Capítulo 6

Juegos dinámicos de información imperfecta

6.1. El modelo

En muchas circunstancias de interacción estratégica, los agentes no pueden observar lo que han jugado sus adversarios en el pasado. Esto motiva el siguiente modelo.

Definición 6.1. Un juego en forma extensiva de información (perfecta o imperfecta) es una estructura de la forma:

$$\Gamma = (N, K, R, Z, \{K_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{H_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{A(k)\}_{k\in K\setminus Z}, \{u_i\}_{i=1,\ldots,n})$$

donde:

1. N es un conjunto de jugadores, $N = \{1, ...n\}$.[1]

2. K es un conjunto finito que representa los nodos de un árbol.

3. R es una relación sobre K que define un árbol. Más precisamente R es un orden parical sobre K. Esto es R es irreflexiva: para ningun $k \in K$, kRk y es transitiva: para todo $k, k', k'' \in K$ si kRk' y $k'Rk''$ entonces kRk''. Un orden parcial induce para cada k, una noción de nodos

[1] En ocasiones adicionamos un jugador no estratégico que denotamos por cero y representa la naturaleza.

inmediatamente predecesores $P(k)$ y nodos inmediatamente sucesores $S(k)$. [2]

4. Z son los nodos terminales del árbol (i.e., nodos que para los cuales el conjunto de sucesores es vacío).

5. $\{K_i\}_{i=1,\ldots,n}$ es una partición de $K \backslash Z$ que denota los nodos donde cada jugador juega.

6. Para $i = 1, \ldots, n$, H_i es una partición de K_i. Cada $h \in H_i$ denota un conjunto de información. Las particiones H_i son la estructura de información de los agentes en el juego.

7. Para $i = 1, \ldots, n$, y $k \in K_i$, $A(k)$ denota las acciones posibles del jugador i en el nodo k. Denotamos un elemento de $a \in A(k)$ por a_k.

   Dados k y $k' \in h \in H_i$ debe complirse que $A(k) = A(k')$. De esta forma el jugador no es capaz de distinguir, con base en las acciones factibles en un nodo, en cuál de los nodos del conjunto de información se encuentra. Luego, el conjunto de acciones factibles en un nodo lo podemos identificar como un conjunto de acciones factibles del conjunto de información que contiene al nodo. Abusando un poco del lenguaje, definimos $A(h) = A(k)$, $k \in h$ y denotamos una acción $a \in A(h)$ por a_h.

8. Para $i = 1, \ldots, n$, y $z \in Z$, $u_i(z)$ denota la utilidad del agente i en caso de que el resultado final del juego sea el nodo terminal z. Esto no excluye que existan pagos intermedios. Interpretamos estas funciones de utilidad como funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern.

Obsérvese que la única diferencia de fondo con la definición que dimos en el capítulo anterior es la introducción de una estructura de información $\{H_i\}_{i=1,\ldots,n}$.

Definición 6.2. Sea $A_i = \bigcup_{h \in H_i} A(h)$. Una estrategia pura s_i para el jugador $i = 1, \ldots, n$ en un juego en forma extensiva Γ es una función $s_i : H_i \longrightarrow A_i$ tal que para todo $h \in H_i$, $s_i(h) \in A(h)$.

Dada una estrategia conjunta $(s_i)_{i=1,\ldots n}$, esta induce un camino único a lo largo del árbol comenzando en la raíz y terminando en algún nodo $z =$

[2] Para ser un árbol es necesario que exista un nodo especial, digamos k_0 que sirve de raiz o nodo incial del árbol y tal que, dado cualquier otro nodo k, existe un único camino desde k_0 hasta k.

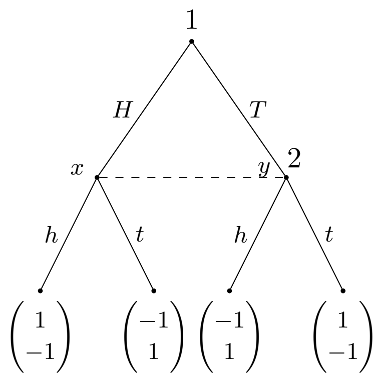

Figura 6.1: Cara y Sello. Juego en forma extensiva que, en formal normal, no tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras.

$\zeta(s) \in Z$. En ocasiones utilizaremos la notación $(s_1, ..., s_n)$ para denotar la estrategia conjunta $(s_i)_{i=1,...n}$.

Todo juego en forma extensiva se puede representar de dos formas como juegos estáticos: forma normal y forma multiagentes o de Selten.

Definición 6.3 (Forma normal)**.** Para $i = 1, ..., n$, sea $S_i = \{s_i : H_i \longrightarrow A_i \mid s_i(h) \in A(h)\}$, $s \in S = \prod_{i=0}^{n} S_i$ y definimos $\zeta(s) \in Z$ como el nodo final correspondiente al único camino que sobre el árbol define la estrategia conjunta s. Para $i = 1, ..., n$ definimos $\pi_i(s_1, ..., s_n) = u_i(\zeta(s_1, ..., s_n))$. El juego $G = (\{1, ..., n\}, \{S_i\}_{i=1,...,n}, \{\pi_i\}_{i=1,...,n})$ se llama la representación normal del juego en forma extensiva.

La representación multiagente de Selten es inmediata. En esta cada jugador tiene un representante en cada conjunto de información.

6.1.1. Extensiones mixtas

Una motivación para introducir estrategias mixtas en juegos en forma extensiva es observando que en algunos de estos juegos no necesariamente existe un equilibrio en estrategias puras. Por ejemplo, considere el juego de cara y sello en una representación en forma extensiva (figura 6.1).

Dadas las dos representaciones anteriores, forma normal o de Selten, existen dos formas naturales de definir estrategias mixtas.

Definición 6.4 (Estrategias mixtas y de comportamiento)**.** Una estrategia mixta en un juego en forma extensiva es una estrategia mixta del juego en su representación normal. Una estrategia de comportamiento en un juego en forma extensiva es una estrategia mixta del juego en su representación multiagente. Alternativamente, una estrategia de comportamiento para el jugador i es una función $\gamma_i : H_i \to \Delta(A_i)$ tal que para todo $h \in H_i$ el soporte de $\gamma_i(h)$ está contenido en $A(h)$[3].

Para ver que las dos definiciones de estrategias de comportamiento son equivalentes considere una estrategia de comportamiento en el sentido de Selten, $\sigma^*_{h_i}$, $h_i \in N^*$ donde $\sigma^*_{h_i}$ es un elemento de $\Delta(S^*_{h_i}) = \Delta(A(h_i))$. Ahora defina γ_i para el jugador i como $\gamma_i : H_i \to \Delta(A_i)$ donde $\gamma_i(h_i) = \sigma^*_{h_i}$. La función γ_i representa las estrategias de comportamiento en el sentido de la última definición. Un argumento muy similar muestra que toda estrategia de comportamiento γ_i define una estrategia de comportamiento en el sentido de Selten.

Para resaltar la diferencia entre los dos conceptos, estrategias mixtas y de comportamiento, estudiemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.5 (Estrategias mixtas como estrategias de comportamiento)**.** Considere el juego de la figura 6.2 y la estrategia mixta para el jugador 1, $0{,}5[AC]+0{,}5[BD]$. Una posibilidad para representar esta estrategia como una estrategia de comportamiento es simplemente asociándole a cada agente (que lo representa en sus conjuntos de información) la probabilidad marginal de las estrategias puras involucradas. Por ejemplo, un candidato natural para la estrategia de comportamiento del jugador 1 es: $(0{,}5[A] + 0,5[B], 0{,}5[C] + 0{,}5[D])$ donde la primera coordenada corresponde a la estrategia mixta en el primer conjunto de información del jugador 1 y la segunda al segundo conjunto de información. Sin embargo, esto no parece hacer mayor sentido, pues en la estrategia mixta original para escoger D es necesario escoger BD y en ese caso, el segundo agente del jugador 1 jamás jugaría y por lo tanto no escogería D en su estrategia de comportamiento.

Ahora, condicional a que le toca jugar al segundo agente del jugador 1, la probabiliad de escoger D es 1. Luego otra posible representación de la estrategia mixta como una estrategia de comportamiento es: $(0{,}5[A] + 0,5[B], [D])$.

Este ejemplo motiva la siguiente definición informal. Decimos que una estrategia pura $s_i \in S_i$ para el jugador i en la representación normal del juego

[3]El soporte de $\gamma_i(h)$ se define como el conjunto de acciones que tienen probabilidad positiva con la estrategia $\gamma_i(h)$

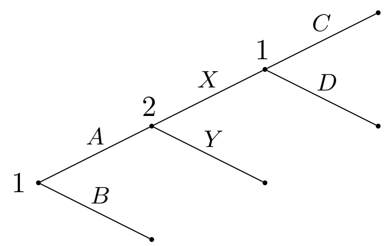

Figura 6.2: Estrategias mixtas y de comportamiento

es compatible con el conjunto de información $h_i \in H_i$ si existe un conjunto de estrategias s_{-i} para los demás jugadores tal que le estrategia conjunta $s = (s_i, s_{-i})$ implica *pasar* por h_i. Por ejemplo, considere el juego de la figura 6.2.

Las estrategias puras para el jugador 1, (B, C) y (B, D) son incompatibles con el segundo conjunto de información del jugador 1. Sea $h_i \in H_i$ y $\widehat{S}_i(h_i)$ las estrategias puras del jugador i que son compatibles con el conjunto de información h_i.

Dada una estrategia mixta σ_i del juego en formal normal, definimos la siguiente estrategia de comportamiento para el jugador i:

$$\gamma_i(h)(a) = \frac{\sum\limits_{\left\{s_i \in \widehat{S}_i(h_i): s_i(h_i) = a\right\}} \sigma_i(s_i)}{\sum\limits_{s_i \in \widehat{S}_i(h_i)} \sigma_i(s_i)} \quad \text{si } \sum_{s_i \in \widehat{S}_i(h_i)} \sigma_i(s_i) > 0$$

$$\gamma_i(h)(a) = \sum_{\left\{s_i \in \widehat{S}_i(h_i): s_i(h_i) = a\right\}} \sigma_i(s_i) \quad \text{si } \sum_{s_i \in \widehat{S}_i(h_i)} \sigma_i(s_i) = 0$$

Intuitivamente, $\gamma_i(h)(a)$ es la probabilidad según σ_i de la acción a condicional a pasar por el conjunto de información h. Cuando esta probabilidad de pasar con el conjunto de información h es cero, entonces definimos $\gamma_i(h)(a)$ como la probabilidad no condicional según σ_i de pasar por el conjunto de información h. El punto importante es que si la probabilidad de pasar por el conjunto de información h es cero, entonces la regla de Bayes no tiene ninguna implicación sobre la probabilidad en ese nodo y puede definirse de forma arbitraria.

Por ejemplo, en la figura anterior (6.2), considere la estrategia mixta para el jugador 1, $\sigma_1 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, donde el suponemos que cada coordenada del vector representa la probabilidad de elegir las estrategias puras $(A, C), (A, D), (B, C), (B, D)$ respectivamente. En este caso $\sum\limits_{s_1 \in \widehat{S}_1(h_1)} \sigma_1(s_1) = 0$ y por definición, si h_1 denota el conjunto de información del jugador 1 cuando debe decidir entre C y D, $\gamma_1(h_1)(D) = \frac{1}{2}$.

En general, más de una estrategia mixta puede inducir la misma estrategia de comportamiento.[4]

El hecho de que dos estrategias mixtas puedan inducir la misma estrategia de comportamiento puede tener consecuencias estrategicas importantes en cierto tipo de juegos[5].

En los juegos con memoria perfecta las estrategias mixtas y de comportamiento son estratégicamente equivalentes. Esto es, juegos en los que ningún jugador olvida sus acciones o información adquirida en el pasado. El teorema que establece la equivalencia estratégica entre estrategias mixtas y de comportamiento en juegos de memoria perfecta se debe a Kuhn (1953).

Definición 6.6 (Memoria Perfecta)**.** Un juego en forma extesiva es de memoria perfecta si ningún jugador olvida las acciones tomadas o la información que en el algún momento tuvo. Formalmente esto se puede expresar como:

1. No olvidar acciones: i no olvida $a \in A(k)$, $k \in K_i$, $k = P(k')$, $k = P(k''), k' \neq k''$, donde $P(x)$ denota el conjunto de los predecesores inmediatos de x, entonces todo par de nodos sucesores de k', k'' en los que i deba tomar una decisión están en conjuntos de información distintos.

2. No olvidar información pasada: i no olvida información pasada si para todo $h \in H_i$ $k, k' \in h$, si $\widehat{k} \in K_i$ es un predecesor de k entonces existe un $\hat{k}' \in K_i$ predecesor de k' tal que $\hat{k}$ y $\hat{k}'$ están en el mismo conjunto de información.

De ahora en adelante vamos a considerar únicamente juegos de memoria perfecta.

En este capítulo vamos a utilizar frecuentemente el siguiente argumento. La definición de estructura de información es tal que los jugadores no saben en qué nodo están parados de su conjunto de información cuando deben jugar. Sin embargo, en ocasiones evaluamos situaciones contrafactuales en las que el jugador va tomar decisiones distintas dependiendo del nodo en el que le toca jugar. En ese sentido, cuando su mejor estrategia es potencialmente distinta entre los nodos de un conjunto de información, vamos a vernos en

[4]Véase figura 1.10 página 20 de Vega Redondo.

[5]Véase figura 1.11 y 1.12 de Vega - Redondo.

la necesidad de introducir un sistema de expectativas que el jugador pueda utilizar para hacer una conjetura sobre la probabilidad de estar en cada nodo.

6.2. Amenazas no creíbles

El concepto de estrategia de inducción hacia atrás no se generaliza de forma inmediata al caso de juegos de información imperfecta. La generalización requiere la introducción del concepto de subjuego.

Definición 6.7 (Subjuegos)**.** Un subjuego de un juego en forma extensiva es un juego tal que: (1) Comienza con un nodo que define un conjunto de información que tiene un solo nodo. (2) Contiene todos los nodos sucesores y solo éstos. (3) Si un nodo está en el subjuego entonces todo nodo en su conjunto de información también está (es decir, no hay conjuntos de información divididos por el subjuego).

Definición 6.8 (Equilibrio perfecto en subjuegos)**.** Una estrategia conjunta s es un equilibrio perfecto en subjuegos si *induce* un equilibrio de Nash - Cournot de todo subjuego.[6]

La anterior definición se extiende de forma natural al caso de estrategias de comportamiento.

Ejemplo 6.9. Figura 6.3. En este juego existen dos equilibrios de Nash en el único subjuego (propio): (L, l) y (R, r) y dos en subjuegos: $((O, L)), l)$ y $((I, R), r)$. Obsérvese que $((O, R), l)$ es un equilibrio de Nash pero no es un equilibrio perfecto en subjuegos (i.e., no es creíble: en caso de que el jugador 1 entre en el juego, el jugador 2 tendría un incentivo a aletorizar entre l y r).

Ejemplo 6.10. En el juego de la figura 6.4 vemos cómo el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos selecciona un único equilibrio de Nash de los tres equilibrios de Nash que existen (en la forma normal del juego). Obsérvese que uno de los equilibrios eliminados no es creíble y el otro es dominado.

El concepto de equilibrio perfecto en subjuegos en un refinamiento estricto del concepto de equilibrio de Nash - Cournot y generaliza el concepto de

[6]Dada una estrategia de un juego, la estrategia inducida en un subjuego es la restricción de la estrategia al subjuego. Esta puede definir un camino que en el juego original nunca hubiera sido alcanzado al utilizar la estrategia original. Véanse los ejemplos de equilibrios perfectos en subjuegos.

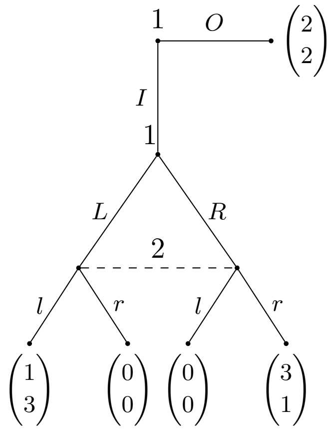

Figura 6.3: Equilibrios de Nash y Perfectos en Subjuegos I

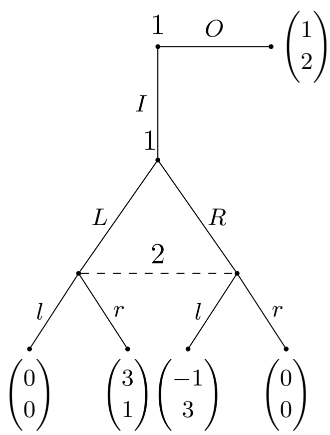

Figura 6.4: Equilibrios de Nash y Perfectos en Subjuegos II

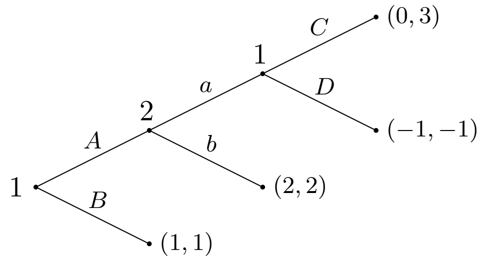

Figura 6.5: Ineficiencia del equilibrio perfecto en subjuegos

inducción hacia atrás. El ejemplo clásico es el juego de entrada de una firma. Véase el juego de la figura 5 para el caso de juegos de información imperfecta.

Ahora, es interesante que el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos puede seleccionar un equilibrio que es dominado por otro equilibrio de Nash. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 6.11 (Ineficiencia del equilibrio perfecto en subjuegos)**.** En el siguiente juego, figura 6.5, la estrategia $((B, C), a)$ es el único equilibrio perfecto en subjuegos. Sin embargo, $((A, D), b)$ es un equilibrio de Nash que domina el equilibrio perfecto en subjuegos.

Teorema 6.12. En un juego información perfecta, el conjunto de estrategias de inducción hacias atrás coincide con los equilibrio perfectos en subjuegos.

El análogo del teorema de Nash para juegos de información imperfecta es el siguiente teorema de Selten.

Teorema 6.13 (Selten)**.** Todo juego finito en forma extensiva de memoria perfecta tiene un equilibrio perfecto en subjuegos (posiblemente en estrategias de comportamiento).

Ejercicio 6.14 (Necesidad de memoria perfecta)**.** El siguiente juego ilustra la necesidad de la hipótesis de memoria perfecta en el teorema de Selten. Demuestre que el juego de la figura 6.6 no tiene un equilibrio en estrategias de comportamiento.

Ejemplo 6.15 (Piccione y Rubinstein)**.** Este es un juego de memoria imperfecta donde un agente puede estar tentado a cambiar de decisión a pesar de no haber recibido ninguna información adicional.

Si bien el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos llama la atención sobre la necesidad de enfocarse en estrategias conjuntas que sean óptimas

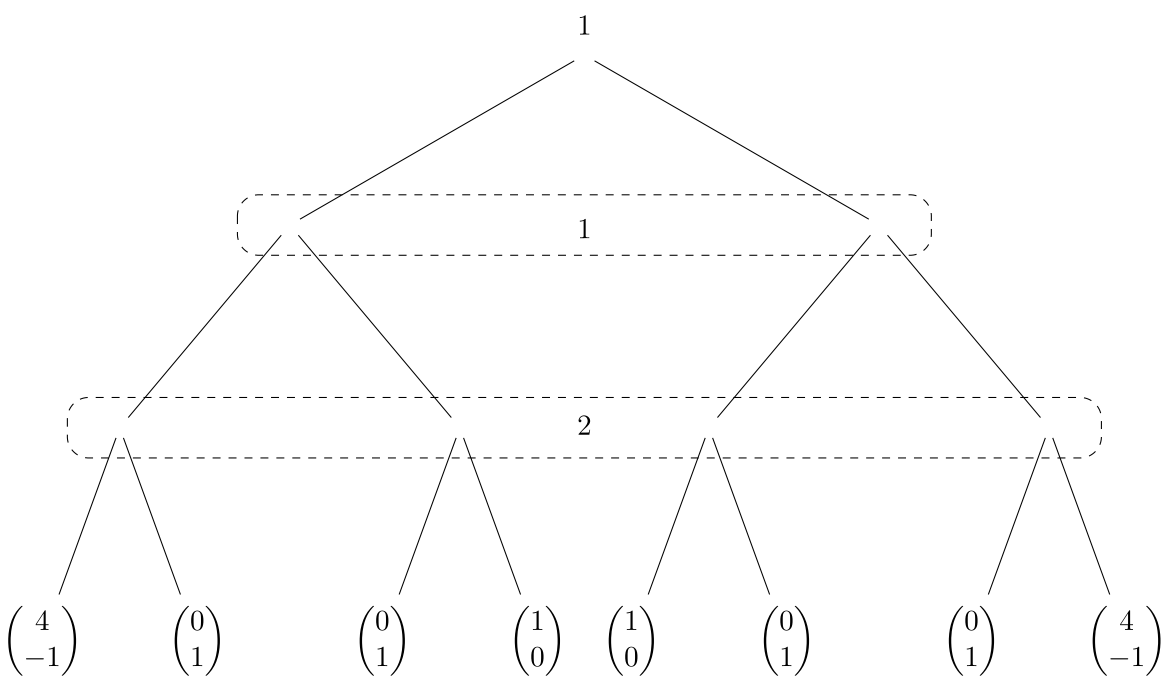

Figura 6.6: No existencia del equilibrio sin memoria perfecta.

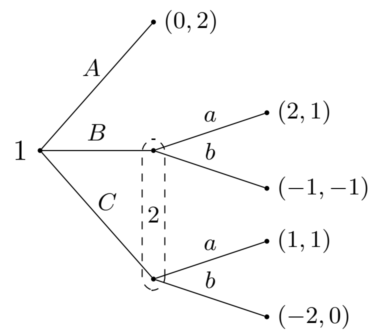

Figura 6.7: Equilibrio Perfecto en Subjuegos no creíble I

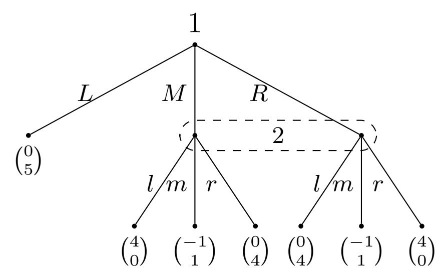

Figura 6.8: Equilibrio Perfecto en Subjuegos no creíble II

dinámicamente (a lo largo de todos los subjuegos), desafortunadamente no logra eliminar todas las amenazas no creíbles. La razón es que este concepto no impone ninguna restricción sobre los caminos que no definen un subjuego. Los dos ejemplos siguientes ilustran el problema.

Ejemplo 6.16. El siguiente juego, figura 6.7, no tiene subjuegos propios. Los equilibrios de Nash (A, b) y (B, a) son equilibrios perfectos en subjuegos. Sin embargo, el primero no es creíble. En particular, no es creíble que el segundo jugador jugará b en caso de tener que jugar.

Ejemplo 6.17. El siguiente juego 6.8 tiene un equilibrio perfecto en subjuegos $((L, m))$ que no es creíble. Una vez el jugador 1 decide entrar, independientemente de si el jugador 2 cree estar en el nodo x o en el nodo y la estrategia mixta para 2, $(0{,}5,\ 0,\ 0{,}5)$ domina la estrategia m para el jugador 2.

Ejercicio 6.18. Muestre que en el juego de la figura 6.8 el único equilibrio en el que el jugador 2 juega m con probabilidad cero es cuando el jugador 1 juega L con probabilidad cero.

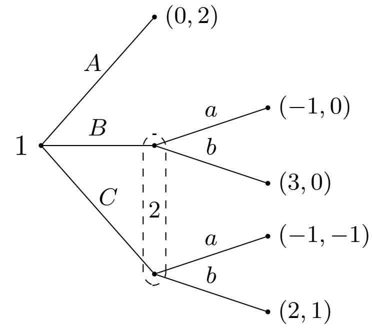

Figura 6.9: Necesidad de sistema de expectativas.

La necesidad de introducir un sistema de expectativas como parte integral de la evaluación que se hace de un juego la ilustra la siguiente modificación del juego de la figura 6.7. La figura 6.9 muestra que (A, b) es un equilibrio de Nash, pero que este sea o no sea creíble depende de con qué probabilidad cree el jugador que, en caso de que le toque jugar, lo hará en uno u otro nodo.

Este ejemplo sugiere que el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos puede ser muy débil en ciertas ocasiones al no imponer ninguna restricción sobre las acciones de un juego en conjuntos de información que no definen un subjuego o sobre caminos que se encuentran por fuera del camino de equilibrio.

Ahora, en la próxima sección vamos a motivar la importancia de tener un modelo de aprendizaje a lo largo del luego. Es decir, una manera formal de ir incorporando nueva informaciónón en la medida que los jugadores van conociendo sobre las jugadas de sus adversarios. Antes de entrar en esos detalles, veamos un caso sencillo pero muy interesante.

Definamos el conjunto de todas las expectativas del agente i como $\Delta_i = \underset{h \in H_i}{\cup} \Delta(h)$ donde $\Delta(h)$ denota el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de información h.

Definición 6.19 (Sistema de expectativas)**.** Un sistema de expectativas de un juego es un conjunto funciones $\{p_i\}_{i=1,\ldots n}$, $p_i : H_i \to \Delta_i$ tal que $p_i(h) \in \Delta(h)$.

La interpretación es: $p_i(h)$ es la expectativa que tiene el jugador i de estar en cada uno de los nodos de su conjunto de información h.

Definición 6.20 (Estimación)**.** Una estimación del juego es $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots n}, \{b_i\}_{i=1,\ldots n}\right)$ donde $(p_i)_{i=1,\ldots n}$ es un sistema de expectativas y $(b_i)_{i=1,\ldots n}$ son estrategias de comportamiento.

Dada una estimación existe una forma natural de definir si las estrategias de comportamiento son óptimas dadas las expectativas de los jugadores (i.e., secuencialmente racionales).

Fijemos una estimación del juego: $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots n}, \{b_i\}_{i=1,\ldots n}\right)$.

Sea $k \in K_i$ un nodo cualquiera. Definimos $u_i\,(b \mid k)$ como la utilidad del jugador i cuando suponemos que este se encuentra en el nodo k y las estrategias de comportamiento utilizadas por los jugadores son $\{b_i\}_{i=1,\ldots n}$.

Obsérvese que esta utilidad la podemos interpretar como una función: $u_i\,(b \mid \cdot) : K_i \to R$.

Definimos la utilidad del jugador i en el conjunto de información $h \in H_i$ cuando el perfil de estrategias de comportamiento es $\{b_i\}_{i=1,\ldots n}$ y las expectativas del jugador son $p_i\,(h) \in \Delta_i(h)$ como:

$$v_i(b \mid h) = E_{p_i(h)}\left[u_i\,(b \mid \cdot)\right].$$

Ejemplo 6.21. Calculemos $v_1(b \mid I)$ para el juego 6.10 (jugador 1, conjunto de información I como aparece en la figura): Analizamos separadamente los 3 subjuegos con raíz x, y y z (dejando de lado el hecho de que están en el mismo conjunto de información I). Es fácil ver que $u_1\,(b \mid x) = 4$, $u_1\,(b \mid y) = 3$ y $u_1\,(b \mid z) = 6$. Supongamos que las expectativas del jugador 1 son $p_x = \frac{1}{2}, p_y = \frac{1}{3}, p_z = \frac{1}{6}$. Luego, dadas las expectativas del jugador 1 en I obtenemos $v_1(b \mid I) = 4$.

Definición 6.22 (Racionalidad secuencial)**.** Una estimación de un juego $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots n}, \{b_i\}_{i=1,\ldots n}\right)$ es secuencialmente racional si para todo jugador i, conjunto de información $h \in H_i$ y estrategia de comportamiento b_i' del jugador i tenemos:

$$v_i(b_i, b_{-i} \mid h) \geq v_i(b_i', b_{-i} \mid h).$$

Intuitivamente, dada esa estimación del juego, ningún jugador tiene incentivos unilaterales a desviarse.

En la figura 6.8, el equilibrio prefecto en subjuegos que no es creíble no es racionalmente secuencial.

Desafortunadamente, una estimación secuencialmente racional no es necesariamente un equilibrio perfecto en subjuegos. Ni siquiera un equilibrio de Nash.

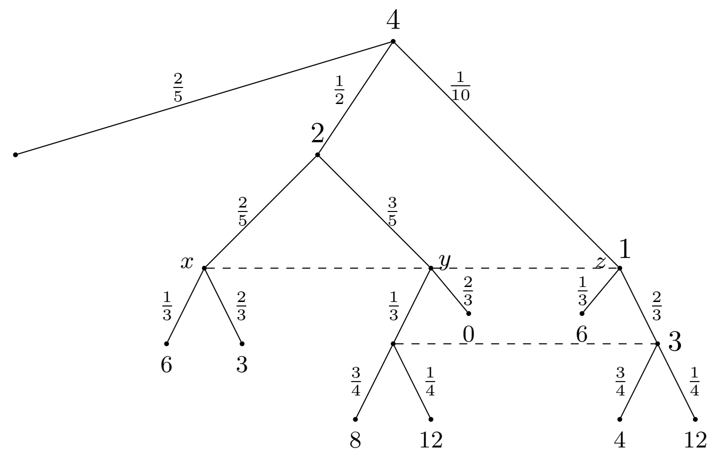

Figura 6.10: Cálculo de utilidad esperada en un conjunto de información

Ejemplo 6.23 (Racionalidad secuencial en el juego de cara y sello)**.** Considere el siguiente juego (Cara y sello): Figura 6.11 Este juego tiene un único equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento: la estrategia mixta de jugar cara con probabilidad $\frac{1}{2}$. Sin embargo la estimación: $p_x = 0, p_y = 1$, $((1,0),(1,0))$ es secuencialmente racional pero no es un equilibrio de Nash.

6.3. Aprendizaje

En esta sección veremos la relevancia de definir un modelo de aprendizaje en ambientes inciertos. El paradigma de modelo de aprendizaje en teoría de la decisión es el regla de Bayes. El siguiente ejemplo llama la atención sobre las sutilezas de este concepto.

Ejemplo 6.24 (Paradoja del gato)**.** Una persona está frente a tres puertas cerradas. Se sabe que detrás de alguna de las puertas hay un gato y el objetivo de la persona es adivinar en qué puerta está el gato. La persona se le pide escoger una puerta. Después, una segunda persona que sabe donde está el gato y cuál fue la puerta elegida por la primera persona abre una de las puertas en la que no está el gato y que no haya sido la elegida por la primera persona. La primera persona puede observar que la puerta que fue abierta no tiene el gato y conoce la forma de actuar de la segunda persona. Ahora, se le pregunta a la primera persona si desearía cambiar de puerta.

El sentido común dice que no hace diferencia. Pero la teoría de la probabi-

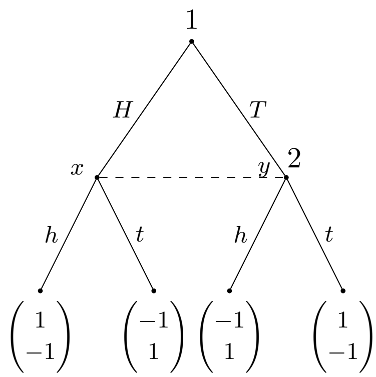

Figura 6.11: Cara y sello.

lidad dice otra cosa. La probabilidad de encontrar el gato en la puerta que permanece cerrada y que no es la elegida por la primera persona es mayor que la elegida inicialmente. Intuitivamente, cuando la persona elige una puerta la probabilidad de que el gato este en esa puerta es $\frac{1}{3}$. Esto sigue siendo cierto no importa lo que haga la segunda persona con las otras dos puertas (i.e., suponga que la segunda persona abre alguna de las otras dos puertas y no le revela la puerta abierta a la primera persona, en ese caso es evidente que la primera persona sigue creyendo que eligió la puerta en la que está el gato con probabilidad $\frac{1}{3}$). Ahora, ciertamente el gato está en esas otras dos puertas con probabilidad $\frac{2}{3}$. Al abrir una de esas dos puertas, la otra puerta, la que no eligió la primera persona pasa a tener probabilidad $\frac{2}{3}$ de tener el gato. En conclusión, cambiar de puerta para la primera persona aumenta su probabilidad de encontrar el gato de $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$.

Para formalizar este problema, supongamos que la primera elección fue la tercera puerta. Sean A_1, A_2 y A_3 los eventos en los cuales el gato está detrás de la puerta $1, 2$ o 3 respectivamente. Sean B_1 y B_2 los eventos en los cuales el segundo jugador abre la puerta 1 o 2 reespectivamente. Nuetro objetivo es calcular $P(A_i \mid B_j)$. Entonces, dada la información del problema es natural suponer:

$$P(A_i) = \frac{1}{3}, P(B_1|A_1) = P(B_2 \mid A_2) = 0$$

$$P(B_1 \mid A_2) = P(B_2 \mid A_1) = 1$$

y

$$P(B_1|A_3) = P(B_2|A_3) = \frac{1}{2}.$$

Entonces si la segunda persona abre la puerta 2 es fácil calcular, usando la regla de Bayes, $P\left(A_1 \mid B_2\right) = \frac{2}{3}$.

Ejercicio 6.25. Usando la regla de Bayes, demuestre que $P\left(A_1|B_2\right) = \frac{2}{3}$.

Vamos a introducir algunas restricciones de compatibilidad entre las expectativas y estrategias de comportamiento de los jugadores.

Definición 6.26 (Consistencia con regla de Bayes)**.** Una estimación de un juego $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots n}, \{b_i\}_{i=1,\ldots n}\right)$ es consistente con la regla de Bayes si, dadas las estrategias de comportamiento de todos los jugadores, la expectativa que tiene cada jugador de estar en un nodo específico es igual a la probabilidad de alcanzar ese nodo, condicional a que se alcanza el conjunto de información al que pertenece el nodo. Obsérvese que esto no impone ninguna restricción sobre las expectativas que puede tener un jugador de estar en un nodo particular cuando la probabilidad de llegar al conjunto de información que contiene ese nodo es cero.

Definición 6.27 (Equilibrio perfecto Bayesiano débil)**.** Una estimación de un juego es un equilibrio perfecto Bayesiano débil si es secuencialmente racional y si la estimación es consistente con la regla de Bayes.

Algunas observaciones:

- La estimación del juego de cara y sello del ejemplo anterior no es consistente con la regla de Bayes y, por lo tanto, no es un equilibrio perfecto Bayesiano débil.
- Todo equilibrio perfecto Bayesiano débil es un equilibrio de Nash (véase Mas Colell, proposición 9.C.1 página 285).
- Un equilibrio perfecto Bayesiano débil no tiene que ser necesariamente un equilibrio perfecto en subjuegos como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.28 (Equilibrio perfecto Bayesiano débil que no es EPS)**.** En el juego de la figura 6.12, (B, X, D) es un equilibrio perfecto Bayesiano débil que lo sustenta la expectativa del jugador 3 de estar en el nodo superior de su conjunto de información con probabilidad 0. Sin embargo, este no es un equilibrio perfecto en subjuegos porque en el único subjuego propio, la estrategia inducida no es un equilibrio de Nash (el jugador 3 tiene incentivos unilaterales a desviarse).

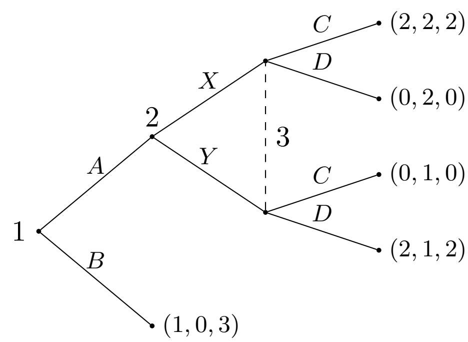

Figura 6.12: EPBD que no es EPS.

Ejemplo 6.29 (Equilibrio perfecto Bayesiano débil con expectativas no creíbles)**.** En el juego de la figura 6.13, las estrategias (x, l) son un EPBD con la expectativa del jugador II de estar parado en el nodo de la izquierda con probabilidad 0,9. Sin embargo, esa expectativa no es creíble (i.e., sería más natural que el jugador II le asignara probabilidad $\frac{1}{2}$ a cada uno de sus nodos).

Ejercicio 6.30. Encontrar un equilibrio creíble del anterior ejemplo.

Ejercicio 6.31. Hacer los ejemplos 9.C.1,9.C.2 y 9.C.3 de Mas Collel.

La consistencia con la regla de Bayes deja indeterminadas las expectativas en los conjuntos de información que no tiene una probabilidad positiva de ser alcanzados.

6.4. Expectativas no creíbles

Dos restricciones adicionales que ayudan a restringir el universo de expectativas son las siguientes.

Definición 6.32 (Independencia)**.** Las expectativas deben reflejar que los jugadores escogen sus estrategias de forma independiente.

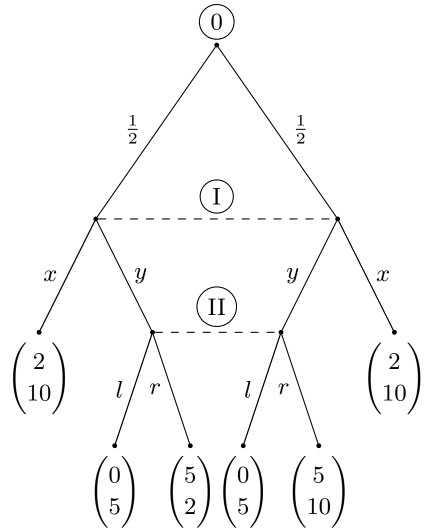

Figura 6.13: Equilibrio perfecto Bayesiano débil que no es creíble (Fuente: Ejemplo 9.C.4 de Mas Collel).

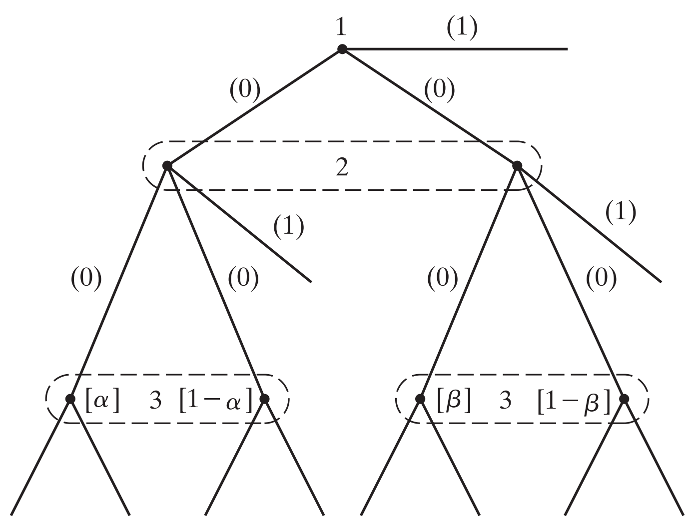

Figura 6.14: Condición de independencia.

La figura 6.14 muestra un juego en el que la restricción de independencia sobre la expectativas implica que $\alpha = \beta$.

Definición 6.33 (Simetría)**.** Jugadores con idéntica información deben tener las mismas expectativas.

La figura 6.15 muestra un juego en el que la restricción de independencia y simetría sobre la expectativas implica que $\alpha = \beta$.

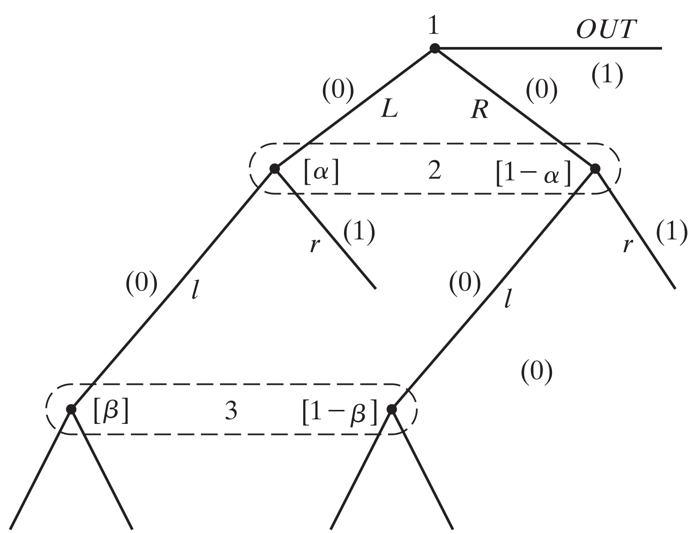

Figura 6.15: Condición de simetría.

Las hipótesis de consistencia con la regla de Bayes, independencia y simetría son *equivalentes* a que la evaluación de un juego sea consistente en el sentido de la siguiente definición. [7]

Definición 6.34 (Evauluaciones Consistentes)**.** Decimos que una evaluación de un juego $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots n}, \{b_i\}_{i=1,\ldots n}\right)$ es consistente si existe una sucesión de estrategias de comportamiento conjuntas $\{b_i^k\}_{k=1,\ldots}$ tal que:

1. Para todo k y para todo i, b_i^k es de soporte completo o completamente mixta (i.e., toda estrategia pura tiene probabilidad estrictamente positiva de ser elegida).

[7] Para más detalles véase Kohlberg y Reny [1997].

2. Para cada i, la sucesión $\{b_i^k\}_{k=1,...}$ converge a b_i.

3. Para cada i, las expectativas que induce la sucesión $\{b_i^k\}_{k=1,...}$ de acuerdo a la regla de Bayes convergen a las expectativas p_i.

Definición 6.35 (Equilibrio Secuencial)**.** Una evaluación de un juego es un equilibrio secuencial si es consistente y secuencialmente racional.

Intuitivamente, en ningún momento del juego (aún en conjuntos de información con probabilidad cero de ser visitados) un jugador tiene incentivos unilaterales a desviarse.

Ejercicio 6.36. Dé un ejemplo de un equilibrio perfecto en subjuegos que sea secuencialmente racional, pero que no sea un equilibrio secuencial.

El análogo al teorema de Nash o al teorema de Selten es, para equilibrios secuenciales, el teorema de Kreps y Wilson.

Teorema 6.37 (Kreps y Wilson)**.** Todo juego en forma extensiva con memoria perfecta tiene un equilibrio secuencial (posiblemente en estrategias de comportamiento) y todo equilibrio secuencial es un equilibrio perfecto en subjuegos.

Ejemplo 6.38. Equilibrio perfecto Bayesiano débil que es perfecto en subjuegos pero no equilibrio secuencial. Considere el juego de la figura 6.16. Las estrategias (A, b, U) son un equilibrio perfecto débil Bayesiano siempre y cuando el jugador 3 crea que está en x_{31} con probabilidad superior a $\frac{2}{3}$. Este equilibrio no es creíble y no es un equilibrio secuencial. Soportar este equilibrio requeriría una sucesión de expectativas convergiendo a cero en el nodo x_{31}. En cambio, (B, b, V) es un equilibrio secuencial y es creíble.

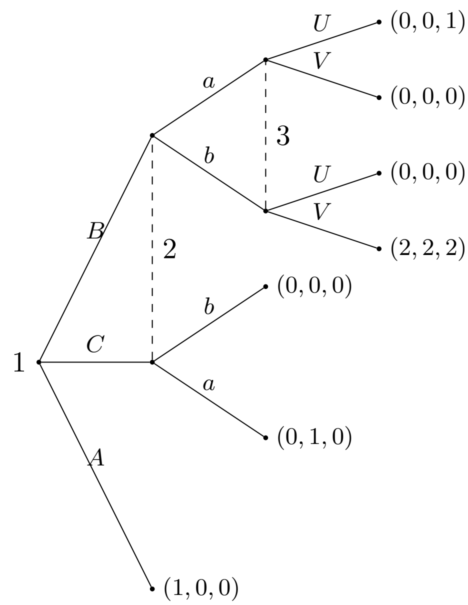

Figura 6.16: Equilibrio perfecto Bayesiano débil que es perfecto en subjuegos pero no equilibrio secuencial. Fuente: Figura 4.10 de Vega - Redondo.

Ejemplo 6.39. Equilibrio Secuencial puede no ser creíble. Considere el juego de la figura 6.17 abajo. Este juego tiene un equilibrio secuencial (A, b) que no es creíble.

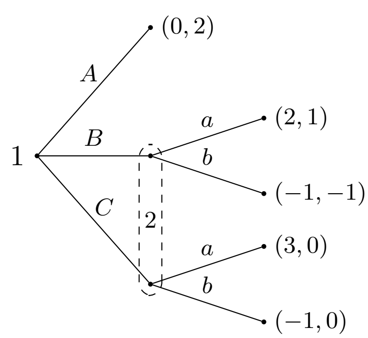

Figura 6.17: Equilibrio Secuencial que no es creíble.

Obsérvese que hasta este punto todos los argumentos para dudar sobre la credibilidad de un equilibrio que lo sustenta una estrategia no creíble, se basan esencialmente en un argumento de inducción hacia atrás. Intuitivamente, estamos asumiendo que los jugadores suponen que después de tomar sus acciones, los jugadores que toman acciones posteriores van ha tomar la mejor acción disponible (i.e., los jugadores se van a portar bien). Esto contrasta con la noción informal que introduciremos en el siguiente capítulo de inducción hacia adelante en la que, intuitivamente, suponemos que los cuando los jugadores planean tomar una acción, suponen que en el pasado los demás jugadores han tomado la mejor acción disponible (i.e., los jugadores se han portado bien).

Ejercicios

1. Este ejercicio es una continuación del ejemplo de la figura 4.10 de Vega - Redondo. Considere el juego de la figura abajo y las siguiente sucesión de estrategias de comportamiento para cada jugador.

   El jugador 1, tiene la sucesión de estrategias $\gamma_k^1 = (1-(1+\rho)\epsilon_k^1, \epsilon_k^1, \rho\epsilon_k^1)$ donde $k = 1, 2, ...$ y $\rho \in (0, 1)$ y ϵ_k^1 es cualquier sucesión de números reales positivos tal que $\epsilon_k^1 \to 0$.

   El jugador 2, tiene la sucesión de estrategias $\gamma_k^2 = (\epsilon_k^2, 1 - \epsilon_k^2)$ donde $k = 1, 2, ...$ y ϵ_k^2 es cualquier sucesión de números reales positivos tal que $\epsilon_k^2 \to 0$.

   El jugador 3, tiene la sucesión de estrategias $\gamma_k^3 = (1 - \epsilon_k^3, \epsilon_k^3)$ donde $k = 1, 2, ...$ y ϵ_k^3 es cualquier sucesión de números reales positivos tal que $\epsilon_k^3 \to 0$.

   a) Dada una estrategia comportamiento $(\gamma_k^1, \gamma_k^2, \gamma_k^2)$ tiene todos los conjuntos de información de todos los jugadores probabilidad positiva de ser visitados con estas estrategias de comportamiento?

   b) Mostrar que $(\gamma_k^1, \gamma_k^2, \gamma_k^2) \to (A, b, U)$

   c) Usar la regla de Bayes para mostrar que para cada k el único sistema de expectativas consisten con la regla de Bayes es para el jugador 2, $p_2(x) = \frac{1}{1+\rho}$, $p_2(y) = 1 - \frac{1}{1+\rho}$ y para 3, $p_3(\overline{x}) = \epsilon_k^2$, $p_3(\overline{y}) = 1 - \epsilon_k^2$.

   d) Muestre que las expectativas del numeral para el jugador 3 convergen a $p_3(\overline{x}) = 0$ y $p_3(\overline{y}) = 1$.

   e) ¿Es el resultado del ítem anterior consistente con las expectativas necesarias que debe tener el jugador 3 para que el equilibrio (A, b, U) sea un equilibrio perfecto Bayesiano débil?

f) ¿Cómo interpreta usted este ejercicio?

2. Considere el siguiente juego (Caballo de Selten), figura 6.18.

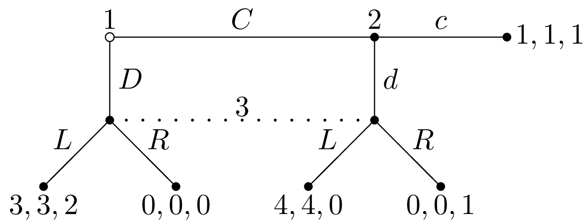

Figura 6.18: Caballo de Selten.

a) Calcular un equilibrio de Nash en estrategias puras que no sea secuencialmente racional.

b) Calcular un equilibrio secuencial.