que los demás actúan de la misma forma

requiere un poco más de esfuerzo. Es fácil de ver que todos los carros tomaran la ruta A - 1, pues si todos hacen esto el tiempo de desplazamiento hasta 1 es 40 minutos. Estando en 1, lo óptimo es hacer 1 - 2 - B, pues el tiempo de esta última parte sería 40 minutos y la alternativa sería 45. En conclusión el nuevo equilibrio implica un tiempo de desplazamiento de 80 minutos. El resultado es sorprendente dado que el número de carros que viaja de A hacia B es exactamente el mismo, y que las mismas rutas que estaban a disposición anteriormente siguen estándolo una vez construida la variante que comunica 1 y 2. En conclusión, el comportamiento individualista en el segundo caso tiene como consecuencia un resultado ineficiente para la sociedad.

Habiendo dado algunos ejemplos, continuamos explorando algunas propiedades del equilibrio de Nash.

Proposición 1. Todo equilibrio de Nash sobrevive el proceso de eliminación de estrategias dominadas estrictamente.

Prueba. Sean $EN(S)$ los equilibrios de Nash del juego G cuando el espacio de estrategias es S . Es claro que $EN(S) \subseteq S^1$ (la eliminación fuerte no puede eliminar una estrategia que haga parte de un equilibrio de Nash). Ahora, obsérvese que los equilibrios de Nash cuando el espacio de estrategias es S^1 satisfacen $EN(S) \subseteq EN(S^1)$. Aplicando el mismo argumento anterior al caso en que el juego tiene como espacio de estrategias S^1 obtenemos $EN(S) \subseteq EN(S^1) \subseteq S^2$. Continuando de esta forma obtenemos $EN(S) \subseteq S^\infty$. ■

Proposición 2. Si un juego tiene un equilibrio en estrategias no dominadas iterativamente (es resoluble en estrategias no dominadas iterativamente) entonces esa estrategia conjunta es un equilibrio de Nash y además es el único equilibrio de Nash.

Prueba. Para ver esto supongamos que no es Nash. Entonces algún agente no está optimizando dadas las estrategias de los demás. Escojamos una estrategia que sí sea mejor respuesta en S_{-i} . Como esta estrategia no sobrevivió el proceso de eliminación, ya que sólo una lo hizo, entonces tuvo que ser eliminada en algún momento. Como fue eliminada, esto quiere decir que fue dominada estrictamente en algún momento en S_i^{k-1} . Ahora, $S_i^{k-1} \supseteq S^\infty$ luego en particular, existiría una estrategia que domina estrictamente a la mejor respuesta cuando los demás juegan lo que les corresponde en el equilibrio en estrategias no dominadas iterativamente, lo que es una contradicción. La unicidad se sigue de que el proceso de eliminación de estrategias dominadas no elimina ningún equilibrio de Nash. Luego, dado que el juego es resoluble

(es decir, solo existe una solución para cada jugador en S^∞ , y como sabemos que no se elimina equilibrios de Nash, significa que la estrategia resultante es el único equilibrio de Nash. ■

El converso no es cierto, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.37. En este ejemplo $S_i^\infty = \{A, B, C\}$, $i = 1, 2$; pero tiene un único equilibrio de Nash (A, A) .

1\2	A	B	C
A	1,1	1,0	1,0
B	0,1	2,-2	-2,2
C	0,1	-2,2	2,-2

El concepto de equilibrio de Nash es más débil que el concepto de equilibrio en estrategias dominantes, un ejemplo de esto son los equilibrios en la Batalla de los sexos. En este juego, no es posible encontrar un equilibrio en estrategias dominantes. Sin embargo, se encuentran dos equilibrios de Nash como se demostró en el ejemplo 1.33.

A diferencia del proceso de dominación iterativa, el proceso de dominación débilmente iterativa sí puede eliminar equilibrios de Nash como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.38. Nash no sobrevive eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente.

1\2	A	B
A	1,1	0,-3
B	-3,0	0,0

Note que (A, A) Y (B, B) son equilibrios de Nash. Sin embargo, para ambos jugadores B es una estrategia dominada débilmente. Esto implica que si se realiza el proceso de eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente, uno de los dos equilibrios de Nash, (B, B) , se va a perder. El siguiente diagrama de Venn se muestra la relación entre S^∞ , W^∞ y EN para este ejemplo.

Ejemplo 1.39. Considere el siguiente juego.

1\2	A	B	C
A	1,-1	-1,1	0,-2
B	-1,1	1,-1	0,-2
C	-2,-1	1,-1	0,-1

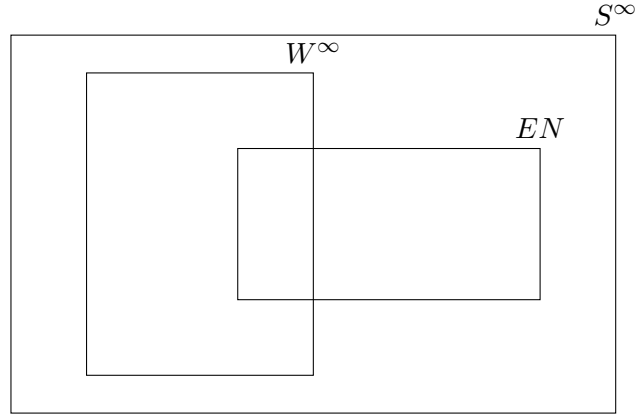


Figura 1.3: Diagrama de Venn para los conjuntos S^∞ , W^∞ y EN para los casos en los que $W^\infty \cap EN \neq \emptyset$

En este caso, hay dos equilibrios de Nash $EN = \{(C, B), (C, C)\}$, ninguno de los cuales está contenido en W^∞ porque B domina débilmente a C para el jugador 1. Este ejemplo muestra que existen casos en los que $W^\infty \cap EN = \emptyset$. Es decir, que el proceso de dominación iterativa de estrategias puras dominadas débilmente elimina todos los equilibrios de Nash. A continuación se tiene el diagrama de Venn de este ejemplo.

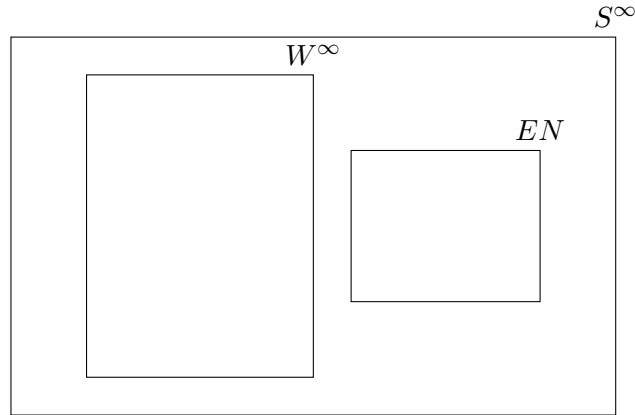


Figura 1.4: Diagrama de Venn para los conjuntos S^∞ , W^∞ y EN para los casos en los que $W^\infty \cap EN = \emptyset$

No todos los juegos tienen un equilibrio de Nash en estrategias puras, como

se puede observar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.40 (Cara y Sello). Considere el siguiente juego.

1\2	C	S
C	1,-1	-1,1
S	-1,1	1,-1

En este caso no existe un equilibrio de Nash - Cournot en estrategias puras. En el siguiente capítulo se introducirá la extensión mixta de un juego, que usa estrategias mixtas, para poder resolver este tipo de juegos.

El equilibrio de Nash - Cournot es un concepto más débil en términos estratégicos que el equilibrio en estrategias dominantes pero más fuerte en términos de la inteligencia que se supone tienen los jugadores. En este es necesario que los agentes tengan una expectativa correcta sobre lo que los demás van a jugar y viceversa. Más aún, es una condición natural y, por lo tanto, una condición mínima que impondremos a cualquier concepto de equilibrio.

1.2.5. Seguridad

Existen situaciones en las que jugar el equilibrio de Nash puede resultar muy riesgoso ya que se está haciendo el supuesto de que los otros jugadores van a actuar de cierta manera. Puede que el pago de que no lo hagan sea tan bajo que los jugadores privilegien el concepto de seguridad. A partir del siguiente ejemplo se va a resaltar la idea de seguridad:

Ejemplo 1.41. Considere el siguiente juego:

1\2	A	B
X	2,1	2,-20
Y	3,0	-10,1
Z	-100,2	3,3

El único equilibrio de Nash (Z, B) de este juego es un poco peligroso para el jugador 1. Observemos que si el jugador 2 comete un error y no juega Nash entonces 1 se ve muy perjudicado (pasa de ganar 3 a -100). Alternativamente, él podría jugar una estrategia que le garantizara el mejor pago posible en el peor de los casos.

Definición 1.42. Formalmente el valor maxmin o valor de seguridad de un jugador, en estrategias puras, se define como la utilidad para el jugador i

cuando el jugador i resuelve:

$$\max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} \pi_i(s_i, s_{-i})$$

Notemos que este valor supone que todos los adversarios de i actúan concertadamente para minimizar el pago de i . Las estrategias para el jugador i que resuelven el problema anterior se llaman estrategias maxmin del jugador i y el pago de ese problema se denomina valor de seguridad del juego. Intuitivamente, el valor de seguridad para un jugador es el pago más alto que el jugador puede asegurar. Si sus adversarios no se coordinan para castigarlo, podría obtener mayores pagos que el valor de seguridad.

Ejemplo 1.43. Considere el ejemplo anterior.

1\2	A	B
X	2,1	2,-20
Y	3,0	-10,1
Z	-100,2	3,3

Jugador 1:

Siguiendo la definición, primero el jugador 1 supone que el jugador 2 va a jugar la estrategia que minimice el pago de 1 para cada una de sus estrategias disponibles ($\min_{s_2 \in S_2} \pi_1(s_1, s_2)$). Es decir:

- si 1 juega X, 2 va a jugar o A o B porque 2 es el pago mínimo en cualquiera de los casos;
- si 1 juega Y, 2 va a jugar A porque $-10 < 3$;
- si 1 juega Z, 2 va a jugar A porque $-100 < 3$

Después, el jugador 1 escoge la estrategia propia que maximice su pago dado que el otro está tomando la decisión que le minimiza el pago ($\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} \pi_1(s_1, s_2)$).

Es decir, la estrategia maxmin de 1 va a ser X porque $2 > -10 > -100$ y 2 es el valor maxmin del jugador 1.

Jugador 2:

Primero hay que encontrar $\min_{s_1 \in S_1} \pi_2(s_1, s_2)$

- si 2 juega A, 1 va a jugar Y porque $0 < 1 < 2$;

- si 2 juega B, 2 va a jugar X porque $-20 < 1 < 3$;

Ahora el jugador 2 maximiza entre sus opciones, $(\max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} \pi_2(s_1, s_2))$. En este caso, la estrategia maxmin del jugador 2 va a ser A dado que $0 > -20$, y el valor maxmin para 2 va a ser 0.

En el ejercicio anterior si ambos jugadores juegan sus estrategias maxmin, se llegaría (X, A) . Sin embargo, esto no puede considerarse un equilibrio dado que hay incentivos a desviarse. A pesar de esto, las estrategias maxmin pueden ser útiles en un contexto con múltiple equilibrios de Nash en donde uno de ellos sea la intersección de las estrategias maxmin de los jugadores.

1.3. Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes afirmaciones determine si es falsa o verdadera y escriba una corta justificación de su respuesta.
 - a) El concepto de equilibrio en estrategias dominantes estrictamente supone que los jugadores son inteligentes en el sentido de que todos saben que los demás no juegan estrategias dominadas estrictamente.
 - b) El conjunto que resulta de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas (S^∞) puede ser vacío.
 - c) Suponer que un individuo no juega estrategias dominadas estrictamente es un hipótesis de racionalidad más fuerte que suponer que no juega estrategias dominadas débilmente.
 - d) El concepto de equilibrio de Nash es más exigente en términos estratégicos que el concepto de equilibrio en estrategias dominantes, pero menos exigente en términos de la inteligencia que se supone de los jugadores (*i.e.*, conjeturas).
 - e) El conjunto que resulta de la eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente (W^∞) contiene todos los equilibrios de Nash.
 - f) Todo equilibrio de Nash sobrevive al proceso de eliminación iterativa de estrategias dominadas estrictamente, pero no a la eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente.

- g) Todo equilibrio de Nash sobrevive el proceso de eliminación de estrategias dominadas débilmente, pero no la eliminación de estrategias dominadas estrictamente.
 - h) Todo perfil de estrategias que sobrevive al proceso de eliminación de estrategias dominadas (estrictamente) es un equilibrio de Nash.
 - i) El concepto de equilibrio de Nash supone que los jugadores hacen conjeturas sobre lo que los demás van a jugar pero no supone que necesariamente estas conjeturas se realizan en equilibrio.
 - j) La ineficiencia del equilibrio de Nash se debe en parte a que los agentes escogen sus estrategias de forma independiente.
 - k) El precio de la anarquía se refiere a la ineficiencia que resulta del comportamiento individualista de los individuos.
 - l) En un juego con varios equilibrios de Nash no puede suceder que un equilibrio sea dominado por el otro (*i.e.*, en un equilibrio los pagos son estrictamente superiores para cada jugador que lo que les corresponde en otro equilibrio).
 - m) La eliminación de estrategias dominadas estrictamente disminuye (estrictamente) el valor maxmin de un juego para por lo menos un jugador.
 - n) En un juego estático arbitrario, el valor maxmin para un jugador debe ser el pago en algún equilibrio de Nash.
 - $\tilde{n}$) El concepto de equilibrio de Nash implica el concepto de seguridad cuando el juego tiene equilibrios de Nash en estrategias puras.
 - o) Todo equilibrio de Nash es una estrategia maxmin para cada jugador.
 - p) En un juego en forma normal si cada jugador juega una estrategia maxmin entonces ese perfil de estrategias es un equilibrio de Nash.
2. Demuestre que si el conjunto de estrategias que sobreviven la eliminación iterativa de estrategias dominadas estrictamente consiste de un solo perfil de estrategias, entonces este perfil es un equilibrio de Nash y además el equilibrio de Nash es único.
 3. Demuestre que si se eliminan iterativamente las estrategias dominadas estrictamente de un juego, no se elimina ningún equilibrio de Nash.
 4. Considere la siguiente definición: sea $s^* \in S$ una estrategia conjunta en el espacio de las estrategias puras. Se dice que $s^* \in \widehat{EW}$ si $\forall i$:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i, \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

A la luz de la anterior definición ¿Son las siguientes proposiciones ciertas? Si sí, demuéstrelas formalmente. En caso contrario, dé un contraejemplo.

- a) Si $s^* \in \widehat{EW}$, entonces s^* es un Equilibrio de Nash.
- b) Si $\hat{s}$ es un Equilibrio de Nash, entonces $\hat{s} \in \widehat{EW}$.

Solución:

- a) Esta afirmación es verdadera y se probará por contradicción. Supongamos que para cierto jugador i la estrategia $s_i^* \in \widehat{EW}$ pero que $s_i^* \notin EN$. Lo primero implica que para el jugador i :

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i, \forall s_{-i} \in S_{-i} \quad (1.4)$$

Por otro lado, lo segundo implica que la estrategia $s_i^* \in S_i$ no es mejor respuesta del jugador i ante $s_{-i}^* \in S_{-i}$, donde $s_{-i}^* \in EN$. Es decir:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) < \pi_i(\hat{s}_i, s_{-i}^*), \text{ con } \hat{s}_i \in S_i \text{ y } s_{-i}^* \in S_{-i} \quad (1.5)$$

Note que la ecuación (2) contradice la ecuación (1) cuando se habla en particular del jugador i , de la estrategia $\hat{s}_i \in S_i$ y de la estrategia $s_{-i}^* \in S_{-i}$. Por tanto, se debe cumplir que si $s^* \in \widehat{EW}$, entonces s^* es un Equilibrio de Nash.

- b) Esta afirmación es falsa, lo cual se muestra con un contraejemplo. Suponga el siguiente juego en forma normal en donde solo hay dos jugadores:

1\2	C	D
A	2,3	3,1
B	2,2	3,2

Dado que para el jugador 1 se cumple que:

$$\pi_1(A, s_2) \geq \pi_1(B, s_2), \forall s_2 \in S_2$$

Y también se cumple que:

$$\pi_1(B, s_2) \geq \pi_1(A, s_2), \forall s_2 \in S_2$$

Entonces se puede afirmar que ambas estrategias de ese jugador hacen parte del conjunto $\widehat{EW}$.

Por su parte, para el jugador 2 se observa que:

$$\pi_2(s_1, C) \geq \pi_2(s_1, D), \forall s_1 \in S_1$$

Por tanto, se puede afirmar que para el jugador 2 la estrategia $C \in \widehat{EW}$.

En conclusión se tendría que $\widehat{EW} = [(A, C), (B, C)]$. Como (B,D) es también un equilibrio de Nash y no pertenece a $\widehat{EW}$ se prueba lo que se deseaba probar.

5. El conjunto de estrategias racionalizables (R^∞) se define como el conjunto de estrategias que sobreviven el proceso de eliminación iterativa de estrategias que nunca son mejor respuesta. En este juego muestre que $R^\infty \subseteq S^\infty$.

1 \ 2	A	B	C
X	1,7	2,2	0,3
Y	0,0	4,4	1,0
Z	3,1	2,0	0,2

Solución:

Al realizar el proceso de eliminación de estrategias que no son mejor respuesta se tiene que:

- Cuando $k = 0$: $R_1^0 = \{X, Y, Z\}$ y $R_2^0 = \{A, B, C\}$
- Cuando $k = 1$: $R_1^1 = \{Y, Z\}$ y $R_2^1 = \{A, B, C\}$
- Cuando $k = 2$: $R_1^2 = \{Y, Z\}$ y $R_2^2 = \{B, C\}$
- Cuando $k = 3$: $R_1^3 = \{Y\}$ y $R_2^3 = \{B, C\}$
- Cuando $k = 4$: $R_1^4 = \{Y\}$ y $R_2^4 = \{B\}$

Se tiene entonces que $R^\infty = \{(Y, B)\}$.

Por otro lado, al hacer el proceso de eliminación de estrategias dominadas estrictamente se tiene que:

- Cuando $k = 0$: $S_1^0 = \{X, Y, Z\}$ y $S_2^0 = \{A, B, C\}$
- Cuando $k = 1$: $S_1^1 = \{X, Y, Z\}$ y $S_2^1 = \{A, B, C\}$

Se tiene entonces que $S^\infty = S$, por lo que se puede ver claramente que no se tiene que $S^\infty \subseteq R^\infty$.

6. Considere el siguiente juego.

$1 \backslash 2$	X_2	Y_2
X_1	2,2	0,6
Y_1	6,0	1,1

a) ¿Cuál es el equilibrio de Nash?

Suponga ahora que los jugadores se pueden comunicar y le piden a un abogado que les elabore un contrato que dice lo siguiente: si ambos lo firman, ambos prometen jugar (X_1, X_2) . Si solamente uno lo firma, digamos i , entonces i promete jugar Y_i . En caso de firmar el contrato, es de obligatorio cumplimiento (*e.g.*, no cumplirlo tiene una penalidad muy alta)

El nuevo juego es:

$1 \backslash 2$	X_2	Y_2	S_2
X_1	2,2	0,6	0,6
Y_1	6,0	1,1	1,1
S_1	6,0	1,1	2,2

b) Calcular el nuevo equilibrio.

c) ¿Qué aprende usted de este ejercicio?

7. Juegos en forma normal. Considere el siguiente juego;

$1 \backslash 2$	A	B	C	D
W	0,7	2,5	7,0	0,1
X	5,2	3,3	5,2	0,1
Y	7,0	2,5	0,7	0,1
Z	0,0	0,-2	0,0	10,-1

¿Cuál es su mejor predicción de la interacción de los dos jugadores en este juego?

8. Juego de la gallina, basado en Shubik (1986). Dos pilotos de avión dirigen sus aeronaves en la misma línea recta, uno en sentido sur-norte y otro en sentido norte-sur. En el momento en el que la colisión es inminente, si uno de los dos pilotos desvía el rumbo de su avión a la derecha (D) entonces este es considerado como gallina y obtiene un pago menor al del otro piloto, en el caso en que ambos se desvían, ninguno obtiene un pago y cuando ninguno se desvía (ND) la colisión genera un pago mucho menor a ambos jugadores. La matriz de pagos de esta situación es la siguiente:

1\2	ND	D
ND	-10,-10	5,-5
D	-5,5	0,0

Encuentre el equilibrio de Nash de este juego.

9. Consideremos un juego con n jugadores sentados en un círculo. Al principio, la naturaleza selecciona una carta para cada jugador con un número entero entre 1 y M . El proceso aleatorio es independiente para cada jugador, y cada carta tiene una probabilidad positiva de ocurrir. Cada jugador observa únicamente su propia carta, tras lo cual decide entre una de dos acciones: “intercambiar” o “no intercambiar”. Todas estas elecciones son simultáneas, después de lo cual el juego termina.

Las recompensas son las siguientes. Siempre que un jugador elige “no intercambiar”, recibe como pago el número en su carta. Siempre que un jugador elige “intercambiar”, recibe el número en la carta del jugador más cercano a su derecha entre aquellos que eligieron “intercambiar” (notar que este jugador es él mismo si nadie más eligió “intercambiar”).

¿Qué estrategias son racionalizables?

10. Considere el siguiente juego

1\2	A	B	C	D
W	3,4	5,6	2,1	4,5
X	5,5	4,3	3,4	2,8
Y	3,3	5,6	7,9	4,1
Z	3,2	5,4	6,2	8,9

- a) Encuentre S^∞ .
b) Encuentre W^∞ .

- c) Encuentre el equilibrio en estrategias dominantes.
 - d) Encuentre R^∞ .
 - e) Encuentre el equilibrio de Nash.
11. Concurso de belleza de dos personas.⁵ Imagine un concurso donde n participantes deben escoger un número del 0 al 100, de tal forma que el ganador es aquel jugador que esté más cerca del promedio de todas las respuestas de los demás jugadores. En particular, la función de pagos de cada jugador está dada por

$$\pi_i(s_i, s_{-i}) = M - \left| s_i - \sum_{j=1}^n \frac{s_j}{n} \right|$$

con $M \geq 0$ y $s_i \in [0, 100]$ para $i = 1, 2, \dots, n$

- a) Mostrar que para todo $n \geq 2$, $s = (0, \dots, 0)$ es el único equilibrio de Nash.
- b) Mostrar que con $n = 2$, elegir cero es una estrategia débilmente dominante.

Solución:

Vamos a mostrar que jugar 0 es un equilibrio de Nash. Si todos los jugadores juegan $s_i = 0$, el pago para todo i es $\pi_i(0, 0) = M$. Ahora bien, si un jugador particular busca desviarse a jugar cualquier otra estrategia $\tilde{s}_i > 0$, se tiene que su pago va estar dado por

$$\pi_i(\tilde{s}_i, 0) = M - \left| \tilde{s}_i - \frac{\tilde{s}_i}{n} \right| < M$$

Así, si un jugador decide desviarse a jugar cualquier otra estrategia, su pago se reducirá estrictamente.

12. Gobierno y revolución: Considere un gobierno con 2 individuos, cuyo producto está dado por $Y > 0$. El ingreso de cada individuo en la economía está dado por $y_i = \frac{Y}{2}$. Cada individuo tiene dos posibles

⁵Basado en Grosskopf and Nagel (2008). Los autores del artículo resaltan de este juego que es un concurso de belleza para dos personas con un equilibrio de Nash único, idéntico al del juego con muchos jugadores. Sin embargo, el razonamiento iterativo no es necesario en el juego de dos personas, ya que elegir cero es una estrategia débilmente dominante. A pesar de este concepto de solución "más fácil", encontramos que una gran mayoría de los jugadores no elige cero. Esto ocurre incluso con un grupo de sujetos sofisticado.

alternativas: aceptar al gobierno de turno (A), u organizar la revolución (R). Si acepta al gobierno de turno, su pago está dado por su ingreso y_i . Si desea hacer la revolución, con probabilidad p logra derrocar al gobierno, mientras que con probabilidad $1 - p$ no lo logra derrocar. En particular, su pago en caso de hacer la revolución está dado por:

$$\pi_i(R, s_{-i}) = p \frac{Y}{r} - (1 - p)c$$

donde $0 \leq r \leq 2$ es el número de revolucionarios, y $c > 0$ es el costo que deben afrontar en caso de que la revolución falle. Más aún, la probabilidad de que la revolución logre derrocar al gobierno está dada por la proporción de revolucionarios con respecto al total de individuos.

- a) ¿Cuál es el conjunto de estrategias dominantes estrictamente?
- b) ¿Cuál es el conjunto de estrategias dominantes débilmente?
- c) ¿Cuál es el conjunto de equilibrios de Nash?

Solución:

Este juego se puede representar a partir de una matriz de la forma

1 \ 2	A	R
A	y, y	$y, \frac{y}{2} - \frac{c}{2}$
R	$\frac{y}{2} - \frac{c}{2}, y$	y, y

Así, se puede ver que no hay ningún equilibrio en estrategias dominantes estrictamente, que el único equilibrio en estrategias dominantes débilmente es $EW = \{(A, A)\}$ y que existen dos Equilibrios de Nash, dados por (A, A) y (R, R) .

13. Demuestre la proposición 1.

Solución:

Suponga que tenemos una estrategia conjunta que es Nash pero no está en S^∞ . Eso quiere decir que para algún i , la estrategia que le corresponde en Nash no está en S_i^∞ , luego fue eliminada en alguna iteración k . Sea k el menor k para el cual existe un i tal que la estrategia que le corresponde a i en el equilibrio de Nash es eliminada en la iteración k . Entonces esto implica que existe una estrategia en S_i^{k-1} que domina estrictamente en S_{-i}^{k-1} la estrategia de Nash que le corresponde a i . Sin embargo, todas las estrategias de los demás jugadores pertenecen

a S_{-i}^{k-1} (por la definición de k , además $k \neq 0$) luego esto implicaría que la estrategia que le corresponde a i en el equilibrio de Nash no sería una mejor respuesta.

14. Juego de Blotto. Imagine que usted es un coronel del ejército, antes de iniciar un combate debe decidir dónde ubicar sus tropas (T) entre un determinado número de campos de batalla (N). Usted sabe que en un mismo campo de batalla ganara quien asigne más tropas, sin embargo, ninguna de las partes conoce a cuantas tropas se enfrentaran en cada campo. Para ganar el combate será necesario maximizar el número de campos de batalla en los cuales se venció a las tropas enemigas.
- a) Definiendo S como el conjunto de estrategias posibles. Si usted debe asignar al menos una tropa a cada campo de batalla, donde $T \geq N$ ¿cuantas estrategias ($|S|$) puede aplicar?
 - b) Si $T = 5$ y $N = 3$ plantee el juego de forma normal donde los pagos sean 1 si tiene más campos ganados, 0 si empatan y -1 si tiene menos campos ganados a su oponente
 - c) A partir del juego anterior determine cuales son los equilibrios de Nash del juego tanto en estrategias puras como en mixtas
 - d) Suponga que $T = 6$ y $N = 3$, ahora considere una nueva regla en la que solo es posible ubicar tropas en un orden no decreciente, plantee el juego de forma normal y encuentre los equilibrios de Nash y la estrategia optima

Solución:

- a) El número de estrategias estará determinado por

$$|S| = \begin{cases} 1 & \text{si } T = N \\ \binom{T}{N} - \binom{T-1}{N} & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (1.6)$$

simplificando

$$|S| = \begin{cases} 1 & \text{si } T = N \\ \frac{(T-1)!}{(N-1)!(T-N)!} & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (1.7)$$

- b) El juego en forma normal se puede representar a través de la siguiente matriz:

J1 \ J2	(1,2,2)	(2,1,2)	(2,2,1)	(1,1,3)	(1,3,1)	(3,1,1)
(1,2,2)	0	0	0	0	0	1
(2,1,2)	0	0	0	0	1	0
(2,2,1)	0	0	0	1	0	0
(1,1,3)	0	0	-1	0	0	0
(1,3,1)	0	-1	0	0	0	0
(3,1,1)	-1	0	0	0	0	0

- c) $EN = \{[(1, 2, 2); (2, 1, 2); (2, 2, 1)] \times [(1, 2, 2); (2, 1, 2); (2, 2, 1)]\}$, en estrategias puras. En estrategias mixtas, hay un número infinito número de equilibrios, a partir de combinaciones de las estrategias mencionadas en los equilibrios en puras.
- d) El juego en forma normal se puede representar a través de la siguiente matriz:

J1 \ J2	(2,2,2)	(1,2,3)	(1,1,4)
(2,2,2)	0	0	1
(1,2,3)	0	0	0
(1,1,4)	-1	0	0

$EN = \{[(2, 2, 2); (1, 2, 3)] \times [(2, 2, 2); (1, 2, 3)]\}$, en estrategias puras. En estrategias mixtas, hay un número infinito número de equilibrios, a partir de combinaciones de las estrategias mencionadas en los equilibrios en puras. La estrategia optima la podemos encontrar con el EW en la cual ambos jugadores jugaran (2,2,2)

15. Considere el siguiente juego

1 \ 2	A	B	C
W	a,b	c,d	e,f
X	g,h	i,j	k,l
Y	m,n	o,p	q,r

De valores a cada letra de tal forma que:

- a) Exista un equilibrio en estrategias dominantes.
- b) $S^\infty = W^\infty$
- c) $EN = W^\infty = R^\infty = S^\infty$
- d) Exista un Equilibrio de Nash que no pertenezca a W^∞
- e) R^∞ y EN en puras sean iguales y no exista un equilibrio en estrategias dominantes.

16. Precio de la Anarquía. En máximo media página explique en que consiste el precio de la anarquía⁶ y dé por lo menos un ejemplo formal (explícito de un juego con su respectiva justificación) en el que se presenta dicho fenómeno.
17. Demostrar las siguientes proposiciones:
- La estrategia maxmin de un jugador no es única.
 - Una estrategia dominante (estricta o débilmente) es maxmin.
 - La eliminación de estrategias dominadas (estricta o débilmente) no cambia el valor de seguridad de un juego para ningún jugador.
18. Calcular S^∞ y R^∞ para el siguiente juego.

1 \ 2	A	B	C
X	1,7	2,2	0,3
Y	0,0	4,4	1,0
Z	3,1	2,0	0,2

Solución:

Al realizar el proceso de eliminación de estrategias que no son mejor respuesta se tiene que:

- Cuando $k = 0$: $R_1^0 = \{X, Y, Z\}$ y $R_2^0 = \{A, B, C\}$
- Cuando $k = 1$: $R_1^1 = \{Y, Z\}$ y $R_2^1 = \{A, B, C\}$
- Cuando $k = 2$: $R_1^2 = \{Y, Z\}$ y $R_2^2 = \{B, C\}$
- Cuando $k = 3$: $R_1^3 = \{Y\}$ y $R_2^3 = \{B, C\}$
- Cuando $k = 4$: $R_1^4 = \{Y\}$ y $R_2^4 = \{B\}$

Se tiene entonces que $R^\infty = \{(Y, B)\}$.

Por otro lado, al hacer el proceso de eliminación de estrategias dominadas estrictamente se tiene que:

- Cuando $k = 0$: $S_1^0 = \{X, Y, Z\}$ y $S_2^0 = \{A, B, C\}$
- Cuando $k = 1$: $S_1^1 = \{X, Y, Z\}$ y $S_2^1 = \{A, B, C\}$

Se tiene entonces que $S^\infty = S$.

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Price_of_anarchy.

