Capítulo 10

Aplicaciones juegos de información incompleta[1]

10.1. Teoría de subastas de una unidad

Las subastas[2] son un mecanismo de asignación de recursos y formación de precios. Son un mecanismo universal y anónimo. Es decir, en general no dependen de los detalles específicos del bien a ser subastado ni de las identidades de los participantes. Vamos a considerar primero el caso en que es un único bien indivisible el que va ser subastado (*e.g.*, una obra de arte). Las subastas se pueden clasificar por: (1) Tipo de bien: unitarias, multiunidades, paquetes de objetos, etc. (2) Estructura de información (independiente o afiliadas) o (3) Estructura de valoración (privada, interdependiente, común).

Cuando pensamos en el tipo de bien, por ejemplo, las subastas unitarias son subastas de un único bien como una obra de arte en la casa Christie's o una licitación para el desarrollo de una consultoría bien definida, etc. Una subasta de múltiples unidades es, por ejemplo, la venta de bonos en el mercado primario por parte de un gobierno. Usualmente estas emisiones tienen un número de bonos, todos con las mismas características (*i.e.*, vencimiento, cupones y valor nominal), que se subastan entre un conjunto de creadores de mercado. Los creadores de mercado tienen preferencias por uno o más bonos y pueden hacer múltiples ofertas por diferentes cantidades a diferentes precios (*i.e.*, tasas de interés).

[1] Riascos, A. Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones. Versión 9, 2026.
[2] Basado principalmente en **?**.

Las subastas también se pueden clasificar según la estructura de información (independiente o afiliadas) o la estructura de valoración (privada, interdependiente o común). Esto quedará más claro antes de que introduzcamos un poco de notación.

Para subastas de un único objeto existen cuatro subastas básicas:

- Primer precio (cerrada): En esta, cada participante de la subasta escribe en un papel cuánto está dispuesto a pagar por el objeto y lo envía en un sobre cerrado al subastador. Ningún participante puede observar los que los demás están ofertando. El subastador abre todos los sobres y elige al ganador como el que más oferto por el objeto. Este jugador debe pagar lo que declaró en su sobre cerrado.

- Segundo precio (cerrada): En este formato, cada participante de la subasta escribe en un papel cuánto está dispuesto a pagar por el objeto y lo envía en un sobre cerrado al subastador. Ningún participante puede observar los que los demás están ofertando. El subastador abre todos los sobres y elige al ganador como el que más oferto por el objeto. Este jugador debe pagar la segunda oferta más alta declarada por todos los participantes.

- Inglesa (abierta). Vamos a considerar una forma distinta a los formatos que se usan típicamente en el mundo real. Supongamos que todos los participantes se encuentran en un salón y el subastador anuncia un precio muy bajo. Les pide a los participantes que, mientras tengan disponibilidad a pagar el precio anunciado, mantengan una mano levantada. Ahora el subastador comienza a anunciar precios cada vez más altos. En la medida que el precio anunciado, conocimiento común de todos los participantes va aumentando lentamente, algunos participantes bajan su mano. En algún momento en este proceso deben quedar únicamente dos participantes con la mano levantada. Continuando con este proceso debe llegar un momento en que el precio es tan alto que uno de los dos participante baja la mano y solo queda uno con la mano arriba. En este momento el participante con la mano levantada se lleva el objeto y paga el precio que se encuentra anunciado en ese momento (el precio en el cual el segundo participante que tenía la mano levantada, bajó su mano).

- Holandesa (abierta). Este formato es similar al anterior pero se comienza con un precio muy alto y todos los participantes con las manos abajo. El precio comienza a bajar de forma paulatina y el precio es público, conocimiento común para todos los participantes. En algún momento alguno de los participantes levanta una de sus manos señalizando que está dispuesto a llevarse el objeto por el precio que esta siendo anunciado.

Por simplicidad, en todos los casos anteriores suponemos que no hay empate. En caso de empate los resultados que se van a presentar no cambian y lo único que debemos acordar es una regla para dirimir estos empates. Por ejemplo, de forma aleatoria, usando una distribución uniforme elegir el ganador entre los que hacen ofertas iguales más altas. Obsérvese que los primeros dos formatos son cerrados, las ofertas se hacen de forma privada y no se conoce ningún precio. En los últimos dos, el precio de cierre (de transacción) se va formando de forma abierta y, en principio, en la medida que se va formando el precio los agentes pueden ir aprendiendo algo de la valoraciones que los demás tienen del objeto.

Otros ejemplos de subastas son las subastas al tercer precio (gana el que más oferta pero paga ¡la tercera oferta más alta!) y todos pagan (gana el que más oferta pero todos pagan lo que ofertaron). Ahora, una lotería es un mecanismo de asignación de recursos, pero no es una subasta (estándar). Una subasta es estándar cuando el ganador es el que más ofrece por el bien. Hay muchos ejemplos de subastas que no son estándar. Entre ellos se encuentra el mercado de compras públicas de la Bolsa Mercantil de Colombia, la licitación de basuras de Bogotá, algunas licitaciones de infraestructura en varios países del mundo, o algunas que han utilizado empresas en Bogotá para contratar servicios. Todos estos mecanismos de asignación tienen en común que no gana el que más ofrece (o el que menos cobra en el caso de las licitaciones) sino que se calcula un precio promedio y la oferta más cercana por encima del promedio es la ganadora. En el siguiente capítulo estudiaremos un ejemplo de este tipo de mecanismo de asignación.

Las preguntas fundamentales que se hace la teoría son:

- ¿Existe equilibrio del juego Bayesiano inducido?
- ¿Son equivalentes en el sentido de que en equilibrio asignan de la misma forma?
- ¿Es el precio en equilibrio el mismo?
- ¿Es óptimo para el subastador en el sentido de maximizar su ingreso esperado?

- ¿Bajo qué condiciones son estos mecanismos eficientes socialmente? Si no lo es, ¿Cuál es la pérdida en eficiencia por utilizar una subasta como mecanismo de asignación? En la literatura especializada este problema se conoce como el precio de la anarquía.
- ¿Tiene el agente incentivos para participar de ese mecanismo de asignación de recursos (se conoce como racionalidad individual)?
- ¿Cuáles son los incentivos a coludir de los participantes?
- ¿ Son las reglas del mecanismo sencillas y fáciles de entender? Esto puede ser fundamental para incentivar la participación de agentes.
- ¿Es posible a partir de los datos observados, ofertas, asignaciones, precios de equilibrio, etc., identificar los fundamentales del modelo?
- ¿Es posible refutar las implicaciones de la teoría?

10.1.1. El modelo básico de subastas

El modelo estándar tiene la siguiente estructura. Estructura de información independiente y simétrica, estructura de valoración privada y agentes neutros al riesgo. En particular, agentes simétricos (esto tiene dos componentes: información y valoración). El modelo estándar se puede representar como un juego de información incompleta con la siguiente estructura:

$$BG = (I, (\mathbb{R}_+)_{i\in I}, [0,\omega], (\pi_i)_{i\in I}, F)$$

donde $I = \{1, ..., N\}$ es un conjunto de jugadores y el conjunto de acciones es el mismo para todos: $A_i = \mathbb{R}_+$. El supuesto de estructura de información independiente lo formalizamos de la siguiente forma: el conjunto de información es el mismo para todos: $T_i = [0,\omega]$. En este caso interpretamos el conjunto de información como la valoración privada del objeto que tiene el agente. Suponemos que la función de probabilidad sobre el conjunto de información $T = [0,\omega]^I$ que caracteriza los juegos Bayesianos es de la forma F^N donde F es una distribución de probabilidad sobre $[0,\omega]$ y que esta tiene densidad f. Aquí nos alejamos ligeramente de la notación introducida en las notas anteriores donde F era la distribución sobre T. Sin embargo, como forma de recordar este caso especial, obsérvese que en la especificación del juego Bayesiano sólo especificamos un conjunto de información $[0,\omega]$ y una sola función de distribución F sobre $[0,\omega]$.

La interpretación es la siguiente. En el modelo estándar de subastas el jugador i utiliza la densidad $\prod\limits_{j\neq i} f = f^{n-1}$ para evaluar la información de los demás agentes.

Este supuesto quiere decir que la información de los jugadores es independiente. En particular, la información es puramente privada y no afecta cómo los demás cuantifican su propia información.

Por último, $\pi_i : \mathbb{R}_+^I \times [0,\omega]^I \to \mathbb{R}$ es el pago de cada jugador y su forma específica depende del tipo de subasta que estemos considerando. Cuando π_i no depende de t_{-i} decimos que la subasta es de valores privados. Específicamente suponemos que el pago de cada jugador es de la forma $\pi_i(b_i, b_{-i}, t_i) = t_i - l_i(b_i, b_{-i})$ donde $l_i(b_i, b_{-i})$ representa la transferencia de cada jugador al subastador. Esta representación de la función de pagos pone en evidencia las hipótesis de valoración privada y neutralidad al riesgo.

Para resumir, utilizaremos T para denotar el conjunto de información $[0,\omega]^I$ y F^n para denotar la función de distribución sobre T.

10.1.2. Subasta al segundo precio

En esta subasta cada agente observa su valoración $t_i \in T_i = [0,\omega]$ y escribe en un sobre su oferta por el bien. Gana el jugador que más ofrezca y paga la segunda oferta más alta. En caso de empate se asigna el objeto aleatoriamente entre los ganadores (y paga el valor ofertado).

El pago de los agentes es:

$$\pi_i : \mathbb{R}_+^I \times [0,\omega]^I \to \mathbb{R}$$

$$\pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) = \begin{cases} t_i - \max\limits_{j\neq i}\{b_j\} & \text{si } b_i > \max\limits_{j\neq i}\{b_j\} \\ 0 & \text{si } b_i < \max\limits_{j\neq i}\{b_j\} \end{cases}$$

La expresión del pago pone en evidencia algunos de los supuestos que hicimos anteriormente (valoración privada y neutralidad al riesgo).

Proposición 7. En la subasta al segundo precio la estrategia de revelar la verdadera valoración es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente).

Prueba. Una estrategia para cada jugador es una función $\mathbf{b}_i : [0,\omega] \to \mathbb{R}_+$. Vamos a demostrar que la estrategia de revelar la verdad para cada jugador, $\mathbf{b}^{II}(t_i) = t_i$, es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente).

Supongamos que cada agente observa su valoración privada y hace una oferta por el bien. Fijemos un agente, digamos el agente i y concentrémonos en su estrategia. Sea $Y_1 = \max\limits_{j \neq i} \{b_j\}$. Y_1 determina si el agente i gana o no.

Primero algunas observaciones: $\mathbf{b}_i(t_i) > t_i$ no es racional (en el sentido débil) pues la estrategia $\overline{\mathbf{b}}_i$ que es igual $\mathbf{b}_i$ en todas partes excepto en t_i, donde es revelar la verdadera valoración, la domina débilmente cuando la valoración es t_i. De esta manera, el pago del agente nunca es menor y con probabilidad positiva es mayor. El argumento es independiente de las estrategias utilizadas por los demás jugadores.

Por otro lado, si $\mathbf{b}_i(t_i) < t_i$ pueden suceder tres cosas:

Casos	Pago		
	Resultado	Estrategia $\mathbf{b}_i$	Estrategia $\mathbf{b}^{II}$
$Y_1 \leq b_i < t_i$	i gana	$t_i - Y_1$	$t_i - Y_1$
$b_i < Y_1 < t_i$	i pierde	0	$t_i - Y_1$
$b_i < t_i \leq Y_1$	i pierde	0	0

Comparando con el resultado que hubiera tenido al utilizar la estrategia de revelar la verdad es claro que ésta última la domina. Formalmente lo que hemos hecho es demostrar que la estrategia $\mathbf{b}^{II}(t_i) = t_i$ domina a cualquier otra estrategia $\mathbf{b}_i$. Esto es:

$$\pi_i(t_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) \geq \pi_i(\mathbf{b}_i(t_i), b_{-i}, t_i, t_{-i})$$

para todo $t \in T$ y b_{-i} ■

Obsérvese que en ninguna parte utilizamos la estructura de información y que la estrategia es la misma para cada jugador. Esto es lo que se conoce como un equilibrio simétrico. Este equilibrio es independiente de la estructura de información y de que el espacio de valoración sea $[0, \omega]$. En particular, vale aún en el caso en que la información sea correlacionada o en el que los conjuntos de información son diferentes. Adicionalmente, el resultado no depende de la aversión al riesgo de los participantes, basta con que estos tengan preferencias monótonas crecientes. Esta subasta es eficiente desde el punto de vista social.

Para avanzar más en la propiedades de estos mecanismos de asignación necesitamos un conocimiento mínimo del concepto de esperanza condicional. Para nosotros es suficiente lo siguiente. La esperanza condicional de una variable aleatoria X con valores en los números reales, dado un conjunto

$\{X \leq x\}$, $E[X|X \leq x]$, se define como:

$$E[X|X \leq x] = \frac{1}{F(x)} \int_0^x y f(y) dy \tag{10.1}$$

donde F es la función de distribución de X y f es la densidad de F. Con esta definición podemos estudiar el pago esperado de la subasta en equilibrio.

El *pago esperado* (pago esperado *interim* en este equilibrio) de un agente con valoración t, $m^{II}(t)$ es:

$$m^{II}(t) = G(t) E_{-i}\left[Y_1 \mid t > Y_1\right]$$

donde $G(t)$ es la probabilidad de ganar (la probabilidad que el agente le atribuye al conjunto $\left[t > Y_1\right]$, es decir, la distribución de Y_1) y $E_{-i}\left[Y_1 \mid t > Y_1\right]$ es el pago esperado del agente dado que es ganador).

La estrategia de revelar la verdadera valoración es un equilibrio en estrategias dominantes (débiles). Esto quiere decir que si eliminamos las estrategias dominadas débilmente seleccionaríamos este equilibrio. Sin embargo, existen otro tipo de equilibrios que, aunque extraños, podrían ser pasados por alto sin ninguna reflexión sobre su significado. Por ejemplo, supongamos que los agentes utilizan las siguientes estrategias:

$$\begin{aligned} b_i &= w \\ b_{-i} &= 0 \end{aligned}$$

Es fácil ver que estas estrategias son un equilibrio *ex post* y, en particular, son un equilibrio de Nash Bayesiano.

10.1.3. Subasta al primer precio

En esta subasta los agentes observan su valoración (información) y hacen una oferta. Gana el que oferte más alto y paga lo ofertado. En caso de empate, el bien se asigna aleatoriamente.

El pago de los agentes es:

$$\pi_i : \mathbb{R}_+^I \times [0, \omega]^I \to \mathbb{R}$$

$$\pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) = \begin{cases} t_i - b_i & \text{si } b_i > \max\limits_{j \neq i} \{b_j\} \\ 0 & \text{si } b_i < \max\limits_{j \neq i} \{b_j\} \end{cases}$$

Obsérvese que existe un compromiso claro (*trade-off*) entre ofertar alto (aumenta la probabilidad de ganar) y el pago (disminuye el pago). Intuitivamente, esto implica que la oferta óptima de cada agente debe ser menor que su valoración. Este compromiso no existe en la subasta al segundo precio y por eso en la subasta al segundo precio los agentes pujan hasta su valoración.

Nos vamos a concentrar en el equilibrio simétrico. En este caso no existe un equilibrio en estrategias dominantes. Vamos a caracterizar el equilibrio de Nash-Bayesiano. Supongamos que i tiene una valoración t_i y ofrece $b_i \in \mathbb{R}_+$. Supongamos que todos los jugadores $j \neq i$ utilizan una estrategia $\mathbf{b}^I$ diferenciable y creciente. Es claro que $b_i \leq \mathbf{b}^I(\omega)$ (de lo contrario ganaría con seguridad, pero también ganaría con seguridad reduciendo su oferta un poco). También es fácil de ver que si $t_i = 0$ entonces $b_i = 0$ y $\mathbf{b}^I(0) = 0$ (pues en caso de ofertar positivo y ganar, el pago sería negativo).

Ahora, el conjunto de valoraciones de los demás agentes para las cuales i gana es el siguiente.

$$\left\{ b_i > \max_{j \neq i} \left\{ \mathbf{b}^I(t_j) \right\} \right\} = \left\{ b_i > \mathbf{b}^I(Y_1) \right\} = \left\{ \left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i) > Y_1 \right\}$$

Denotamos por G la distribución de Y_1 (Y_1 es la valoración más alta entre las de los demás agentes). Si la estructura de información es independiente y simétrica tenemos que $G = F^{N-1}$ y su densidad g es $g = (N-1)\, F^{N-2} f$. Entonces la probabilidad de ganar con una oferta b_i es la probabilidad que i le atribuye al conjunto:

$$\left\{ b_i > \max_{j \neq i} \left\{ \mathbf{b}^I(t_j) \right\} \right\}$$

que es:

$$G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))$$

Por lo tanto el pago (*interim*) del jugador i se puede escribir como:

$$E_{-i}[\pi_i \mid T_i = t_i] = G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))(t_i - b_i)$$

Las condiciones de primer orden con respecto a b_i son:

$$\frac{g(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))}{\frac{d\mathbf{b}^I\left(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i)\right)}{dt_i}}(t_i - b_i) - G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i)) = 0$$

Ahora, si existe un equilibrio simétrico entonces $\mathbf{b}^I(t_i) = b_i$ y las condiciones de primer orden se reducen a:

$$\begin{aligned}
\frac{g(t_i)}{\frac{d\mathbf{b}^I(t_i)}{dt}}(t_i - b_i) - G(t_i) &= 0 \\
\frac{d\left(G(t_i)\mathbf{b}^I\left(t_i\right)\right)}{dt_i} &= tg(t_i) \\
\mathbf{b}^I\left(t_i\right) &= \frac{1}{G(t_i)}\int_0^{t_i} yg(y)dy \\
&= E[Y_1|Y_1 < t_i].
\end{aligned}$$

Es fácil mostrar que en efecto $\mathbf{b}^I$ es un equilibrio creciente simétrico:

Primero, obsérvese que $\mathbf{b}^I$ es creciente y diferenciable. Vamos a demostrar que no existen incentivos a desviarse de esa estrategia. Supongamos que el jugador i tiene una valoración t y supongamos que ofrece b donde $\mathbf{b}^I\left(z\right) = b$. Es decir, el ofrece como si su valoración fuera z.[3] El pago esperado es:

$$\begin{aligned}
E_{-i}[\pi_i(b, \mathbf{b}_{-i}^I\left(T_{-i}\right), t, T_{-i})] &= G(z)(t - \mathbf{b}^I\left(z\right)) \\
&= G(z)t - G(z)\mathbf{b}^I\left(z\right) \\
&= G(z)t - \int_0^z yg(y)dy \\
&= G(z)(t - z) + \int_0^z G(y)dy
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}^I(t), \mathbf{b}_{-i}^I\left(T_{-i}\right), t, T_{-i})] - E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}^I(z), \mathbf{b}_{-i}^I\left(T_{-i}\right), t_i, T_{-i})] \\
&= G(z)(z - t) - \int_t^z G(y)dy \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Utilizando la definición de esperanza condicional, la estrategia $\mathbf{b}^I$ se puede escribir como:

$$\mathbf{b}^I\left(t\right) = E_{-i}[Y_1 \mid Y_1 < t]$$

[3]Esta forma de replantear el problema es lo que se conoce como el mecanismo directo asociado a la subasta al primer precio.

$$\mathbf{b}^I(t) = t - \int_0^t \frac{G(y)}{G(t)} dy < t.$$

Es decir, la oferta óptima está estrictamente por debajo (cuando $t > 0$) de la verdadera valoración.

El *pago esperado* de un agente con valoración t, $m^I(t)$ es:

$$\begin{aligned} m^I(t) &= G(t)E_{-i}[Y_1 \mid t > Y_1] \\ &= m^{II}(t) \end{aligned}$$

Obsérvese que $m^I(t) = m^{II}(t)$. Este es un caso particular del *teorema de equivalencia del ingreso esperado para el subastador* que estudiaremos de forma más general en las próximas secciones de este capítulo.

Por último, obsérvese que subasta es eficiente desde el punto de vista social: el bien es asignado al que más lo valora.

Ejemplo 10.1 (Información uniforme)**.** Si la estructura de información es uniforme en $[0, 1]$ entonces

$$\mathbf{b}^I(t) = \frac{N-1}{N} t.$$

Ejemplo 10.2 (Información exponencial)**.** Si la estructura de información es exponencial en $[0, \infty)$, $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ para algún $\lambda > 0$ y si solo hay dos agentes ($N = 2$) entonces

$$\mathbf{b}^I(t) = \frac{1}{\lambda} - \frac{t \exp(-\lambda t)}{1 - t \exp(-\lambda t)}.$$

10.1.4. Subastas abiertas y la relación entre los diferentes formatos de subastas

La subasta al primer precio y la subasta holandesa son estratégicamente equivalentes. Además, este resultado es independiente de la estructura de información, valoración o actitud frente al riesgo. Por eso decimos que es una equivalencia fuerte. Informalmente, para ver esto pensemos en el problema estratégico que enfrenta un agente cuando participa de una subasta holandesa. El agente puede observar el precio anunciado en todo momento y no tiene incentivos a levantar su mano hasta tanto el precio no llegue a su valoración. A partir de ese momento debe evaluar dos cosas: si levanta la mano rápido su probabilidad de ganar aumenta pero el pago neto es bajo. Si espera un poco, la probabilidad de ganar disminuye (más participantes están esperando el momento para levantar la mano) pero el pago neto aumenta. Esta es exactamente la situación estratégica que enfrenta un agente en la subasta al primer precio. Ahora obsérvese que en la medida que va disminuyendo el precio, este es poco informativo para los agentes de la información privada de los demás pues, los demás puede ser que no levanten la mano porque tienen una valoración baja o quieren aumentar su pago neto esperando lo suficiente.

Ahora, bajo el supuesto de valores privados, la subasta inglesa es equivalente a la subasta al segundo precio. Sin embargo, la equivalencia no es estratégica (la estructura de valoración es importante). Por ello decimos que la equivalencia es débil. De forma análoga al caso anterior, obsérvese que mientras va subiendo el precio y se observa que algunos agentes bajan su mano manifestando retirarse de la competencia, esta información revela que los participantes tienen esa valoración y, por lo tanto, si la subasta no fuera de valores privados esto iría cambiando la valoración que tienen los demás del objeto subastado.

10.1.5. Equivalencia del ingreso esperado para el subastador

Supongamos que estamos bajo las condiciones del modelo estándar. Además, supongamos que el pago esperado de un jugador con valoración privada cero, es cero (lo que sucede, por ejemplo, bajo los cuatro formatos de subastas estándar).

Teorema 10.3 (Teorema de Equivalencia del Ingreso para el Subastador)**.** Bajo las condiciones enunciadas arriba, cualquier equilibrio simétrico creciente genera el mismo ingreso esperado para el subastador.

Prueba. Sea $m^A(t)$ el pago esperado de un individuo con valor t en una subasta A y $\mathbf{b}^A(t)$ un equilibrio creciente simétrico. Por hipótesis $m^A(0) = 0$. El pago esperado del jugador que reporta $\mathbf{b}_i^A(z)$ (como si su valoración hubiera sido z) es:

$$E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}_i^A(z), \mathbf{b}_{-i}^A(T_{-i}), t, T_{-i})] = G(z)t - m^A(z).$$

Las condiciones de primer orden con respecto a z evaluadas en $z = t$ son:

$$\begin{aligned} \frac{dm^A(y)}{dy} &= yg(y) \\ m^A(t) &= G(t)E_{-i}[Y_1 \mid Y_1 < t]. \end{aligned}$$

Lo que muestra que el pago esperado de cada jugador es independiente del mecanismo particular de la subasta. ■

El teorema se puede extender al caso en que los agentes tienen valoraciones interdependientes. Ahora, obsérvese que la demostración depende de que los agentes son neutros al riesgo.

Ejemplo 10.4. Si la estructura de información es uniforme en $[0,1]$ entonces

$$m^A(t) = \frac{N-1}{N} t^N$$

y el ingreso esperado del subastador, $E[R^A]$ es:

$$E[R^A] = NE[m^A] = \frac{N-1}{N+1}$$

Por último, algunas observaciones: Si el subastador es averso al riesgo, él prefiere la subasta al primer precio que al segundo precio. La subasta al segundo precio genera ingresos más volátiles. En la subasta al segundo precio las ofertas están en $[0,\omega]$. En la subasta al primer precio están en $[0, E[Y_1 \mid Y_1 < t]] \subset [0, E[Y_1]]$.

El teorema de equivalencia de ingresos para el subastador puede ser utilizado para calcular las ofertas de equilibrio en la subasta todos pagan, guerra del desgaste, subasta al tercer precio e incertidumbre en el número de jugadores (véase **?**).

10.1.6. Precio reserva

Supongamos que el subastador anuncia un precio mínimo al que está dispuesto a vender el objeto y consideremos primero la subasta al segundo precio. En este caso los agentes hacen sus oferta y gana el que más oferta siempre y cuando esa oferta sea superior al precio de reserva, de lo contrario el subastador se queda con el objeto. Cuando hay un ganador, este paga el máximo entre la oferta la segunda oferta más alta y el precio de reserva. En esta subasta al segundo precio con precio de reserva sigue siendo cierto que la estrategia de revelar la verdad es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente). Independientemente de lo que los demás hagan, si la valoración es mayor o igual que el precio de reserva es óptimo revelar la valoración. Si es menor, no hay ninguna posibilidad de obtener un pago neto positivo. En este caso revelar la verdad es indiferente para el agente.

Sea F_r la distribución de la variable aleatoria $max\{r, Y_1\}$. El pago esperado, $m^{II}(t, r)$ de un agente con valoración t en una subasta con precio de reserva $r \leq t$ es:

$$\begin{aligned}
m^{II}(t,r) &= P(t > max\{r, Y_1\})E_{-i}\left[max\{r, Y_1\} \mid x > max\{r, Y_1\}\right] && (10.2)\\
&= \int_0^t y dF_r && (10.3)\\
&= \int_0^r y dF_r + \int_r^t y dF_r && (10.4)\\
&= \int_0^r y dF_r + \int_r^t y dG && (10.5)\\
&= rG(r) + \int_r^t y dG && (10.6)\\
&= rG(r) + \int_r^t y g(y) dy && (10.7)\\
& && (10.8)
\end{aligned}$$

Obsérvese que cuando $t = r$:

$$m^{II}(r, r) = G(r)r$$

Un análisis similar al que realizamos anteriormente para la subasta el primer precio, permite demostrar que, en la subasta al primer precio con precio de reserva, cuando $t \geq r$ la estrategia

$$b^I(t, r) = E_{-i}\left[\text{máx}\{r, Y_1\} \mid t > Y_1\right]$$

es un equilibro de Nash - Bayesiano. Obsérvese que como $t \geq r$ entonces: $b^I(t, r) = E_{-i}\left[\text{máx}\{r, Y_1\} \mid t > \text{máx}\{r, Y_1\}\right]$ luego el pago esperado en la subasta al primer precio con precio de reserva es:

$$\begin{aligned}
m^I(t,r) = P(t > max\{r, Y_1\})b^I(t,r) = && (10.9)\\
P(t > max\{r, Y_1\})E_{-i}\left[\text{máx}\{r, Y_1\} \mid t > \text{máx}\{r, Y_1\}\right] = m^{II}(t, r) && (10.10)
\end{aligned}$$

Obsérvese que:

$$m^I(t, r) = m^{II}(t, r)$$

luego, el ingreso esperado del subastador es el mismo aún con precios de reserva.

Estudiemos ahora cuál es el efecto del precio de reserva sobre el ingreso esperado el subastador. Sea t_0 la valoración que el subastador tiene del objeto (hasta este punto habíamos hecho el supuesto de que era cero, pero esto no es necesario). Entonces el ingreso esperado para el subastador es:

$$N \cdot E[m^A(t,r)] + F(r)^N t_0$$

donde A es la subasta al primer precio o segundo precio. No es difícil mostrar que el precio de reserva r^* que maximiza el ingreso esperado del subastador satisface:

$$r^* - \frac{1}{\lambda(r^*)} = t_0$$

donde $\lambda(r^*) = \frac{f(r^*)}{1-F(r^*)}$.

Obsérvese que $r^* > t_0$, luego es óptimo para el subastador poner un precio de reserva superior a su valoración. En particular, de esta forma el subastador va a excluir de la subasta a jugadores con valoraciones inferiores a su precio de reserva aún cuando éstos tengan valoraciones superiores a su propia valoración t_0. Esto se conoce como el principio de exclusión y hace que la subasta óptima sea ineficiente. Obsérvese que el precio de reserva depende de la estructura de información de los jugadores. En este sentido la subasta con precio de reserva óptimo no es libre de detalles y en la práctica es muy difícil conocer el precio de reserva óptimo.

Ejercicio 10.5. ¿Por qué el teorema de equivalencia del ingreso esperado para el subastador no aplica para subastas con diferentes valores del precio de reserva?

Ejercicio 10.6. Supongamos que solo hay dos agentes, la valoración para el subastador es cero y la estructura de información es uniforme en $[0,1]$. Muestre que $r^* = \frac{1}{2}$ y $E\left[m^A(T,r)\right] = \frac{5}{12}$.

Un instrumento alternativo para aumentar los ingresos del subastador es poner una cuota de participación. Esta tiene el mismo efecto que el precio de reserva.

10.2. Licitación de Recolección de Basuras

Como siempre el mundo es muy complicado de modelar y, en ocasiones, no es fácil aplicar la teoría a problemas reales que nos afectan. Por ejemplo, considere el problema de licitación de basuras de Bogotá. En este caso, no vamos a estudiar las propiedades del mecanismo utilizado, pues para comenzar, no es una subasta (licitación) estándar. Adicionalmente no vamos a estudiar el equilibrio de la misma dado que es un mecanismo complejo que, hasta donde mi conocimiento alcanza, no se conoce cuál es el equilibrio de Nash - Bayesiano. Sin embargo, si podemos modelar cosas interesantes que son de utilidad para un participante. En particular nos vamos a concentrar en el cálculo de la mejor respuesta de un competidor cuando este se forma una conjetura razonable (*i.e.*, bien informada) de las ofertas de sus adversarios.[4] La subasta tenía dos componentes y los participantes tenían que ofertar por ambos. El primero era el descuento sobre la tarifa máxima que se permitía cobrar por la prestación de un servicio regulado. Entre mayor el descuento más competitiva la oferta. El segundo componente era cuanto estaba el participante dispuesto a pagarle al distrito por la adjudicación de una zona (esto se denomina obligaciones de hacer y es como un cobro que hace *ex ante* el distrito para la adjudicación).[5] Entre mayor sea esta pago, más competitiva la oferta.

El análisis se concentró primero en definir la función objetivo de los participantes. En este caso se definió como el valor esperado del valor presente neto de los flujos futuros de la prestación del servicio. Para descontar los flujos se utilizó como tasa de descuento el valor más alto que permita dejar la mayor cantidad de recursos para las obligaciones de hacer pero reduciendo el riesgo de ser eliminado. Más precisamente. Supongamos que tenemos N jugadores y sea $d \in \{0, 1\}$ el descuento que se oferta sobre la tarifa máxima de recolección de basuras. El valor presente neto de los flujos futuros se supone que es solo función de ese descuento: $VPN(d)$. Esto se calcula con un modelo financiero detallado del negocio con muchos otros supuestos. Sean $T_1, ..., T_n$ variables aleatorias en los números reales, i.i.d. con distribución $U[0, 1]$ que representan los tipos de los competidores, Y el vector ordenado de **mayor a menor** de $T_1, ..., T_n$, Y_{-i} es el vector sin la variable i y Y_{-i}^k la componente k excluyendo a i (*i.e.*, la k-ésima variable aleatoria T_j más alta excluyendo a i). La variable aleatoria $T_i \in [0, 1]$ representa el descuento que hace la firma i.

[4]En efecto, este fue el análisis realizado para un empresa que compitió en la pasada licitación de basuras de Bogotá. La empresa logró satisfactoriamente la adjudicación de una zona.

[5]También se licitaban de forma simultánea varias zonas de la ciudad correspondientes a las diferentes localidades. Esto le imprime un complicación adicional al problema dado que los participantes podían ofertar simultáneamente por varias zonas en algunas podían ser incumbentes, en otras tener economías de escala, etc. Esto hace el problema uno de subastar paquetes de objetos. En nuestro análisis nos abstraemos de esos detalles bien relevantes para la participación en la licitación.

La hipótesis de comportamiento es que todos los agentes eligen el descuento de tal forma que libere la mayor cantidad de recursos para las obligaciones de hacer: $VPN_i(d_i) = 0$, donde $d_i \in T_i$. Las estrategias de cada jugador (agente) son $D_i : [0,1] \to [0,1]$.

Las reglas de la subasta establecen que quien en su oferta de descuento este más cerca al promedio simple de todas las ofertas obtienen un factor ponderador de α (*i.e.*, si queda de segundo el factor ponderador va descendiendo). El puntaje total con el que se participa es $\alpha \times d + \beta$ donde d es el factor de descuento con el que se obtuvo el factor de ponderación α y β son las obligaciones de hacer. La empresa con el mayor puntaje final se le asigna la zona de recolección de basuras.

$$\max_d P(D(Y^k_{-i}) < d < \frac{\sum_{j \neq i} D(t_j) + d}{N} + \sigma(D(t_{-i}), d))VPN_i(d) \tag{10.11}$$

$$\Rightarrow \tag{10.12}$$

$$\max_d P(D(Y^k_{-i}) < d < \frac{\sum_{j \neq i} D(t_j)}{N-1} + \frac{N}{N-1}\sigma(D(t_{-i}), d))VPN_i(d) \tag{10.13}$$

- Equilibrio simétrico. Supongamos que los adversarios usan $D_j = at_j$, donde $a \in [0,1]$.
- i usa $D_i = a' t_i$. En equilibrio $a' = a$.
- Problema de maximización jugador i.
- El problema de maximización es:

$$\max_d P(aY^k_{-i} < d < \frac{a\sum_{j \neq i} t_j}{N-1} + \frac{N}{N-1}\sigma(at_{-i}, d))VPN_i(d) \tag{10.14}$$

- Vamos aproximar $\sigma(at_{-i}, d) \approx \sigma(at_i) = \frac{a}{\sqrt{12}}$.
- Luego el problema es:

$$\max_d P(aY^k_{-i} < d < \frac{a\sum_{j \neq i} t_j}{N-1} + \frac{N}{N-1}\frac{a}{\sqrt{12}})VPN_i(d) \tag{10.15}$$

- Ahora solo la probabilidad es:

$$P(aY^k_{-i} < d < \frac{a\sum_{j \neq i} t_j}{N-1} + \frac{N}{N-1}\frac{a}{\sqrt{12}}) = \tag{10.16}$$

$$P(d < \frac{a\sum_{j\neq i} t_j}{N-1} + \frac{N}{N-1}\frac{a}{\sqrt{12}}) - P(aY_{-i}^k > d) \tag{10.17}$$

$$P(d > \frac{a\sum_{j\neq i} t_j}{N-1} + \frac{N}{N-1}\frac{a}{\sqrt{12}}) + P(aY_{-i}^k < d) \tag{10.18}$$

- Luego el problema es:

$$P(\frac{d}{a} - \frac{N}{N-1}\frac{1}{\sqrt{12}} > \frac{\sum_{j\neq i} t_j}{N-1}) + P(aY_{-i}^k < d) \tag{10.19}$$

$$= F_{Bates}(\frac{d}{a} - \frac{N}{N-1}\frac{1}{\sqrt{12}}) + F_{Y_{-i}^k}(\frac{d}{a}) \tag{10.20}$$

- Sea $d = a't_i$ entonces la probabilidad es:

$$F_{Bates}(\frac{a't_i}{a} - \frac{N}{N-1}\frac{1}{\sqrt{12}}) + F_{Y_{-i}^k}(\frac{a't_i}{a}) \tag{10.21}$$

- Sea $H(a', a) = F_{Bates}(\frac{a't_i}{a} - \frac{N}{N-1}\frac{1}{\sqrt{12}}) + F_{Y_{-i}^k}(\frac{a't_i}{a})$
- Problema de maximización:

$$\max_{a'} H(a', a)VPN_i(a't_i) \tag{10.22}$$

$$\max_{a'} H(a', a)(\alpha a't_i + \beta) \tag{10.23}$$

- Ecuación de primer orden (recordemos que $t_i = \frac{\beta}{\alpha}$):

$$a' = 1 - \frac{H(a', a)}{\frac{dH(a',a)}{da'}}, \tag{10.24}$$

  donde $a' = a$
- Cuando $k = 1$

$$H(a', a) = F_{Bates}\left(\frac{a'}{a}t - \frac{n}{\sqrt{12}(n-1)}\right) + \left(\frac{a'}{a}t\right)^{n-1}, \tag{10.25}$$

- Aproximación: Por el TCL $F_{Bates} \approx N(\frac{1}{2}, \frac{1}{12n})$.

Suponiendo que en equilibrio $a' = a$, se obtiene:

$$a = 1 - \frac{F\left(t - \frac{n}{\sqrt{12}(n-1)}\right) + t^{n-1}}{\frac{t}{a}\left[f\left(t - \frac{n}{\sqrt{12}(n-1)}\right) + (n-1)t^{n-2}\right]}, \tag{10.26}$$

donde $f(\cdot) = F'(\cdot)$ es la función de densidad correspondiente.

Luego al multiplicar ambos lados de la ecuación anterior por t/a, se obtiene

$$t = \frac{t}{a} - \frac{F\left(t - \frac{n}{\sqrt{12}(n-1)}\right) + t^{n-1}}{\left[f\left(t - \frac{n}{\sqrt{12}(n-1)}\right) + (n-1)t^{n-2}\right]}. \tag{10.27}$$

Y al reorganizar términos:

$$a^* = a'^* = \frac{t}{t + \frac{F\left(t - \frac{n}{\sqrt{12}(n-1)}\right) + t^{n-1}}{\left[f\left(t - \frac{n}{\sqrt{12}(n-1)}\right) + (n-1)t^{n-2}\right]}} \tag{10.28}$$

10.3. Subasta Generalizada de Segundo Precio (GSP)

Este es el tipo de subasta que se utiliza para asignar las posiciones de los avisos publicitarios en los motores de búsqueda en Internet. Es una de las innovaciones más relevantes que Google introdujo en su buscador en el año 2002 para su servicio de Google Adwords convirtiéndose en un estándar en la industria. Por muchos años este ha sido el negocio más importante de la compañía.

En el mecanismo de subasta generalizada de segundo precio (GSP, por sus siglas en inglés), los anunciantes presentan una única oferta que refleja cuanto están dispuestos a pagar por clic en búsquedas asociadas a determinadas palabras clave. Estas ofertas se ordenan de mayor a menor, y los espacios publicitarios disponibles se asignan según esta clasificación. Cada anunciante paga un precio equivalente a la oferta del anunciante ubicado inmediatamente por debajo en el orden de adjudicación.

Este tipo de subasta no garantiza que los participantes revelen su verdadera disposición a pagar por clic, lo que implica que la estrategia dominante no consiste en ofertar de acuerdo con dicha valoración. El mecanismo GSP puede conducir a la existencia de múltiples equilibrios de Nash, algunos de los cuales no son eficientes desde el punto de vista económico. No obstante, se puede demostrar que al menos uno de estos equilibrios resulta óptimo.

Para ilustrar las propiedades de este mecanismo, consideremos el siguiente ejemplo.[6] Se dispone de tres espacios publicitarios, denotados por a, b y c, con tasas de clics (*clickthrough rates*) de 10, 4 y 0 respectivamente. A su vez, existen tres compradores interesados, identificados como x, y y z, cuyas ganancias estimadas por clic son 7, 6 y 1 respectivamente.

En primer lugar, se observa que la estrategia de ofertar la verdadera valoración no constituye un equilibrio en el mecanismo GSP. Por ejemplo, si el comprador x reduce de manera unilateral su oferta de 7 a 5, logra mejorar su resultado, lo que evidencia que la verdad no es una estrategia dominante.

En segundo lugar, se puede demostrar que si los compradores presentan ofertas de 5, 4 y 2 respectivamente, esta combinación constituye un equilibrio en el mecanismo GSP. En tal caso, se debe calcular cuál sería el ingreso obtenido por el subastador bajo este perfil de estrategias.

Ejercicio 10.7. Mostrar que las ofertas 3, 5 y 1 constituyen un equilibrio en el mecanismo, y determinar el ingreso generado para el subastador.

10.4. Introducción subastas de múltiples unidades

La asignación de múltiples objetos mediante subastas es un problema central en la teoría económica moderna. Este tipo de subastas se aplica en contextos tan variados como la venta de deuda pública, los mercados *spot* de energía, las subastas de liquidez en sistemas financieros y la asignación de espectro electromagnético. Las características de estos mercados varían según se vendan objetos idénticos o distintos, si se subastan en una única ronda o en varias, y si los bienes subastados son complementarios o sustitutos. Además, el diseño de la subasta puede ser abierto o cerrado, y los participantes pueden tener diferentes estructuras de información, valoraciones individuales o actitudes frente al riesgo.

En algunas ocasiones, los agentes tienen interés en adquirir una única unidad del bien (demanda unitaria), lo que se asemeja a una subasta de objeto único. Sin embargo, cuando los agentes demandan múltiples unidades, la complejidad estratégica aumenta considerablemente. Este capítulo se centra en el caso específico en que los participantes demandan múltiples unidades de un mismo objeto.

[6] Basado en **?**

10.5. Introducción

- Los principales formatos son:
  1. Discriminatoria (cerrada) y Holandesa (abierta)
  2. Uniforme (cerrada) y Inglesa (abierta)
  3. Vickrey (cerrada) y Ausubel (abierta)

10.6. Modelo

- Consideramos subastas simultáneas de múltiples unidades del mismo bien.
- Suponemos que no hay complementariedades entre los objetos: La valoración marginal de ganar un segundo objeto es menor que la del primer objeto.
- Vamos a considerar los tres formatos más importantes para subastar K objetos idénticos: discriminatoria, Vickrey y uniforme.
- Cada jugador debe mandar K ofertas b_k^i que satisfacen $b_1^i \geq b_2^i \geq ..., \geq b_K^i$.
- b_j^i es la disponibilidad de i a pagar por la j-ésima unidad.
- Sea $c : \mathbb{R}_+^{KI} \to \mathbb{R}_+^{KI}$ el vector ordenado (de mayor a menor) de las $I \times K$ ofertas.
- Sea $c^{-i} : \mathbb{R}_+^{KI} \to \mathbb{R}_+^{K(I-1)}$ el vector de $K \times (I-1)$ de ofertas ordenado (de mayor a menor) que enfrenta i.
- c_k^{-i} es la k-ésima oferta más alta que enfrenta i.
- Regla de asignación: Si i tiene exactamente $k \leq K$ de la K ofertas más altas (entonces se le asignan k objetos), es decir si (por simplicidad suponemos que no hay empates) $b_k^i > c_{K-k+1}^{-i}$ y $b_{k+1}^i < c_{K-k}^{-i}$.
- En caso de empate por una unidad, se asigna con la misma probabilidad a los agentes que empatan.
- Esta estructura es común a los tres tipos de subastas que vamos a considerar.

- La diferencia entre ellas se debe a la regla de asignación (en particular, la componente que determina el pago esperado de cada agente).
- En la subasta discriminatoria si el agente i gana exactamente k^i unidades entonces paga, $\sum_{k=1}^{k^i} b_k^i$.
- Obsérvese que cuando $K = 1$ es la subasta al primer precio.
- En la subasta uniforme todas las unidades son vendidas al precio que agota la oferta y la demanda (precio de equilibrio).
- Suponemos que este precio es el más alto perdedor
- Puesto que i gana exactamente $k^i > 0$ unidades si y sólo si:

  $$b_{k^i}^i > c_{K-k^i+1}^{-i} \text{ y } b_{k^i+1}^i < c_{K-k^i}^{-i}$$

  Entonces la oferta más alta perdedora es:

  $$p(b) = \text{máx}\left\{b_{k^i+1}^i, b_{K-k^i+1}^{-i}\right\}$$

- O, alternativamente

  $$p(b) = \text{máx}\left\{b_{k^i+1}^i, c_{K-k^i+1}^{-i}\right\}$$

- Luego, cada agente paga por cada unidad ganada $p(b)$.
- Obsérvese que cuando $K = 1$ ésta se reduce al a subasta al segundo precio. Sin embargo NO es una generalización apropiada a múltiples unidades.
- En la subasta de Vickrey i gana exactamente $k^i > 0$ unidades si y sólo si:

  $$b_{k^i}^i > c_{K-k^i+1}^{-i} \text{ y } b_{k^i+1}^i < c_{K-k^i}^{-i}$$

  y paga por la k ésima unidad $c_{K-k^i+k}^{-i}$.
- Luego su pago total es:

  $$\sum_{k=1}^{k^i} c_{K-k^i+k}^{-i}$$

- La subasta de Vickrey es la generalización apropiada de la subasta al segundo precio.

10.7. Ejemplos

Ejemplo 10.8. Supongamos que $K = 6$ y tenemos 3 agentes participando. Supongamos que las ofertas son:

$$\begin{aligned} b^1 &= (50, 47, 40, 32, 15, 5) \\ b^2 &= (42, 28, 20, 12, 7, 3) \\ b^3 &= (45, 35, 24, 14, 9, 6) \end{aligned}$$

Denotamos por c el vector ordenado de mayor a menor de todas las ofertas:

$$c = (\underset{1}{50}, \underset{1}{47}, \underset{3}{45}, \underset{2}{42}, \underset{1}{40}, \underset{3}{35}, 32, ...)$$

Ejemplo 10.9. Ofertas y ordenamiento:

$$\begin{aligned} b^1 &= (50, 47, 40, 32, 15, 5) \\ b^2 &= (42, 28, 20, 12, 7, 3) \\ b^3 &= (45, 35, 24, 14, 9, 6) \\ c &= (\underset{1}{50}, \underset{1}{47}, \underset{3}{45}, \underset{2}{42}, \underset{1}{40}, \underset{3}{35}, 32, ...) \end{aligned}$$

Las seis más altas son las ganadoras. Por lo tanto el agente 1 gana 3 unidades,

el agente 2 gana 1 unidad y el agente 3 gana 2 unidades. El precio de cierre es 32 (el más alto perdedor).

Ejemplo 10.10. En el ejemplo anterior:

$$c_3^{-1} = 35, \;\; c_4^{-1} = 28$$

y el agente 1 gana exactamente 3 unidades porque:

$$\begin{aligned} b_3^1 &= 40 > c_4^{-1} = 28 \\ b_4^1 &= 32 < c_3^{-1} = 35 \end{aligned}$$

y el precio de cierre es:

$$p = \max\left\{b_4^1, c_4^{-1}\right\} = \max\{32, 28\} = 32$$

Ejemplo 10.11. El pago en la subasta de Vickrey para el agente 1 es:

$$c_4^{-1} + c_5^{-1} + c_6^{-1} = b_2^2 + b_3^3 + b_3^2$$

10.8. Equilibrio: Subasta de Vickrey

- En la subasta de Vickrey es un equilibrio en estrategias dominantes (débil) revelar la verdadera valoración, $b^V(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n)$.
- En particular, la subasta de Vickrey asigna de forma eficiente.
- Como veremos en la demostración el argumento no depende de que los agentes sean simétricos.
- Obsérvese que el pago del agente no depende de su oferta sino solamente de b^{-i} y del número de unidades ganadas.
- Sea k^i el número de unidades que el gana cuando oferta b^i y los demás ofertan b^{-i}.
- Un agente nunca ofertará por ninguna unidad por encima de su valoración.
- Supongamos que por la unidad k el agente oferta más (escojamos k como el mayor número para el que esto pasa); considere la oferta que se diferencia de la anterior solo en la unidad k en donde es la verdadera valoración.
- Con esta oferta el gana el mismo número de unidades o menos. Si gana el mismo entonces es indiferente entre ambas.
- Si gana menos quiere decir que $x_k^i \leq c_{K-k+1}^{-i}$ y $k = k^i$, es decir k era su última ganadora antes de cambiar la oferta (si $k < k^i$ entonces no puede ser que pierda la unidades k pero gane la $k+1$).
- El excedente por las unidades que gana sigue siendo el mismo. Ahora, para la unidad k^i deja de percibir un excedente de $x_{k^i}^i - c_{K-k^i+1}^{-i} \leq 0$. Luego en efecto al ganar menos unidades aumenta su excedente.

- Luego ofertar sinceramente domina débilmente a cualquier que oferta más que su valoración por una unidad. Claramente ofertar menos que la verdadera valoración está dominada por la oferta sincera.
- La subasta de Vickrey puede resultar en asignaciones 'injustas'.
- Supongamos que $K = 2$, $x^1 = (10, 6)$, $x^2 = (9, 2)$. En este caso, cada agente se lleva una unidad.

10.9. Subasta Holandesa e Inglesa

- En la Holandesa se comienza con un precio bien alto y la personas revelan su demanda. El precio va disminuyendo hasta que la demanda sea mayor que cero. Se entregan las unidades demandadas a ese precio y se continua bajando el precio hasta que otra vez la demanda sea mayor que cero. Se continua de esta forma hasta agotar todas las unidades (análogo a la subasta discriminatoria).
- En la Inglesa se comienza con un precio muy bajo en el que la demanda excede a la oferta. Se sube el precio hasta que por primera vez la oferta excede la demanda. En ese momento se asignan todas las unidades y se paga el precio inmediatamente anterior al que la oferta es igual a la demanda (análogo a subasta de precio uniforme).

10.10. Subasta de Ausubel

10.10.1. Oferta residual

- Primero definimos la oferta residual que nos permite describir el precio de cierre de forma conveniente.
- La oferta residual se define como: residual que enfrenta el agente i,

$$s^{-i}(p) = \text{máx}\left\{K - \sum_{j \neq i} d^j(p), 0\right\}$$

- El precio de cierre (el más alto perdedor) se puede definir como el más alto tal que:

$$s^{-i}(p) < d^i(p)$$

10.10.2. Subasta de Ausubel

- Es una subasta alternativa a la inglesa de precio ascendente.
- Comenzando con un precio muy bajo $p = p_0$, $s^{-i}(p_0) = 0$.
- La siguiente ronda $p = p_1$ y aún $s^{-i}(p_1) = 0$.
- El proceso continua hasta que por primera vez, en la ronda n_1, para algún i_1, $s^{-i_1}(p_{n_1}) > 0$. El agente i_1 gana las primeras $s^{-i_1}(p_{n_1})$ unidades y paga p_{n_1} por unidad. Si la condición se cumple para varios agentes, a cada uno se le da las unidades correspondientes.

10.10.3. Subasta de Ausubel

- El proceso continua hasta que por la primera vez, en la ronda n_2, para algún agente i_2, $s^{-i_2}(p_{n_2}) > s^{-i_2}(p_{n_1})$. El agente i_2 gana las primeras $s^{-i_2}(p_{n_2}) - s^{-i_2}(p_{n_1})$ unidades y paga p_{n_2} por unidad. Si la condición se cumple para varios agentes, a cada uno se les da las unidades correspondientes.
- Se tiene 5 licencias y 5 participantes, cada participante se le pueden otorgar máximo tres licencias.

img/ejemploAusubel.pdf

img/ausubel1.pdf

img/ausubel2.pdf

- Jugador A gana 1 unidad.

img/ausubel3.pdf

- Jugador A gana 1 unidad adicional.
- Jugador C gana 1 unidad.

img/ausubel4.pdf

- Jugador A gana 1 unidad adicional.
- Jugador C gana 1 unidad adicional.

img/ausubel5.pdf

10.11. Ejercicios

1. Subastas. Considere el modelo estándar de subastas excepto que los agentes no son neutros al riesgo pero tienen una misma función de utilidad que es estrictamente monótona. Demostrar que en la subasta al segundo precio decir la verdadera valoración es una estrategia débilmente dominante.