# Otros Conceptos en Juegos[1]

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes y Quantil

Febrero 2024

[1] Basado en Riascos, A. 2022. Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones. www.alvaroriascos.com

# Contenido

# Contenido

# Motivation

- Considere el siguiente juego.

| $1\backslash 2$ | $X_2$ | $Y_2$ |
|---|---|---|
| $X_1$ | 2,2 | 0,6 |
| $Y_1$ | 6,0 | **1,1** |

- $(Y_1, Y_2)$ es un equilibrio de Nash. La ineficiencia del equilibrio motiva la introducción de un mecanismo de coordinación.
- Una forma de hacer esto es permitir que los jugadores se comuniquen. Esto puede hacer el espacio de estrategias muy complicado.
- Una alternativa es suponer que la comunicación se manifiesta en la posibilidad de firmar contratos de obligatorio cumplimiento.

## Contenido

# Juego con contratos: sin riesgo

- Suponga que se introduce un contrato: si ambos lo firman ambos prometen jugar $(X_1, X_2)$. Si solamente uno lo firma, digamos $i$, entonces $i$ promete jugar $Y_i$.
- El nuevo juego es:

| 1\2 | $X_2$ | $Y_2$ | $S_2$ |
|---|---|---|---|
| $X_1$ | 2,2 | 0,6 | 0,6 |
| $Y_1$ | 6,0 | 1,1 | 1,1 |
| $S_1$ | 6,0 | 1,1 | 2,2 |

- Ahora $(S_1, S_2)$ es un equilibrio de Nash (de hecho un equilibrio perfecto).

# Juego con contratos: con riesgo

- Suponga que se introduce un contrato adicional: si ambos lo firman entonces se lanza una moneda al aire. Si cae cara juegan $(X_1, Y_2)$. Si cae sello juegan $(Y_1, X_2)$. Si solamente uno firma este segundo contrato, digamos $i$, entonces $i$ promete jugar $Y_i$.
- El nuevo juego es:

| 1\2 | $X_2$ | $Y_2$ | $S_2$ | $S‘_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 2,2 | 0,6 | 0,6 | 0,6 |
| $Y_1$ | 6,0 | 1,1 | 1,1 | 1,1 |
| $S_1$ | 6,0 | 1,1 | 2,2 | 1,1 |
| $S‘_1$ | 6,0 | 1,1 | 1,1 | 3,3 |

- Ahora $(S_1, S_2), (S‘_1, S‘_2)$ es un equilibrio de Nash (de hecho equilibrios perfectos) y existe un tercer equilibrio que cada jugador juega la estrategia mixta $(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

## Contenido

# Equilibrio Correlacionado en Forma Reducida

- Suponer que los contratos son de obligatorio cumplimiento es una hipótesis muy fuerte.
- Sin embargo, es posible que, simplemente permitiendo que estos se comuniquen estos lleguen a acuerdos compatibles con sus incentivos (*self enforcing*).

# Ejemplo

- Considere el siguiente juego.

| 1\2 | A | B |
|---|---|---|
| X | **5,1** | 0,0 |
| Y | 4,4 | **1,5** |

- Además existe un equilibrio simétrico en estrategias mixtas $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ cuyo pago esperado es $\frac{5}{2}$ para cada jugador.
- Este último es ineficiente pues la estrategia $(Y, A)$ tiene un mayor pago para ambos jugadores.
- Obsérvese que este equilibrio en estrategias mixtas le asigna una probabilidad positiva a $(X, B)$.
- Vamos a ver que esta ineficiencia en parte se le puede atribuir a la selección aleatoria independiente que hacen los dos jugadores en sus estrategia mixtas.

# Motivación

- Obsérvese que si los agentes pudieran coordinar sus acciones con base en un mecanismo del tipo: al tirar una moneda al aire si cae cara se jugamos $(X, A)$ si cae sello $(Y, B)$
- El valor esperado de cada jugador sería 3 mejor que la estrategia mixta pero aún ineficiente pues $(Y, A)$ sigue teniendo un mayor pago para ambos jugadores.

# Motivation

- Si ambos acuerdan la utilización del mismo éste es un equilibrio en el sentido de que no existen incentivos a desviarse. ¿Es posible acordar un mecanismo que sea un equilibrio y el pago esperado sea aún mejor?
- Si el mecanismo permite dar señales privadas a cada jugador la respuesta es sí.
- Vamos a demostrar que si se utiliza un mecanismo de coordinación con señales privadas, existe un equilibrio (que definimos más adelante) en el cual la utilidad de cada individuo es 3,3.

# Equilibrio Correlacionado

**Definition (Mecanismo de coordinación estocástico en forma reducida)**

Un mecanismo de coordinación estocástico (en forma reducida) para un juego en forma estratégica es una distribución de probabilidad $\overline{p} : \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_N \to [0, 1]$. Por simplicidad vamos a considerar únicamente el caso en el que la distribución es de soporte finito.

**Definition (Equilibrio correlacionado en forma reducida)**

Un equilibrio correlacionado es un mecanismo de coordinación estaocástica $\overline{p} : \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n \to [0, 1]$ tal que para toda función de recomendaciones para cada jugador $\overline{\gamma}_i : \Sigma_i \to \Sigma_i$ se tiene:

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \overline{p}(\sigma) \overline{\pi}_i (\sigma) \geq \sum_{\sigma \in \Sigma} \overline{p}(\sigma) \overline{\pi}_i (\overline{\gamma}_i (\sigma_i), \sigma_{-i})$$

# Equilibrio Correlacionado

**Definition (Mecanismo de coordinación estocástico en forma reducida)**

Un mecanismo de coordinación estocástico (en forma reducida) para un juego en forma estratégica es una distribución de probabilidad $\overline{p} : \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_N \to [0, 1]$. Por simplicidad vamos a considerar únicamente el caso en el que la distribución es de soporte finito.

**Definition (Equilibrio correlacionado en forma reducida)**

Un equilibrio correlacionado es un mecanismo de coordinación estaocástica $\overline{p} : \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n \to [0, 1]$ tal que para toda función de recomendaciones para cada jugador $\overline{\gamma}_i : \Sigma_i \to \Sigma_i$ se tiene:

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \overline{p}(\sigma) \overline{\pi}_i (\sigma) \geq \sum_{\sigma \in \Sigma} \overline{p}(\sigma) \overline{\pi}_i (\overline{\gamma}_i (\sigma_i), \sigma_{-i})$$

# Equilibrio Correlacionado

- Es un mecanismo privado porque $\gamma_i$ solo depende de $\sigma_i$ y no de $\sigma_{-i}$.
- Podemos interpretar este concepto de equilibrio de la siguiente forma. Cada jugador recibe de forma privada una recomendación para jugar $\sigma_i$ y todos saben que la probabilidad con la que el mecanismo recomienda cualquier estrategia conjunta es $\overline{p} : \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n \rightarrow [0, 1]$.
- Luego un equilibrio correlacionado es uno en el que ningun jugador tiene un incentivo a utilizar una función de recomendación distinta a la función identidad.

# Ejemplo

- Considere de nuevo el ejemplo anterior:

| 1\2 | A | B |
|---|---|---|
| X | **5,1** | 0,0 |
| Y | 4,4 | **1,5** |

- Sea $\overline{p}(X, A) = \overline{p}(Y, A) = \overline{p}(Y, B) = \frac{1}{3}$.
- Este es un equilibrio correlacionado con pago esperado $3\frac{1}{3}$ para cada jugador.

# Equilibrio Correlacionado

- Un característica sobresaliente de la definición de equilibrio correlacionado es que le da un papel importante a las asimetrías de información. En siguiente ejemplo resalta el papel que juegan las asimetrías de información en situaciones estratégicas. En particular, vamos a ver que perder información puede tener como consecuencia una ganancia en eficiencia.

# Contenido

# Ejemplo: Valor de la Información

- Un característica sobresaliente de la definición de equilibrio correlacionado es que le da un papel importante a las asimetrías de información. Específicamente, en un equilibrio correlacionado todos los jugadores usan una recomendación distinta.
- El siguiente ejemplo resalta el papel que juegan las asimetrías de información en situaciones estratégicas. En particular, vamos a ver que obtener información adicional puede no tener ningún valor por ir en detrimento de los pagos de algunos jugadores.

# Ejemplo: Valor de la Información

## Example

Considere el juego:

| 3 | M | | | N | | | Q | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1\2 | A | B | 1\2 | A | B | 1\2 | A | B |
| | X | 0,0,3 | 0,0,0 | X | 2,2,2 | 0,0,0 | X | 0,0,0 | 1,1,1 |
| | Y | 1,1,1 | 0,0,0 | Y | 0,0,0 | 2,2,2 | Y | 0,0,0 | 0,0,3 |

Tabla Página 60 Vega

# Ejemplo: Valor de la Información

- Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras: $(Y, A, M)$ y $(X, B, Q)$. Ambos equilibrios tiene un pago neto de 1 para cada jugador. Existen sin embargo estrategias conjuntas que domina a ambos equilibrios: $(X, A, N)$, $(Y, B, N)$. Consideremos ahora el siguiente mecanismo de coordinación estocástico (en forma reducida): $p(X, A, N) = p(Y, B, N) = \frac{1}{2}$. Entonces $p$ soporta un equilibrio correlacionado con pago esperado 2 para cada jugador.

# Ejemplo: Valor de la Información

- Ahora supongamos que 3 se le da la opción de pagar por conocer la recomendación puntual que el mecanismo le hace a los otros dos jugadores. En este caso 3 respondería de la siguiente forma: Si los otros dos juegan $(X, A)$ el juega $M$ y si juegan $(Y, B)$ el juega $Q$. Luego si los otros dos jugadores son informados de que 1 a comprado esta opción ciertamente no jugaran las estrategias recomendadas y no habrá coordinación impidiendo que los jugadores obtuvieran un pago de 2. Luego la opción de obtener más información para 3 no tiene ningun valor.