Capítulo 5

Juegos dinámicos de información perfecta

5.1. Conceptos básicos

Muchas situaciones en las que se presentan interacciones entre varios agentes tienen una forma interactiva. Esta dinámica puede ser explícitamente modelada y de esta forma enriquecer el análisis estático que hemos estudiado hasta el momento. La característica fundamental de estas situaciones estratégicas e interactivas es que a lo largo de la interacción entre los agentes se revela información total o parcial sobre las acciones de los demás que puede ser usadas para revisar las estrategias individuales.

Definición 5.1. Un juego en forma extensiva de información perfecta es una estructura de la forma:

$$\Gamma = (N, K, R, Z, \{K_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{A(k)\}_{k \in K \setminus Z}, \{u_i\}_{i=1,\ldots,n})$$

donde:

1. N es un conjunto de jugadores, $N = \{1, ...n\}$.[1]
2. K es un conjunto finito que representa los nodos de un árbol.
3. R es una relación sobre K que define un árbol.

[1]En ocasiones adicionamos un jugador no estratégico que denotamos por cero y que representa la naturaleza.

4. Z son los nodos terminales del árbol.

5. $\{K_i\}_{i=1,\ldots,n}$ es una partición de $K\backslash Z$ que denota los nodos donde cada jugador juega.

6. Para $i = 1, ..., n$ y $k \in K_i$, $A(k)$ denota las acciones posibles del jugador i en el nodo k. Denotamos un elemento de $a \in A(k)$ por a_k.

7. Para $i = 1, ..., n$ y $z \in Z$, $u_i(z)$ denota la utilidad del agente i en caso de que el resultado final del juego sea el nodo terminal z. Cuando la estructura del árbol la determina algún evento aleatorio (jugadas de la naturaleza), interpretamos estas funciones de utilidad como funciones de utilidad esperadas.

Definición 5.2. Sea $A_i = \underset{k \in K_i}{\cup} A(k)$. Una estrategia pura s_i para el jugador $i = 1, ..., n$ en un juego en forma extensiva Γ es una función $s_i : K_i \longrightarrow A_i$ tal que para todo $k \in K_i$, $s_i(k) \in A(k)$.

Dada una estrategia conjunta $(s_i)_{i=1,\ldots n}$, esta induce un camino único a lo largo del árbol comenzando en la raíz y terminando en algún nodo $z = \zeta(s) \in Z$. En ocasiones utilizaremos la notación $(s_1, ..., s_n)$ para denotar la estrategia conjunta $(s_i)_{i=1,\ldots n}$.

Todo juego en forma extensiva se puede representar de dos formas como juegos estáticos: forma normal y forma multiagentes o de Selten.

Definición 5.3 (Forma normal)**.** Para $i = 1, ..., n$, sea $S_i = \{s_i : K_i \longrightarrow A_i | s_i(k) \in A(k)\}$, $s \in S = \overset{N}{\underset{i=0}{\Pi}} S_i$ y definimos $\zeta(s) \in Z$ como el nodo final correspondiente al único camino que sobre el árbol que define la estrategia conjunta s. Para $i = 1, ..., n$ definimos $\pi_i(s_1, ..., s_n) = u_i(\zeta(s_1, ..., s_n))$. El juego $G = (\{1, ..., n\}, \{S_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{\pi_i\}_{i=1,\ldots,n})$ se llama la representación normal del juego en forma extensiva.

Es fácil ver que un juego en forma normal puede ser la representación normal de juegos distintos en forma extensiva. De otra parte, existe otra forma de representar en forma estática un juego en forma extensiva. La representación multiagente de Selten informalmente supone la existencia de varios agentes de un jugador, uno en cada nodo donde el jugador juega, que actúan de forma independiente y toman decisiones en nombre del jugador que representan.

Definición 5.4 (Forma multiagente o de Selten)**.** Sea $N^* = \underset{i \in N}{\cup} \{i\} \times K_i$ el conjunto de jugadores. Un jugador es una pareja (i, k_i) donde $i \in N$ y $k_i \in$

K_i. Por simplicidad, y mientras no haya riesgo de confusión, denotaremos el agente (i, k_i) por k_i. Para cada jugador k_i, sea $S^*_{k_i} = A(k_i)$ su conjunto de estrategias. Una estrategia conjunta es $s \in S^*$ donde $S^* = \prod_{k_i \in N^*} S^*_{k_i}$ y escribimos $s = (s_{k_i})_{k_i \in N^*}$. Cada estrategia conjunta tiene asociado un nodo terminal $z \in Z$ que denotamos por $z = \zeta^*(s_{k_i})_{k_i \in K_i, i \in N}$.
Para cada jugador k_i definimos

$$\pi^*_{k_i}((s_{k_i})_{k_i \in N^*}) = u_i(\zeta^*((s_{k_i})_{k_i \in N^*})).$$

El juego $G^* = (N^*, \left(S^*_{k_i}\right)_{k_i \in N^*}, (\pi^*_{k_i})_{k_i \in N^*})$ se llama la representación de Selten o multiagente del juego en forma extensiva.

Ejemplo 5.5. Considere el siguiente juego en forma extensiva (figura 5.1).

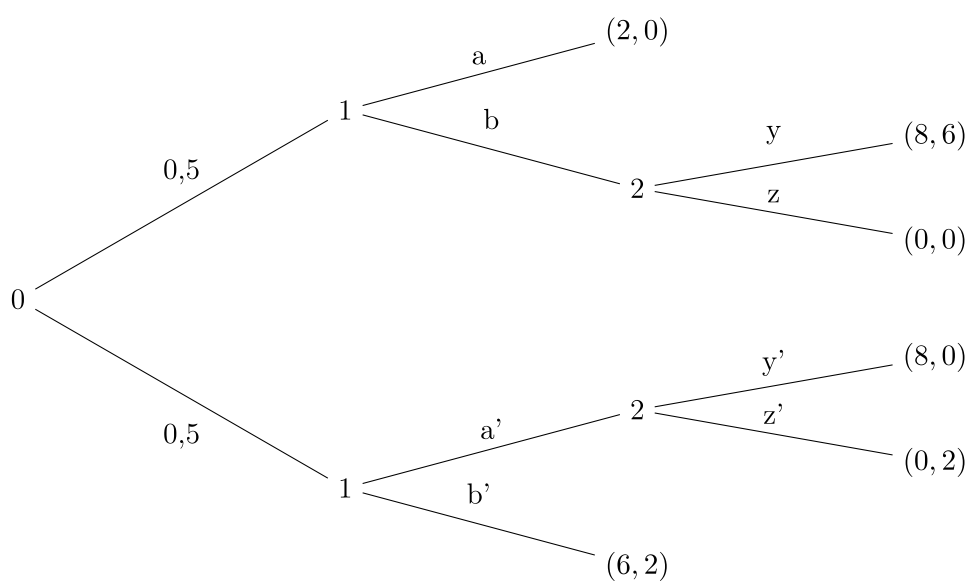

Figura 5.1: Forma extensiva.

La forma normal de este juego es:

1\2	yy'	yz'	zy'	zz'
aa'	5,0	1,2	5,0	1,1
ab'	4,1	4,1	4,1	4,1
ba'	8,3	4,4	4,0	0,1
bb'	7,4	7,4	3,1	3,1

y la multiagente es, en forma extensiva:

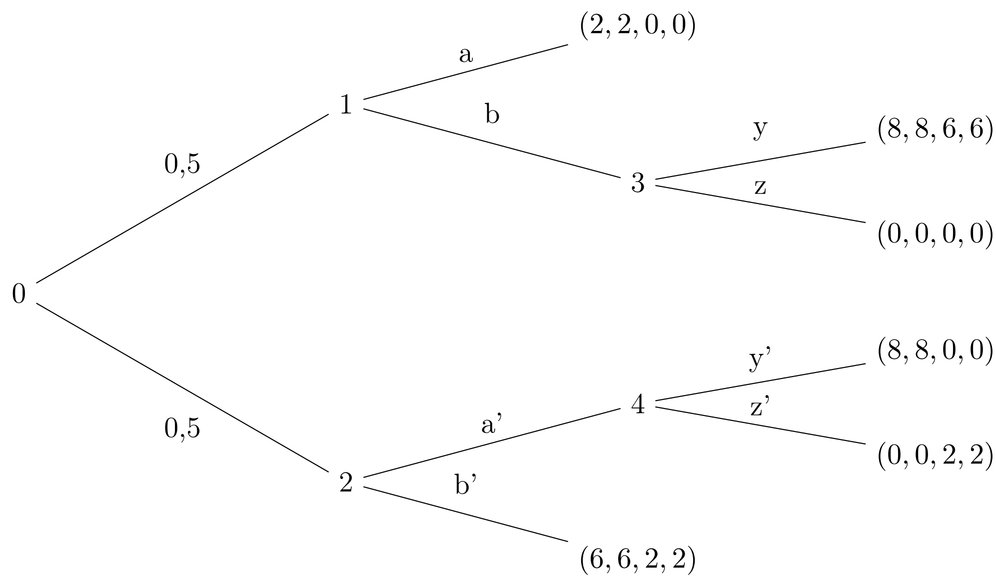

Figura 5.2: Forma extensiva de la representación multiagente.

Todo juego en forma extensiva puede representarse como un juego en forma normal. Luego, una primera aproximación al problema de describir sitemáticamente el resultado de un juego dinámico es analizar su forma normal. Sin embargo, esto no explota la naturaleza dinámica del problema. El siguiente ejemplo (entrada de una firma) pone de manifiesto la debilidad del análisis en forma normal y llama la atención sobre la necesidad de desarrollar conceptos de equilibrio que exploten explícitamente el proceso de revelación de información o la dinámica del problema.

Ejemplo 5.6 (Entrada de una firma)**.** Considere el juego de la figura 5.3.

Este juego tiene como representación normal:

1\2	F	C
N	0,2	0,2
E	-1,-1	1,1

El anterior ejemplo pone de manifiesto que hay cierto tipo de equilibrios en juegos dinámicos que no son creíbles. Concretamente, en el ejemplo anterior el equilibrio (O, F) lo sustenta una amenaza del jugador 2 que al jugador 1

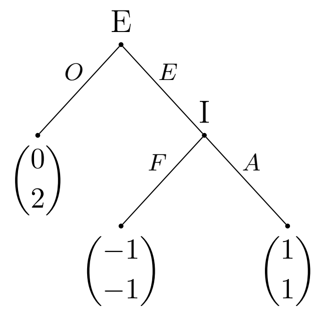

Figura 5.3: Entrada de una firma.

no tiene por qué parecerle creíble. Por eso decimos que este equilibrio no es creíble.

5.2. Inducción hacia atrás

Un concepto interesante en juegos de información perfecta, que busca eliminar estas amenazas no creíbles, es el de estrategia de inducción hacia atrás. Intuitivamente, esta racionaliza la idea de que un jugador escoge un plan que sea consistente temporalmente y cuando es la hora de ejecutarlo este no se arrepiente de lo previamente planeado.

Definición 5.7 (Inducción hacia atrás)**.** Decimos que la estrategia conjunta $\widehat{s} = (\widehat{s}_1, ..., \widehat{s}_N)$ es una estrategia de inducción hacia atrás en un juego de información perfecta si puede obtenerse de la siguiente forma:

1. Para cada nodo k tal que todo nodo sucesor de k sea terminal, si $k \in K_i$, entonces $\widehat{s}_i(k)$ maximiza el pago del agente i entre las posibilidades que tiene en ese nodo.

2. Convierta el nodo k en un nodo terminal donde los pagos son los que determina la estrategia $\widehat{s}_i(k)$.

3. Repita los pasos anteriores hasta llegar la raíz del árbol.

La definición anterior se extiende de forma natural al caso de estrategias mixtas.

Teorema 5.8 (Kuhn)**.** Si s es una estrategia de inducción hacia atrás en un juego de información perfecta, entonces s es un equilibrio de Nash - Cournot.

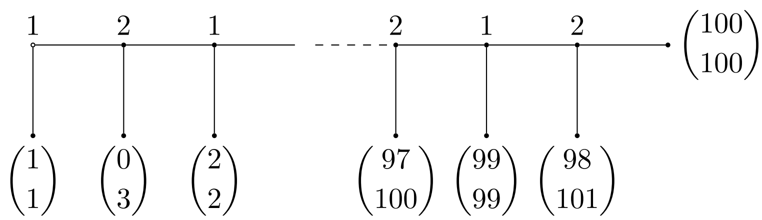

Figura 5.4: Juego del Cienpiés de Rosenthal

El converso de este teorema no es cierto. El ejemplo clásico es el problema de entrada de una firma. En este juego, el equilibrio de Nash - Cournot que no es creíble no es una estrategia de inducción hacia atrás.

Las estrategias de inducción hacia atrás en un juego de información perfecta son casos especiales del concepto de equilibrio perfecto en subjuegos que introduciremos en la siguiente sección.

Teorema 5.9 (Zermelo)**.** Todo juego de información perfecta tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras que se puede construir mediante inducción hacia atrás. Más aún, si ningun jugador es indiferente entre dos nodos terminales (a lo largo del proceso de inducción hacia atrás), solo hay un equilibrio de Nash que es una estrategia de inducción hacia atrás.[2]

Prueba. El teorema es una consecuencia inmediata del teorema de Kuhn. ∎

Ejercicio 5.10. Demuestre que las estrategias de inducción hacia atrás no son necesariamente únicas.

El concepto de inducción hacia atrás tiene como consecuencia resultados inesperados y altamente ineficientes. Considere el juego del cienpies de Rosenthal (1981) (figura 5.4).

Ejercicio 5.11. Escriba el juego del Cienpiés como un juego en forma normal.

[2]Este es el teorema que Mas Colell et.al llaman teorema de Zermelo. Sin embargo, este no es históricamente el teorema Zermelo (1913). Una forma más cercana al teorema incialmente probado por Zermelo es el teorema que afirma que el ajedrez es un juego determinado (véase más abajo la definición de juego determinado). El teorema original de Zermelo se considera el primer teorema importante en teoría de juegos. Para una discusión detallada de la contribución de Zermelo a la teoría de juegos véase Schwalbe, U. y P. Walker (1999). Zermelo and the Early History of Game Theory.

Ejercicio 5.12. Considere el siguiente juego en forma extensiva (figura 5.5). Calcule la estrategia de inducción hacia atrás. Escriba el juego en forma normal y calcule sus equilibrios de Nash y el equilibrio perfecto (en forma normal del juego). Obsérvese que el equilibrio perfecto no es una estrategia de inducción hacia atrás (esto contrasta con el concepto de equilibrio perfecto para juegos en forma extensiva que introduciremos más adelante).

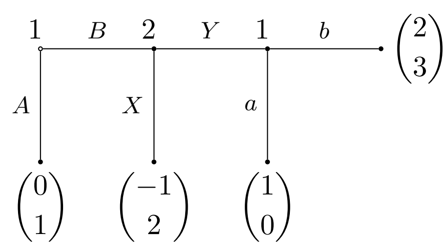

Figura 5.5: Equilibrio perfecto en forma normal que no es de inducción hacia atrás

Ejercicio 5.13 (Vega Redondo pag. 112, basado en van Damme)**.** Considere el siguiente juego en forma extensiva (figura 5.6). Muestre que $((A, D), b)$, $((B, D), a)$ y $((B, C), a)$ son equilibrios de Nash. En los dos primeros, D no es una amenza creíble. Obsérvese que en el único equilibrio creíble el pago es inferior para ambos jugadores comparado con $((A, D), b)$.

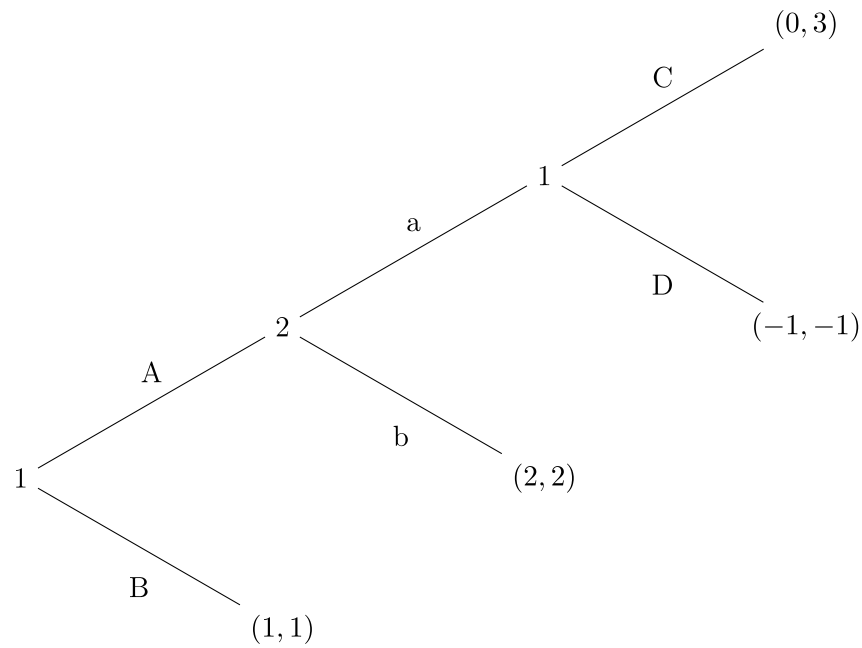

Figura 5.6: Juego de forma extensiva con equilibrios "no creíbles".

5.3. Juegos bilaterales de suma cero

El teorema de Zermelo junto con el teorema de von Neumann de juegos de suma cero tiene implicaciones fuertes sobre los juegos de información perfecta de suma cero.

Teorema 5.14. Todo juego bilateral de información perfecta y suma cero tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras (por inducción hacia atrás) que a su vez son estrategias maxmin para cada jugador (por el teorema de von Neumann).

Ejemplo 5.15 (El juego de ajedrez)**.** Por el anterior teorema, existe una estrategia para alguno de los jugadores tal que no importa que haga el otro jugador a lo largo del juego ésta garantiza que el jugador siempre gana o, como mínimo, empata. El problema fundamental es que no se conoce si las blancas o las negras pueden forzar un empate o una victoria. La limitación sin embargo no es teórica sino de tipo computacional. En efecto, supongamos que en un tablero jugado se sabe que las blancas pueden ganar con certeza independientemente de lo que el otro haga (esto puede ser un nodo final del juego, con el menor número de fichas posibles y un jaque mate como última jugada). Según el teorema de Zermelo, basta con hacer inducción hacia atrás y obtendríamos de esa forma un estrategia para las blancas que fuerzan una victoria. El problema con esta estrategia es que el número de jugadas admisibles en el ajedrez ha sido estimado en alrededor de $10^{20} - 10^{43}$ jugadas. Estos son números comparables al número de moléculas en el universo y cualquier búsqueda de estrategias óptimas en un espacio de esta dimensión es en la actualidad computacionalmente imposible. Esta observación llama la atención sobre la importancia de distinguir el concepto de racionalidad entre uno puramente conceptual y uno de tipo computacional. Este último concepto sirve como fundamento de la idea de racionalidad limitada y es el centro de estudio de un área nueva y muy fructífera de la teoría de juegos conocida como teoría de algorítmica de juegos.

Ejercicio 5.16. Este es un ejercicio para los que conocen un poco lógica matemática y es una prueba alternativa de las afirmaciones hechas en el ejemplo anterior sobre el juego del ajedrez. Escriba una sentencia en el lenguaje de primer orden que represente que las blancas tienen una estrategia ganadora independientemente de la estrategia de las negras. Muestre que la negación de esta sentencia afirma que las negras tienen una estrategia que garantiza por lo menos un empate. Luego, como esta sentencia o su negación debe ser verdad, esto prueba que en el ajedrez alguno de los jugadores tiene una estrategia que es siempre ganadora o que garantiza al menos un empate.

Un caso particular de juegos de suma cero son los juegos donde las utilidades posibles de cada jugador están en el conjunto $\{-1, 1\}$. Llamaremos a estos juegos "juegos totales de suma cero". Al jugador con pago 1 lo llamaremos el ganador, al otro, el perdedor.

Definición 5.17. Para juegos totales de suma cero, decimos que el juego es determinado si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora independientemente de lo que el otro haga (i.e., una estrategia estrictamente dominante).

El teorema anterior implica que todo juego de información perfecta, total de suma cero, es determinado.

Lo importante de este teorema es que al asegurar que el equilibrio de Nash es también una solución maxmin del juego, esto implica que esas estrategias puras aseguran como mínimo el valor del juego para cada jugador independientemente de lo que el otro haga. Además, no existen incentivos unilaterales a desviarse. A continuación discutimos algunas consecuencias de la afirmación anterior para algunos juegos conocidos.

Ejemplo 5.18 (Juego de Gale)**.** . Considere el siguiente juego. Dado una figura con $n \times m$ cuadrados (n filas y m columnas) el juego consiste en retirar de forma iterativa (primero un jugador, después el otro, y así sucesivamente) pedazos como se muestra en la figura 5.7. En cada jugada es obligatorio retirar por lo menos un cuadrado. El perdedor es el jugador que está obligado e retirar el último cuadrado.

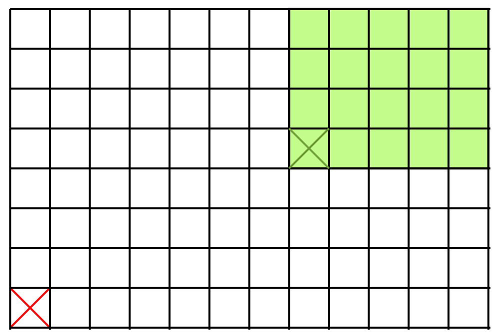

Figura 5.7: Juego de Gale.

Ahora considere tres casos:

1. $n \times n$. El primer jugador tiene una estrategia ganadora. La estrategia ganadora es $(2, 2)$.

2. $n \times m$. El primer jugador tiene una estrategia ganadora. Suponga que el jugador 2 tiene una estrategia ganadora y suponga que el jugador 1 en su primer movimiento elige el cuadrado en la posición (n, m). Entonces el jugador 2 tiene que tener una estrategia ganadora. Supongamos que esta estrategia es elegir el cuadrado (i, j). Ahora obsérvese que el jugador 1 hubiese podido elegir el cuadrado (i, j) como su primera jugada y en este caso el jugador 2 recibiría el tablero de juego igual a como lo está recibiendo el jugador 1. Luego el jugador 2 tendría que tener una estrategia ganadora. Por lo tanto el jugador 1 podría utilizar esta estrategia y ganar el juego, lo que contradice la hipótesis de que el juego es determinado en favor del jugador 2. Note que es importante en el argumento que la primera jugada sea elegir (n, m). Esto es lo que garantiza que cuando el segundo jugador elige (i, j) el juego que queda es idéntico a que si desde el principio el primer jugador hubiése elegido el cuadrado (i, j).

3. $n \times \infty$, y $\infty \times \infty$. En ambos casos el juego es determinado, y puede haber hasta dos estrategias ganadoras.

Ejemplo 5.19 (Juegos determinados)**.** Existen juegos en los que se sabe que uno de los jugadores tiene una estrategia ganadora independientemente de la estrategia del oponente (i.e., el juego es determinado, pero no se sabe en favor de quién).[3] Para ilustrar esto en un juego sencillo considere un polinomio $P(x_1, ..., x_L)$ en L variables $\{x_i\}_{i=1,..,L}$ donde cada x_i es un número entero no negativo. El siguiente es un juego aritmético asociado al polinomio $P(x_1, ..., x_L)$.[4] Existen dos jugadores que juegan alternándose. El jugador I comienza y escoge un entero no negativo x_1. Después el jugador II escoge un entero no negativo x_2, y así sucesivamente hasta que alguno de los dos jugadores le corresponde escoger el entero x_L. El objetivo del último jugador es hacer el polinomio $P(x_1, ..., x_L) = 0$. El objetivo del otro jugador es hacer este polinomio diferente de cero. Es muy fácil demostrar que en todo juego aritmético el jugador I o el jugador II tiene una estrategia ganadora independientemente de lo que el otro haga (i.e., todo juego aritmético es determinado).

Ahora, considere el siguiente juego definido por el polinomio $P(x_1, ..., x_5) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3x_5 - 2x_3 - 2x_5 - 3$. En este caso, el primer jugador juega de último, y gana si logra que $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3x_5 - 2x_3 - 2x_5 - 3 = 0$, pero ello se puede reescribir como $(x_1 + x_2)^2 + 1 = (x_3 + 2)(x_5 + 2)$, de donde es fácil ver que, dado que el jugador uno escoge x_3 y x_5 al final, el jugador dos tiene una estrategia ganadora si y solo si existen infinitos números primos de la forma $n^2 + 1$, un problema de la teoría de números no resuelto a la fecha.

Más interesante aún es el hecho de que existen juegos aritméticos en el que la estrategia ganadora no es efectivamente computable (no es decidible). Rabin (1957) ha dado un ejemplo basado en conjuntos simples. Jones (1981, 1982) muestra como se puede reinterpretar este juego como un juego aritmético.

Ejemplo 5.20 (Juegos determinados no decidibles)**.** Rabin (1957). Sean A y B dos jugadores y $W \subset \mathbb{N}^3$. Las reglas del juego son: En tres rondas, A y B escogen tres números naturales (A comienza, después B y después A). El resultado final es una tripla (a, b, c). Si $(a, b, c) \in W$ gana B. Este juego es determinado (inducción hacias atrás). ¡Existe W decidible tal que el juego es determinado en favor de B y B no puede calcular, con ningún computador incluso hipotético, su estrategia ganadora!

[3] Basado en Jones, J.P. 1982. Some undecidable determined games. International Journal of Game Theory. Vol 11. No. 2. Pag 63-70.

[4] Decimos que L es la longitud del juego.

Ejercicio 5.21. . El juego de adivinanzas del mentiroso (liar guessing game?) es un juego jugado entre dos jugadores, A y B. Las reglas del juego dependen de dos enteros positivos k y n conocidos para ambos jugadores.[5]

Al principio del juego, A escoge dos enteros x y N con $1 \leq x \leq N$. El jugador A mantiene x secreto, y le revela N honestamente al jugador B. El jugador B ahora intenta obtener información sobre x preguntándole al jugador A preguntas de la siguiente forma. Cada pregunta consiste de B especificando un conjunto arbitrario S de enteros positivos (posiblemente alguno especificado en alguna pregunta anterior), y preguntándole a A si x pertenece a S. El jugador B puede preguntar tantas preguntas como desee. Después de cada pregunta, el jugador A debe responder con sí o no, pero puede mentir de forma que satisfaga la siguiente restricción: entre cualesquiera $k+1$ respuestas consecutivas, al menos una respuesta debe ser verdadera.

Después de que B ha preguntado tantas preguntas como quiera, debe especificar un conjunto X de a lo más n enteros positivos. Si x pertenece a X, entonces B gana; de lo contrario, pierde.

Demuestre que:

- Si $n \geq 2^k$, entonces B puede garantizar una victoria.
- Para todos los k suficientemente grandes, existe un entero $n \geq 1{,}99^k$ tal que B no puede garantizar una victoria.

[5] Tomado de http://polymathprojects.org/.