Capítulo 3

Otros conceptos

Una de las debilidades de la teoría desarrollada hasta este punto es la multiplicidad de equilibrios que se pueden encontrar incluso en juegos muy sencillos. En este capítulo introducimos formas de eliminar algunos de estos equilibrios usando conceptos de solución más demandantes estratégicamente y/o epistemológicamente (i.e., nivel de conocimiento exigido).

3.1. Equilibrio perfecto

La eliminación de estrategias dominadas débilmente es difícil de justificar sobre la base del comportamiento puramente racional: una estrategia dominada débilmente puede ser un mejor respuesta a alguna estrategia de otro jugador. Luego, sólo si estamos seguros de que el otro jugador no va utilizar esa estrategia se justifica eliminarla. El concepto de equilibrio de Nash tampoco elimina estrategias dominadas débilmente: Puede existir un equilibrio de Nash tal que un jugador está utilizando un estrategia dominada débilmente. Para mayor ilustración consideremos el siguiente juego.[1]

Ejemplo 3.1 (Equilibrio de Nash dominado)**.**

1\2	A	B
a	1,1	0,-3
b	-3,0	0,0

La estrategia (b, B) es un equilibrio de Nash en el cual ambas estrategias son débilmente dominadas.

[1]Esta sección está basada en Mas-Colell et. al. [1995].

Vamos a ver que si suponemos cierta cautela por parte de los jugadores, en la medida que estos reconozcan que con cierta probabilidad sus adversarios pueden no jugar Nash, entonces es posible racionalizar la eliminación de estrategias dominadas débilmente.

Quisiéramos definir un concepto de equilibrio que sea robusto a cierto tipo de perturbaciones del juego que reflejan la posibilidad de que los jugadores puedan cometer errores. La definición que captura esta idea es la siguiente:

Definición 3.2 (Equilibrio perfecto en forma normal)**.** Sea $\epsilon_i : S_i \to (0,1)$ tal que $\sum_{s \in S_i} \epsilon_i(s) < 1$ y $\Delta_{\epsilon_i} = \{\sigma_i \in \Sigma(S_i) : \sigma_i(s) \geq \epsilon_i(s) \forall s \in S_i\}$. Es decir, Δ_{ϵ_i} es el conjunto de todas las estrategias mixtas con soporte completo y acotadas por debajo por ϵ_i. Denotamos por $G_\epsilon = \left(N, (\Delta_{\epsilon_i})_{i=1,\ldots,N}, (\pi_i)_{i=1,\ldots,N}\right)$ el juego perturbado por $(\epsilon_i)_{i=1,\ldots,N}$

Decimos que σ es un equilibrio perfecto en forma normal si es un equilibrio de Nash y si existen sucesiones $\left(\epsilon_i^k\right)_{k=1,\ldots,}$ y equilibrios de Nash σ^k de los juegos perturbados G_{ϵ^k} tal que:

1. $\lim_{k\to\infty} \epsilon_i^k(s) = 0 \ \forall i, s \in S_i$
2. $\lim_{k\to\infty} \sigma_i^k = \sigma_i$

En otras palabras, un juego perturbado es aquel en el que se juegan todas las estrategias puras con probabilidad positiva. De esta manera, la definición de equilibrio perfecto solo requiere que exista una sucesión de juegos perturbados y equilibrios de Nash de los juegos perturbados que converjan al juego original y estrategia candidata a ser un equilibrio perfecto. Intuitivamente la definición captura la idea de que los agentes pueden cometer errores (*trembling hand*) y por lo tanto evalúan juegos ligeramente perturbados donde los agentes le asignan probabilidad positiva a todas la estrategias puras.

La definición anterior puede resultar muchas veces difícil de trabajar porque requiere que se evalúen muchos juegos, por lo que la siguiente proposición puede ayudar a verificar si un equilibrio de Nash es perfecto.

Proposición 6. Sea $G = (N, (S_i)_{i=1,\ldots,N}, (\pi_i)_{i=1,..,N})$ un juego en forma normal. Una estrategia conjunta $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ es un equilibrio perfecto (en forma normal) del juego G si y solamente si para cada jugador i existe $\left(\sigma_i^k\right)_{k=1,\ldots,n}$ sucesión de estrategias mixtas de soporte completo tal que:

1. Para todo i, $\lim_{k\to\infty} \sigma_i^k = \sigma_i$

2. Para todo i y k, σ_i es la mejor respuesta cuando los demás juegan σ_{-i}^k.

Ejemplo 3.3. Considere el juego:

1\2	X	Y
Aa	0,1	0,1
Ab	0,1	0,1
Ba	-1,2	1,0
Bb	-1,2	2,3

(Aa, X) es un equilibrio perfecto en forma normal. Tome, por ejemplo, las sucesiones de estrategias mixtas con soporte completo $\sigma_1^k = (1-\frac{3}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ y $\sigma_2^k = (1-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ con $k = 4, 5, 6, ...$ Note que la suma de todos los componentes de la estrategia es uno y cada uno de estos está entre cero y uno, para todo k en el dominio definido. También es importante resaltar que esta es una estrategia completamente mixta ya que únicamente cuando $k \to \infty$ algunos componentes de la estrategia se vuelven cero.

Para probar que efectivamente se trata de un equilibrio perfecto se necesita mostrar que se cumplen las dos condiciones de la proposición anterior.

1. $\lim_{k\to\infty} \sigma_i^k = \sigma_i \quad \forall i$
   - $\lim_{k\to\infty} \sigma_1^k = \lim_{k\to\infty}(1 - \frac{3}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = (1, 0, 0, 0) = \sigma_1$
   - $\lim_{k\to\infty} \sigma_2^k = \lim_{k\to\infty}(1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = (1, 0) = \sigma_2$
2. Para todo i y k, σ_i es la mejor respuesta ante σ_{-i}^k.
   - Para el jugador 1:
     $\pi_1(Aa, \sigma_2^k) = (1 - \frac{1}{k}) * 0 + (\frac{1}{k}) * 0 = 0$
     $\pi_1(Ab, \sigma_2^k) = (1 - \frac{1}{k}) * 0 + (\frac{1}{k}) * 0 = 0$
     $\pi_1(Ba, \sigma_2^k) = (1 - \frac{1}{k}) * (-1) + (\frac{1}{k}) * 1 = -1 + \frac{2}{k}$
     $\pi_1(Bb, \sigma_2^k) = (1 - \frac{1}{k}) * (-1) + (\frac{1}{k}) * 2 = -1 + \frac{3}{k}$
     Note que tanto Ba como Bb tienen un pago que se va reduciendo en la medida que k crece. El pago más alto entonces lo tienen cuando $k = 4$ y para ambas estrategias este pago es menor que cero. Por lo tanto para $i = 1$ es verdad que $\sigma_1 = Aa$ es mejor respuesta para todo k.
   - Para el jugador 2:
     $\pi_2(\sigma_1^k, X) = (1 - \frac{3}{k}) * 1 + (\frac{1}{k}) * 1 + (\frac{1}{k}) * 2 + (\frac{1}{k}) * 2 = 1 + \frac{2}{k}$

$\pi_2(\sigma_1^k, Y) = (1 - \frac{3}{k}) * 1 + (\frac{1}{k}) * 1 + (\frac{1}{k}) * 0 + (\frac{1}{k}) * 3 = 1 + \frac{1}{k}$
Note que el pago de jugar X es igual al de de jugar Y más $\frac{1}{k}$, y como k es un número positivo, siempre va a ser mejor jugar X. Con esto se demuestra que $\sigma_2 = X$ es mejor respuesta para todo k.

Ejercicio 3.4. Considere el juego:

1\2	X	Y
Aa	0,2	0,2
Ab	0,2	0,2
Ba	-1,0	3,0
Bb	-1,-1	-1,-1

Encuentre todos los equilibrios perfectos en forma normal y las sucesiones de estrategias mixtas que los soportan.

Ejercicio 3.5. Demuestre que en todo equilibrio perfecto en forma normal ninguna estrategia débilmente dominada es jugada con probabilidad positiva.

Ejercicio 3.6. Demuestre que en un juego con únicamente dos jugadores todo equilibrio de Nash en el no se juegan estrategias débilmente dominadas con probabilidad positiva es un equilibrio perfecto en forma normal (véase Kreps, página 439).

Ejercicio 3.7. Considere el juego:

1\2	X	Y
A	2,2	2,2
BC	4,1	1,0
BD	0,0	0,1

Este juego tiene un equilibrio perfecto en formal normal pero no en forma extensiva (véase Capítulo 7).

Selten [1975] demostró que todo juego finito tiene un equilibrio perfecto en forma normal. En particular, todo juego finito tiene un equilibrio de Nash en el que ninguna estrategia débilmente dominada se juega con probabilidad positiva.

3.2. Equilibrio fuerte y equilibrio inmune a coaliciones

El concepto de equilibrio de Nash se basa en la idea de que, en equilibrio, no deben existir incentivos unilaterales a desviarse. Esto es, ningún jugador puede hallar beneficioso desviarse de la estrategia que le corresponde en Nash suponiendo que los demás mantienen fija la estrategia que les corresponde en Nash. Un generalización natural de esta idea es suponer que no existen incentivos a que ningún grupo de personas (i.e., coaliciones) se desvien de las estrategias que a ese grupo les corresponde cuando se supone que los que están fuera de la coalición mantiene sus estrategias fijas. La siguiente definición formaliza esa idea.

Definición 3.8 (Equilibrio fuerte)**.** Una estrategia conjunta $\widehat{\sigma}$ es un equilibrio fuerte si para todo $C \subset N$ no existe una estrategia conjunta $(\sigma_i)_{i \in C}$ tal que:

$$\pi_i((\sigma_i)_{i \in C}, \widehat{\sigma}_{N \setminus C}) > \pi_i(\widehat{\sigma}),\ \forall i \in C$$

Podemos deducir inmediatamente de la definición que un equilibrio fuerte es eficiente débilmente en el sentido de Pareto.

Ejemplo 3.9. Este juego tiene un único equlibrio fuerte pero dos equilibrios de Nash.

1\2	A	B
A	1,1	0,0
B	0,0	4,4

Este es un concepto de equilibrio muy fuerte (no existe en el caso del Dilema de los Prisioneros) y pueden darse otro tipo de dificultades como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.10 (Bernheim, Peleg y Whinston 1987)**.** Considere el siguiente juego entre tres individuos.

1\2	A	B	1\2	A	B
X	0,0,10*	-5,-5,0	X	-2,-2,0	-5,-5,0
Y	-5,-5,0	1,1,4	Y	-5,-5,0	-1,-1,5*
	M		3	N	

En este juego existen dos equilibrios de Nash - Cournot y uno de ellos domina al otro. Ninguno de los dos equilibrios de Nash - Cournot es un equilibrio fuerte pero el equilibrio dominado tiene algunas características que motivan el próximo concepto de equilibrio que introduciremos.

Para ver que el primer equilibrio (X,A,M) no es un equilibrio fuerte, obsérvese que 1 y 2 tienen un incentivo a desviarse. El segundo equilibrio claramente no es un equilibrio fuerte. Ahora, considere los incentivos a desviarse del segundo equilibrio (dominado) al primero. Los tres jugadores tienen incentivos para desviarse al equilibrio dominante. Ahora, si los jugadores 1 y 2 creen que el jugador 3 va jugar M, la idea del equilibrio fuerte nos sugiere que 1 y 2 tendrían el incentivo a desviarse juntos y jugar Y, B respectivamente. Pero si el jugador 3 internaliza ese argumento entonces preferiría jugar N y volvemos al equilibrio ineficiente.

El problema de tipo conceptual identificado en el anterior ejemplo motiva la introducción de un concepto más débil.

Definición 3.11 (Equilibrio inmune a coaliciones informalmente)**.** Una estrategia conjunta es un equilibrio inmune a coaliciones si:

1. Es un equilibrio de Nash - Cournot.

2. No existen incentivos a desviaciones bilaterales admisibles. Una desviación bilateral es admisible si es un equilibrio de Nash - Cournot del juego reducido de dos jugadores donde todos los demás jugadores tienen sus estrategias fijas.

3. No existen desviaciones trilaterales admisibles. Una desviación trilateral es admisible si no existen incentivos a desviaciones bilaterales admisibles ni a desviaciones unilaterales admisibles.

4. Así sucesivamente *ad infinitum*.

Ciertamente este es un concepto de equilibrio más débil que el concepto de equilibrio fuerte (menos desviaciones estratégicas del candidato a equilibrio son admisibles). Notemos que, por ejemplo, en el dilema de los prisioneros no existe un equilibrio fuerte pero el equilibrio en estrategias dominadas sí es un equilibrio inmune a coaliciones.

En el último ejemplo de las anteriores notas el equilibrio (Y, B, N) es un equilibrio inmune a coaliciones. Para ver esto verifiquemos las condiciones de la definición anterior. (Y, B, N) es un equilibrio de Nash y no existen incentivos bilaterales a desviarse (menos aún a desviaciones bilaterales admisibles). Ahora, considere los incentivos a una desviación de la coalición de todos los jugadores. Claramente existe un incentivo a moverse al equilibrio de Nash - Cournot (X, A, M).

Preguntémonos entonces si esta desviación es admisible. Para ser admisible no debería de haber ningún incentivo a desviaciones bilaterales admisibles. Sin embargo, los jugadores 1 y 2 si tiene un incentivo a desviarse y esta desviación sí es admisible pues es un equilibrio de Nash - Cournot del subjuego que definen ellos dos.

Este es un concepto muy fuerte de equilibrio y deja de existir en muchas circunstancias. Un resultado interesante de Moreno y Wooders (1996) afirma que si en el conjunto de estrategias no dominadas iterativamente existe una que domina débilmente a todas las demás, entonces esta estrategia es un equilibrio inmune a coaliciones.

3.3. Juegos con contratos

Considere el siguiente juego.

1\2	X_2	Y_2
X_1	2,2	0,6
Y_1	6,0	1,1

(Y_1, Y_2) es un equilibrio de Nash, pero la ineficiencia del equilibrio motiva la introducción de un mecanismo de coordinación. Una forma de hacer esto es permitir que los jugadores se comuniquen. Esto puede hacerse con un espacio de estrategias muy complicado. Una alternativa es suponer que la comunicación se manifiesta en la posibilidad de firmar contratos de obligatorio cumplimiento. Esto quiere decir que firmar el contrato es comprometerse a los pagos que este establece.[2] Sin embargo, la firma del contrato es un decisión voluntaria (una estrategia posible).

Suponga que se introduce un contrato: si ambos lo firman ambos prometen jugar (X_1, X_2). Si solamente uno lo firma, digamos i, entonces i promete jugar Y_i. El nuevo juego es:

[2]Los pagos deben ser realizables a partir de los resultados posibles del juego original. De lo contrario, introduciendo resultados nuevos, se podría lograr cualquier cosa.

1\2	X$_2$	Y$_2$	S$_2$
X$_1$	2,2	0,6	0,6
Y$_1$	6,0	1,1	1,1
S$_1$	6,0	1,1	2,2

Ahora (S_1, S_2) es un equilibrio de Nash (de hecho un equilibrio perfecto). Ahora, suponga que se introduce un contrato adicional: si ambos lo firman, entonces se lanza una moneda al aire. Si cae cara, juegan (X_1, Y_2). Si cae sello, juegan (Y_1, X_2). Si solamente uno firma este segundo contrato, digamos i, entonces i promete jugar Y_i. El nuevo juego es:

1\2	X$_2$	Y$_2$	S$_2$	S'$_2$
X$_1$	2,2	0,6	0,6	0,6
Y$_1$	6,0	1,1	1,1	1,1
S$_1$	6,0	1,1	2,2	1,1
S'$_1$	6,0	1,1	1,1	3,3

Ahora $(S_1, S_2), (S_1', S_2')$ son equilibrios de Nash (de hecho, equilibrios perfectos) y existe un tercer equilibrio en el cual cada jugador juega la estrategia mixta $(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

3.4. Equilibrio correlacionado

Considere el siguiente juego.

1\2	A	B
X	**5,1**	0,0
Y	4,4	**1,5**

Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (X, A) y (Y, B). Además existe un equilibrio simétrico en estrategias mixtas $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ cuyo pago esperado es $\frac{5}{2}$ para cada jugador. Este último es ineficiente pues la estrategia (Y, A) tiene un mayor pago para ambos jugadores. Obsérvese que este equilibrio en estrategias mixtas le asigna una probabilidad positiva a (X, B). Vamos a ver que esta ineficiencia en parte se le puede atribuir a la selección aleatoria independiente que hacen los dos jugadores en sus estrategia mixtas.

Suponga que existe un mecanismo que permite coordinar las acciones de los jugadores en este juego del siguiente estilo: al tirar una moneda al aire, si cae cara se juega (X, A) si cae sello, (Y, B). El valor esperado de cada jugador sería 3, lo que es mejor que la estrategia mixta, pero aún es ineficiente pues (Y, A) sigue teniendo un mayor pago para ambos jugadores. Si ambos acordaran la utilización de este mecanismo, este sería un equilibrio en el sentido de que no existen incentivos a desviarse.

¿Es posible acordar un mecanismo que sea un equilibrio y tal que el pago esperado sea aún mejor? Si el mecanismo permite dar señales privadas a cada jugador, la respuesta es sí. Vamos a demostrar que si se utiliza un mecanismo de coordinación con señales privadas existe un equilibrio (que definimos más adelante) en el cual la utilidad de cada individuo es $3.\overline{3}$.

La diferencia entre un mecanismo con señales privadas o públicas quedará clara más adelante una vez definamos formalmente el concepto de recomendaciones. Por el momento, notemos que en el mecanismo descrito los agentes podrían intentar desviaciones de la recomendación condicionales a las recomendaciones que el mecanismo le hace a los demás jugadores. En un mecanismo privado, las posibles desviaciones son únicamente condicionales a la recomendaciones privadas que el jugador recibe (es decir, no se puede planear una estrategia dependiendo de las recomendaciones a los demás porque estas no son observadas). Un ejemplo clásico de un mecanismo de coordinación con señales públicas son las señales de un semáforo en una intersección de dos vías.

Definición 3.12 (Mecanismo de coordinación estocástico)**.** Un mecanismo de coordinación estocástico M para un juego en forma estratégica G es un espacio de probabilidad $(\Omega, \{P_i\}_{i=1,...N}\ , p)$ donde Ω es un universo de eventos, $P = \{P_i\}_{i=1,...N}$ es una partición de Ω y p es una probabilidad sobre la partición.[3]

El mecanismo de coordinación estocástico tiene como objeto permitir la coordinación de las estrategias con base en recomendaciones dadas a cada jugador $\gamma_i : \Omega \to \Sigma_i$ y donde cada jugador conoce la distribución conjunta de las funciones de recomendación. Más precisamente, los jugadores conocen el mecanismo de coordinación estocástico y por lo tanto pueden deducir la distribución conjunta de las funciones de recomendación.

Definición 3.13 (Equilibrio correlacionado)**.** Dado un mecanismo de coordinación estocástico M, un equilibrio correlacionado es un recomendación para cada jugador $\gamma_i : \Omega \to \Sigma_i$, medible con respecto P, tal que para todo

[3]Más formalmente, sobre la $\sigma-$ álgebra generada por la partición $\{P_i\}_{i=1,...,N}$.

$\widetilde{\gamma}_i : \Omega \to \Sigma_i$ medible con respecto a P:

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\overline{\pi}_i\left(\gamma(\omega)\right) \geq \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\overline{\pi}_i\left(\widetilde{\gamma}_i\left(\omega\right), \gamma_{-i}\left(\omega\right)\right)$$

Donde $\gamma(\omega) = (\gamma_1(\omega), ..., \gamma_N(\omega))$.En otras palabras, la idea es dar una recomendación privada a los jugadores en donde las probabilidades de cada recomendación son conocidas por todos los agentes. A partir de estas probabilidades los agentes calculan su pago esperado y evalúan si tienen incentivos a seguir la recomendación o no.

Ejemplo 3.14. Considere el juego anterior y el siguiente mecanismo de coordinación estocástico, $\mathcal{M} = (\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{P_1, P_2\}, p)$ donde $P_1 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}$, $P_2 = \{\{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}\}$ y p es la distribución de probabilidad uniforme sobre $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ (obsérvese que la $\sigma-$ álgebra generada por la partición es partes de Ω). Ahora considere las siguientes recomendaciones: $\gamma_1(\omega_1) = X$ y $\gamma_1(\omega_2) = \gamma_1(\omega_3) = Y$; y $\gamma_2(\omega_3) = B$ y $\gamma_2(\omega_1) = \gamma_2(\omega_2) = A$. Entonces la recomendación conjunta (γ_1, γ_2) es un equilibrio correlacionado para el mecanismo de coordinación estocástico $\mathcal{M}$. Para ver esto mostremos que ningún jugador tiene incentivos a desviarse. Para el jugador 1, sea $\widetilde{\gamma}$ una recomendación medible con respecto a P_1. Es fácil verificar para las diferentes alternativas de $\widetilde{\gamma}$ que no existen incentivos a desviarse. Para el jugador 2 se hace una verificación similar.

La condición que define el concepto de equilibrio correlacionado se puede escribir de la siguiente forma:

$$E_p\left[\overline{\pi}_i\left(\gamma\right)\right] \geq E_p\left[\overline{\pi}_i\left(\widetilde{\gamma}_i, \gamma_{-i}\right)\right],$$

donde el valor esperado se calcula con respecto a la distribución p.

Observemos también que la siguiente definición es equivalente a la definición anterior, lo que sugiere que el espacio de eventos Ω no es esencial.

Definición 3.15 (Mecanismo de coordinación estocástico en forma reducida)**.** Un mecanismo de coordinación estocástico (en forma reducida) para un juego en forma normal es una distribución de probabilidad $\overline{p} : \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_N \to [0, 1]$. Por simplicidad vamos a considerar únicamente el caso en el que la distribución es de soporte finito.

Definición 3.16 (Equilibrio correlacionado en forma reducida)**.** Un equilibrio correlacionado es un mecanismo de coordinación estocástico $\overline{p} : \Sigma_1 \times$

$... \times \Sigma_n \to [0,1]$ tal que para toda función de recomendaciones para cada jugador $\overline{\gamma}_i : \Sigma_i \to \Sigma_i$ se tiene:

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \overline{p}(\sigma)\overline{\pi}_i(\sigma) \geq \sum_{\sigma \in \Sigma} \overline{p}(\sigma)\overline{\pi}_i(\overline{\gamma}_i(\sigma_i), \sigma_{-i})$$

Ejercicio 3.17. Demostrar la equivalencia de las dos definiciones de equilibrio correlacionado.

Observemos que para verificar que no hay incentivos a desviarse en un equilibrio correlacionado basta con verificar que no existen incentivos a desviarse de las recomendaciones a estrategias puras. Podemos interpretar este concepto de equilibrio de la siguiente forma: cada jugador recibe de forma privada una recomendación para jugar σ_i y todos saben que la probabilidad con la que el mecanismo recomienda cualquier estrategia conjunta es $\overline{p} : \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n \to [0,1]$. Luego, un equilibrio correlacionado es uno en el que ningún jugador tiene un incentivo a utilizar una función de recomendación distinta a la función identidad.

Todo equilibrio de Nash es un equilibrio correlacionado. Sea $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_N^*)$ un equilibrio de Nash. Entonces si definimos $\Omega = \prod_i S_i$ y $p = \sigma_1^* \times ... \times \sigma_N^*$ este es un mecanismo de coordinación que soporta el equilibrio correlacionado donde la recomendación es la función constante $\gamma_i = \sigma_i^*$.

Hay otra forma de representar un equilibrio de Nash como un equilibrio correlacionado (considere el espacio de estados como las estrategias mixtas conjuntas y suponga que el mecanismo de coordinación se concentra en el equilibrio de Nash). Cuando existen varios equilibrios de Nash, cualquier distribución sobre estos es un equilibrio correlacionado. Cuando el mecanismo de coordinación es público estos son los únicos equilibrios correlacionados que existen.

La idea de un equilibrio correlacionado con señales públicas es idéntica a la definición anterior excepto que a los jugadores se les permite utilizar recomendaciones de la forma $\overline{\gamma}_i : \Sigma \to \Sigma_i$. Se sigue que el conjunto de equilibrios correlacionados que utilizan un mecanismo de coordinación público es un subconjunto del conjunto de equilibrios correlacionados que utilizan un mecanismo de coordinación privado.

Ejemplo 3.18. Reescribamos el ejemplo anterior como un equilibrio correlacionado en forma reducida. Para esto, basta con deducir la distribución conjunta de las dos recomendaciones (variable aleatorias) sobre el conjunto de estrategias mixtas. Esa distribución conjunta es el equilibrio correlacionado en forma reducida. En este caso le asigna probabilidad $\frac{1}{3}$ a $((1,0),(1,0))$, $((0,1),(1,0)),((0,1),(0,1))$ y probabilidad cero a $((1,0),(0,1))$.

Ejercicio 3.19. Este ejercicio usa el teorema de Bayes, el cual será introducido más adelante. Sin embargo, para aquellos que tengan conocimientos básicos en análisis Bayesiano, este ejercicio ofrece una perspectiva diferente del concepto de equilibrio correlacionado. El ejercicio es prerrequisito para entender el siguiente ejemplo. Sea $\bar{p}$ un mecanismo de correlación estocástico. Por el teorema de Bayes:

$$\bar{p}(\sigma_{-i} \mid \sigma_i) = \frac{\bar{p}(\sigma_i, \sigma_{-i})}{\sum\limits_{\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}} \bar{p}(\sigma_i, \sigma_{-i})}$$

Utilizando esta probabilidad condicional podemos dar la siguiente interpretación del concepto de equilibrio correlacionado. Cada agente es informado de su recomendación, pero no de la recomendación de los demás. Entonces $\bar{p}(\sigma_{-i} \mid \sigma_i)$ es la probabilidad que el jugador i asigna a que a los demás jugadores les hayan recomendado σ_{-i} cuando su recomendación fue σ_i.

Demuestre que la siguiente definición de equilibrio implica la definición de equilibrio correlacionado dada anteriormente. Decimos que $\bar{p}$ es un equilibrio correlacionado si para todo $\sigma_i, \sigma_i' \in \Sigma_i$:

$$\sum_{\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}} \bar{p}(\sigma_{-i} \mid \sigma_i) \overline{\pi}_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right) \geq \sum_{\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}} \bar{p}(\sigma_{-i} \mid \sigma_i) \overline{\pi}_i\left(\sigma_i', \sigma_{-i}\right)$$

La anterior equivalencia de hecho facilita la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 7. Suponga que $ES \neq \emptyset$. Entonces, existe un único equilibrio correlacionado, y es aquel que soporta al único elemento de ES.

Prueba. Sea $s \in S$ el (único) equilibrio en estrategias dominantes. Considere el mecanismo de coordinación estocástico $\bar{p} : \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n \to [0,1]$ dado por

$$\bar{p}(\sigma) = 1_{\{s\}}(\sigma)$$

Probemos inicialmente que este es un equilibrio correlacionado. Sea $i \in N$ y $\bar{\gamma}_i : \Sigma_i \to \Sigma_i$ una función de recomendación. Luego, note que

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \bar{p}(\sigma) \bar{\pi}_i(\bar{\gamma}_i(\sigma_i), \sigma_{-i}) = \bar{\pi}_i(\bar{\gamma}_i(s_i), s_{-i}) \leq \bar{\pi}_i(s_i, s_{-i}) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \bar{p}(\sigma) \bar{\pi}_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Donde en la primera y última igualdad hemos usado el hecho de que $\bar{p}$ es degenerada en s y la desigualdad se debe a que s_i es estrictamente dominante. Ahora, veamos que este es de hecho el único equilibrio correlacionado. Suponga hacia contradicción que existe otro equilibrio correlacionado distinto $\bar{q} : \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n \to [0,1]$. Luego $\exists \hat{\sigma} \in \Sigma \setminus \{s\}$ tal que $\bar{q}(\hat{\sigma}) > 0$. En particular, esto implica que $\exists i^* \in N : \ \hat{\sigma}_{i^*} \neq s_{i^*}$ y para este i^* se satisface por dominancia estricta de s_{i^*} que $\bar{\pi}(\hat{\sigma}_{i^*}, \hat{\sigma}_{-i^*}) < \bar{\pi}(s_{i^*}, \hat{\sigma}_{-i^*})$. Considere la función de recomendación $\bar{\gamma}_{i^*} : \Sigma_{i^*} \to \Sigma_{i^*}$ dada por $\bar{\gamma}_{i^*}(\sigma_{i^*}) = s_{i^*}$. Entonces,

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \bar{q}(\sigma)\bar{\pi}_i(\sigma_{i^*}, \sigma_{-i^*}) < \sum_{\sigma \in \Sigma} \bar{q}(\sigma)\bar{\pi}_{i^*}(s_{i^*}, \sigma_{-i^*}) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \bar{q}(\sigma)\bar{\pi}_{i^*}(\bar{\gamma}_{i^*}(\sigma_{i^*}), \sigma_{-i^*})$$

Lo que contradice que $\bar{q}$ sea un equilibrio correlacionado.

■

Resta responder si el anterior resultado se extiende o no al caso de dominancia débil. Para ello, basta explotar el hecho de que la existencia de un equilibrio en estrategias débilmente dominantes no implica unicidad del equilibrio de Nash.

Ejercicio 3.20. Demuestre que la existencia de un equilibrio en estrategias débilmente dominantes no implica unicidad del equilibrio correlacionado.

Ejemplo 3.21 (Juego de la gallina)**.** Este juego sirve para ilustrar que los equilibrios correlacionados pueden darle probabilidad positiva a estrategias conjuntas que no son equilibrios Nash (incluso una probabilidad alta) y mejorar el pago esperado de todos los jugadores. Considere el siguiente juego:

1\2	**C**hicken out	**D**are
Chicken out	6,6	2,7
Dare	7,2	0,0

Este juego describe la situación en la que se encuentran dos pilotos que van directo uno contra el otro. Si uno de los dos se acobarda (Chicken out) y esquiva al otro mientras que el segundo mantiene el rumbo, el cobarde recibe un pago bajo y el que mantuvo el rumbo, un pago alto. Si ambos mantienen el rumbo, colisionan, por lo que el pago es bajo para ambos. Si ambos se acobardan, hacen como si nada hubiera pasado y el pago es alto para ambos.

Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras, y uno en mixtas:

$$EN = \left\{ (D,C), (C,D), \left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right) \right\}$$

El pago que recibe cada uno de los jugadores en cada uno de los equilibrios es el siguiente:

$$
\begin{array}{c|c}
\pi_1(C,D) = 2 & \pi_2(C,D) = 7 \\
\pi_1(D,C) = 7 & \pi_2(D,C) = 2 \\
\pi_1\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right) = 4.\bar{6} & \pi_2\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right) = 4.\bar{6}
\end{array}
$$

De estos pagos es posible ver que los dos Nash en puras llevan a resultados muy desiguales entre los jugadores y que el pago del equilibrio en mixtas, aunque es más equitativo, es bajo. Por este motivo, puede ser interesante intentar combinar los equilibrios de Nash con la estrategia conjunta (C,C) para mejorar los pagos de los jugadores. El riesgo es que, como (C,C) no es un equilibrio de Nash, al darle una probabilidad alta, los jugadores tengan incentivos a desviar.

Probemos que la siguiente recomendación es un equilibrio correlacionado.

$$
\gamma = \begin{cases} (C,C) & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \\ (D,C) & \text{con probabilidad } \frac{1}{4} \\ (C,D) & \text{con probabilidad } \frac{1}{4} \end{cases}
$$

- Jugador 1

  1. Cuando la recomendación es jugar C.
     En este caso el jugador uno no sabe si el otro recibió la recomendación de jugar C o D. Por este motivo usamos Bayes:

     $P(\gamma_2 = C \mid \gamma_1 = C) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

     $P(\gamma_2 = D \mid \gamma_1 = C) = \frac{1}{3}$

     a) Pago esperado de seguir la recomendación:

     $$\pi_1(s_1 = \gamma_1, s_2 = \gamma_2 \mid \gamma_1 = C) = \frac{2}{3} * 6 + \frac{1}{3} * 2 = \frac{14}{3}$$

     b) Pago esperado de desviar:

     $$\pi_1(s_1 = D, s_2 = \gamma_2 \mid \gamma_1 = C) = \frac{2}{3} * 7 + \frac{1}{3} * 0 = \frac{14}{3}$$

   c) Conclusión: el jugador 1 no tiene incentivos a desviar porque $\frac{14}{3} = \frac{14}{3}$.

2. Cuando la recomendación es jugar D.
   En este caso el jugador 1 sabe que al otro le recomendaron jugar C.

   a) Pago esperado de seguir la recomendación:

   $$\pi_1(s_1 = \gamma_1, s_2 = \gamma_2 \mid \gamma_1 = D) = 7$$

   b) Pago esperado de desviar:

   $$\pi_1(s_1 = C, s_2 = \gamma_2 \mid \gamma_1 = C) = 6$$

   c) Conclusión: como $6 < 7$ no hay incentivos a desviar.

- Jugador 2

1. Cuando la recomendación es jugar C. En este caso el jugador dos no sabe si el otro recibió la recomendación de jugar C o D. Por este motivo usamos Bayes:

   $P(\gamma_1 = C \mid \gamma_2 = C) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

   $P(\gamma_1 = D \mid \gamma_2 = C) = \frac{1}{3}$

   a) Pago esperado de seguir la recomendación:

   $$\pi_2(s_1 = \gamma_1, s_2 = \gamma_2 \mid \gamma_2 = C) = \frac{2}{3} * 6 + \frac{1}{3} * 2 = \frac{14}{3}$$

   b) Pago esperado de desviar:

   $$\pi_2(s_1 = \gamma_1, s_2 = D \mid \gamma_2 = C) = \frac{2}{3} * 7 + \frac{1}{3} * 0 = \frac{14}{3}$$

   c) Conclusión: el jugador 2 no tiene incentivos a desviar porque $\frac{14}{3} = \frac{14}{3}$.

2. Cuando la recomendación es jugar D. En este caso dos sabe que uno recibió la recomendación de jugar C

a) Pago esperado de seguir la recomendación:

$$\pi_2(s_1 = \gamma_1, s_2 = \gamma_2 \mid \gamma_2 = D) = 7$$

b) Pago esperado de desviar:

$$\pi_2(s_1 = \gamma_1, s_2 = C \mid \gamma_2 = D) = 6$$

c) Conclusión: como $6 < 7$ dos no tienen incentivos a desviar.

De esta manera se concluye que γ es un equilibrio correlacionado. Calculemos el pago esperado para los jugadores de que se juegue este equilibrio:

- Jugador 1

$$\pi_1(s_1 = \gamma_1, s_2 = \gamma_2) = \frac{1}{2} * 6 + \frac{1}{4} * 7 + \frac{1}{4} * 2 + \frac{0}{4} * 0 = 5{,}25$$

- Jugador 2

$$\pi_2(s_1 = \gamma_1, s_2 = \gamma_2) = \frac{1}{2} * 6 + \frac{1}{4} * 2 + \frac{1}{4} * 7 + \frac{0}{4} * 0 = 5{,}25$$

Este pago es más alto que cualquier pago construido a partir de una combinación convexa de equilibrios de Nash. El diagrama de la siguiente página (Maschler et al., 2013) muestra que efectivamente este es el pago simétrico más alto que se puede conseguir en este juego con un equilibrio correlacionado.

Ejercicio 3.22. En el ejemplo de la batalla de los sexos

1. Determine si $p((1,0),(1,0)) = \frac{3}{8}$, $p((0,1),(1,0)) = \frac{1}{4}$ y $p((0,1),(0,1)) = \frac{3}{8}$ (todo lo demás cero) es un equilibrio correlacionado.

2. Demuestre que el conjunto de equilibrios correlacionados es conjunto convexo.

3. Demuestre que la intersección de este conjunto con el conjunto de las distribuciones de probabilidad correlacionadas es igual al conjunto de equilibrios de Nash.

   Este ejercicio pone en evidencia dos propiedades geométricas genéricas de los equilibrios correlacionados.

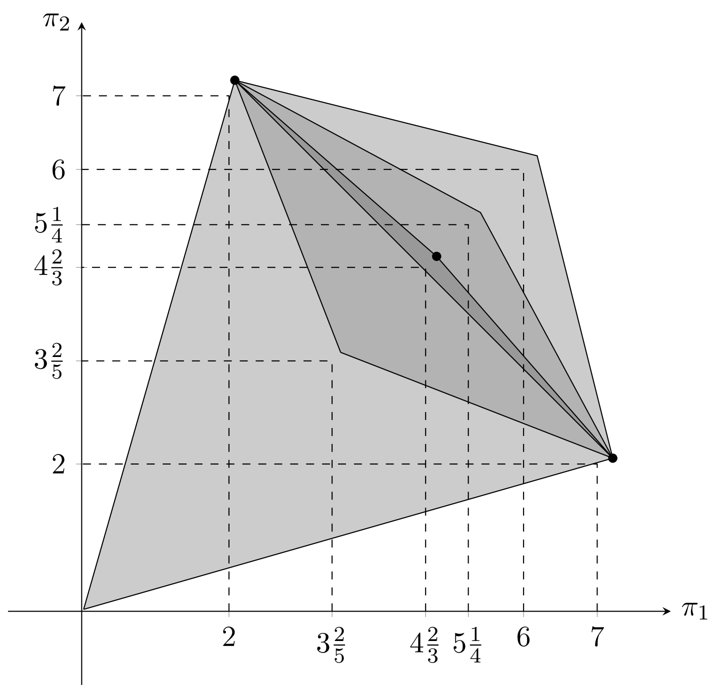

Figura 3.1: Pagos del Juego de la Gallina. En gris claro se encuentran los pagos posibles del juego, en gris más oscuro los pagos que se pueden conseguir con equilibrios correlacionados, y en gris oscuro los pagos que vienen de combinaciones convexas de equilibrios de Nash. Fuente: Mascheler et. al, 2013

Una característica sobresaliente de la definición de equilibrio correlacionado es que le da un papel importante a las asimetrías de información. Específicamente, en un equilibrio correlacionado todos los jugadores usan una recomendación distinta. El siguiente ejemplo resalta el papel que juegan las asimetrías de información en situaciones estratégicas. En particular, vamos a ver que perder información expost puede tener como consecuencia una ganancia en eficiencia.

Ejemplo 3.23 (Valor de la información)**.** Considere el juego de la siguiente figura.

3	M			N			Q		
	1\2	A	B	1\2	A	B	1\2	A	B
	X	0,0,3	0,0,0	X	2,2,2	0,0,0	X	0,0,0	1,1,1
	Y	1,1,1	0,0,0	Y	0,0,0	2,2,2	Y	0,0,0	0,0,3

Tabla Página 60 Vega

Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (Y, A, M) y (X, B, Q). Ambos equilibrios tiene un pago neto de 1 para cada jugador. Existen, sin embargo, estrategias conjuntas que dominan a ambos equilibrios: (X, A, N), (Y, B, N). Consideremos ahora el siguiente mecanismo de coordinación estocástico (en forma reducida): $p(X, A, N) = p(Y, B, N) = \frac{1}{2}$. Entonces p soporta un equilibrio correlacionado con pago esperado 2 para cada jugador.

Ahora supongamos que 3 se le da la opción de pagar por conocer la recomendación puntual que el mecanismo le hace a los otros dos jugadores. En este caso 3 respondería de la siguiente forma: Si los otros dos juegan (X, A), él juega M, y si juegan (Y, B), él juega Q. Luego, si los otros dos jugadores son informados de que 1 ha comprado esta opción, ciertamente no jugaran las estrategias recomendadas y no habrá coordinación, lo que impide que los jugadores obtengan un pago de 2. Así, la opción de obtener más información para 3 no tiene ningún valor.

Ejercicio 3.24. Considere el siguiente juego que representa los pagos posibles de dos conductores que se acercan a una intersección.

H\1	C	S
C	-100,-100	1,0
S	0,1	0,0

1. Demuestre que este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras y uno en mixtas.

2. Calcule un equilibrio correlacionado.

3.5. Juegos Evolutivos

La teoría de juegos clásica supone formas de racionalidad y conocimiento muy fuertes. Una forma de racionalizar este comportamiento y desviaciones del mismo es suponer que el comportamiento subóptimo es eventualmente desplazado por formas de razonar o conocimiento que permiten una mejor adaptación a las interacciones estratégicas que los agentes enfrentan. Vamos a estudiar una teoría estática inspirada en ideas evolucionarias que pueden ser un buen modelo en ciertas circunstancias.

Considere el siguiente juego bilateral simétrico $G = (\{1,2\}, \pi)$ entre dos animales exante idénticos. Sus estrategias son actuar como pequeño o como grande:

1\2	S	L
S	5,5	1,8
L	8,1	3,3

Decimos que una estrategia s es un Equilibrio Evolucionario Estable (EEE) si para todo s' existe un umbral $\bar{\epsilon} > 0$ tal que si $\bar{\epsilon} > \epsilon > 0$:

$$\pi(s, (1-\epsilon)s + \epsilon s')) > \pi(s', (1-\epsilon)s + \epsilon s')$$

Intuitivamente, si la población (exante) utiliza como estrategia s y surge una población pequeña de agentes que juegan s' (por ejemplo, debido a una mutación) y la población exante anticipa que la nueva población (expost) va ser invadida en una pequeña fracción $\bar{\epsilon}$ o menos, el pago esperado para la población de usar s' es estrictamente menor que s.

S no es EEE. L si lo es. Obsérvese que (S, S) genera pagos mayores, lo que sugiere una mejor adaptación de los agentes. Sin embargo, es una adaptación frágil. Una mutación que introduce L en una población de S se beneficia de que la mayoría de las interacciones que L encuentra son con S (L está mejor adaptado que S). A su vez, una mutación que introduce S en una población de L se ve afectada por el hecho de que la mayoría de las interacciones que S encuentra son con L (L está mejor adaptado que S).

Lo que parece sorprendente es que si inicialmente la población está compuesta por agentes s, con el tiempo su adaptabilidad decrecería. Esto no contradice la hipótesis principal de la idea de evolución según la cual con el tiempo los agentes incrementan su adaptabilidad a un ambiente dado. La clave aquí es entender que el ambiente no está fijo y, en la medida que se vuelva más hostil, puede suceder que su adaptabilidad decrezca, pero sea evolutivamente más estable (i.e., lo que importa es el beneficio en el largo plazo).

Ahora, consideremos la siguiente generalización. Una población grande de agentes interaccionan paralelamente en juegos estratégicos bilaterales y simétricos. Sea $S = \{s_1, ..., s_1\}$ el conjunto de estrategias, y A la matriz de pagos. Esta es una matriz $n \times n$. Intepretamos cada elemento a_{ij} como el pago que recibe (cada jugador) cuando usan las estrategias s_i, s_j. Permitimos que los jugadores usen estratégias mixtas. Si un jugador juega σ y el otro σ' el pago esparado para cada uno es:

$$\sigma A \sigma'$$

Una interpretación posible es que σ puede ser la estrategia que exante usa toda la población y expost es la distribición de la población con la que se juega cada estrategia pura.

El concepto clave es entonces el que introdujeron Smith y Price (1973).

Definición 3.25. Una estrategia mixta σ es un equilibrio evolutivamente estable si dado un σ existe $\bar{\epsilon} > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$:

$$\sigma A((1-\epsilon)\sigma + \epsilon\sigma') > \sigma' A((1-\epsilon)\sigma + \epsilon\sigma')$$

La interpretación es la siguiente. Una población grande y homogénea que utiliza una estrategia σ es un EEE si para cualquier otra estrategia σ' que pueda utilizar una subpoblación (mutante) existe un umbral $\bar{\epsilon}$ de tamaño de la subpoblación, tal que si esta es menor que ese umbral, el pago esperado que *cada agente* espera es estrictamente mayor a usar $\sigma' \neq \sigma$ cuando la población esperada expost es $(1-\epsilon)\sigma + \epsilon\sigma')$.

Obsérvese que la noción de equilibrio está basada fuertemente en la hipótesis de simetría exante de la población (i.e., población monomórfica).

Una de las cosas interesantes del concepto de EEE es que este no está basado en una forma de racionalidad como los conceptos de eliminación de estrategias dominadas o Nash. Sin embargo, sí captura alguna forma de racionalidad de los agentes: EES es un equilibrio perfecto simétrico del juego bilateral. En particular es un equilibrio de Nash. Demostramos esto último en la siguiente proposición.

Teorema 3.26. Si σ es un Equilibrio Evolucionario Estable entonces (σ, σ) es un EN simétrico del juego bilateral.

Ejercicio 3.27. Probar el anterior teorema.

3.6. Juegos generalizados y con un continuo de jugadores

En este sección exploraremos conceptos más avanzados en comparación con el resto del libro y supondremos conocimientos básicos de teoría de la medida. Esta sección no es necesaria para comprender el resto del libro, y está bien si es omitida por lectores que no están familiarizados con teoría de la medida. Este teoría será utilizada únicamente en una aplicación que haremos más adelante a la teoría del equilibrio general. El modelo que se va a introducir está basado en Riascos, A. y Torres Martinez, J.P (2012): *On the existence of pure strategy equilibria in large generalized games with atomic players.*

Consideramos dos generalizaciones importantes de la teoría de juegos estratégicos en forma normal. De una parte permitimos que el espacio de acciones de cada jugador dependa de las acciones de los demás (juego generalizado) y de otra parte permitimos que además de un número finito de jugadores (llamados atómicos) exista un continuo de jugadores (jugadores no-atómicos). Sin embargo, las acciones del continuo de jugadores solo tienen influencia sobre los pagos de los demás (atómicos y no-atómicos) a través de un mensaje que agrega las acciones de los jugadores no-atómicos.[4]

Sea $G = (T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t \in T}, h)$ un juego generalizado con un número infinito de jugadores $T = T_1 \cup T_2$, donde $T_1 \subset \mathbb{R}$ es un conjunto compacto de medida finita de jugadores no atómicos con respecto a la medida de Lebesgue λ, y T_2 es un conjunto finito de jugadores.[5] Cada jugador $t \in T_1$ tiene un conjunto compacto no vacio de acciones $K_t \subset \widehat{K}$, donde $\widehat{K} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto y $\bigcap_{t \in T_1} K_t \neq \emptyset$. De otra parte cada jugador $t \in T_2$ tiene un conjunto compacto, no vacío de acciones $K_t \subset \mathbb{R}^{n_t}$, con $n_t \in \mathbb{N}$.

Un estrategia conjunta para los jugadores en T_1 está dada por una función $f : T_1 \to \widehat{K}$ tal que $f(t) \in K_t$, para todo $t \in T_1$. Como T_2 es finito, una estrategia conjunta para los jugadores en T_2 es un vector $a := (a_i; i \in T_2) \in$

[4] Cada una de las generalizaciones se podría presentar de forma independiente y adaptar la misma prueba para cada caso.

[5] En otras palabras, $(T_1, \mathbb{B}(T_1), \lambda)$ es un espacio de medida, donde $\mathbb{B}(T_1)$ es la $\sigma-$ algebra de conjuntos de Borel de T_1.

$\Pi_{t\in T_2}\mathbb{R}^{n_t}$ tal que $a_t \in K_t$, para todo $t \in T_2$. Sea $\mathcal{F}(T_i)$ el espacio de todas las estrategias conjuntas de los jugadores T_i, con $i \in \{1,2\}$. Dado $t \in T_2$, sea $\mathcal{F}_{-t}(T_2)$ el conjunto de acciones $a_{-t} := (a_j; j \in T_2 \setminus \{t\})$ que toman los demás jugadores $j \in T_2 \setminus \{t\}$.

En el juego $G = (T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t\in T}, h)$ los jugadores no necesariamente incorporan las acciones de los otros jugadores en T_1. En otras palabras, los jugadores no necesariamente toman en cuenta las acciones de los otros jugadores no-atómicos para determinar su estrategia óptima. Sin embargo, cuando los jugadores toman su decisión, estos consideran información agregada de las acciones de los jugadores. Formalmente, dado un perfil de acciones de jugadores no-atómicos $f \in \mathcal{F}(T_1)$, el agente $t \in T_1$ toma en cuenta las acciones de los jugadores no-atómicos solo por medio del mensaje dado por la función $h : T_1 \times \widehat{K} \to \mathbb{R}^l$. En otras palabras, cada jugador t va a tener en cuenta la información agregada mediante el mensaje dado por la función $m(f) = \int\limits_{T_1} h(t, f(t))d\lambda$ para incorporar a sus estrategias.

Ahora nos vamos a concentrar en los perfiles de acciones para los cuales los mensajes están bien definidos. Decimos que f es un *perfil de estrategias* de los jugadores en T_1 si tanto $f \in \mathcal{F}(T_1)$ como $h(\cdot, f(\cdot))$ es una función medible desde T_1 hasta $\mathbb{R}^l$.[6] Sobre el comportamiento de los jugadores atómicos no son necesarias restricciones de medibilidad. Por esta razón, el conjunto de estrategias de los jugadores en T_2 es idéntico al espacio de perfiles de acciones $\mathcal{F}(T_2)$.

El conjunto de mensajes asociados con el perfil de estrategias de jugadores no-atómicos está dado por

$$M = \left\{ \int\limits_{T_1} h(t, f(t))d\lambda : \quad f \in \mathcal{F}(T_1) \quad \wedge \quad h(\cdot, f(\cdot))\,\text{es medible} \right\} \subset \mathbb{R}^l, \quad (3.1)$$

que es no vacío dado que $\bigcap_{t\in T_1} K_t$ es un conjunto no-vacío y h es una función continua. También, dado que los conjuntos $\widehat{K}$ y T_1 son compactos, para cualquier perfil de acciones $f : T_1 \to \widehat{K}$, la función $h(\cdot, f(\cdot)) : T_1 \to \mathbb{R}^l$ es acotada, de manera que si esta es medible entonces también es integrable. Por estas razones, en la definición del conjunto de mensajes M solo se requería que $h(\cdot, f(\cdot))$ fuera medible.

[6] En Schmeidler (1973) y Rath (1992), los jugadores son no-atómicos y toman en cuenta solamente el promedio de las acciones escogidas por los otros jugadores. Entonces, siguiendo nuestra notación, $l = n$ y $h(t, x) = x$. Por lo tanto, ellos definen los perfiles de estrategias como funciones medibles desde el conjunto de jugadores hasta el conjunto de acciones.

En nuestro juego, los mensajes acerca de los perfiles de estrategias de los jugadores en T_1 junto con los perfiles de estrategias de los jugadores en T_2 pueden restringir el conjunto de estrategias admisibles disponibles para un jugador $t \in T$. Esto es, dado un vector $(m, a) \in M \times \mathcal{F}(T_2)$ las estrategias disponibles para un jugador $t \in T_1$ están dadas por un conjunto $\Gamma_t(m, a) \subset K_t$, donde $\Gamma_t : M \times \mathcal{F}(T_2) \twoheadrightarrow K_t$ es una correspondencia continua con valores no vacíos y compactos. De forma análoga, dado $(m, a_{-t}) \in M \times \mathcal{F}_{-t}(T_2)$, el conjunto de estrategias para el jugador $t \in T_2$ es $\Gamma_t(m, a_{-t}) \subset K_t$, donde $\Gamma_t : M \times \mathcal{F}_{-t}(T_2) \twoheadrightarrow K_t$ es un correspondencia continua con valores no-vacíos, compactos y convexos. Nos referimos a las correspondencias $(\Gamma_t; t \in T)$ como correspondencias de estrategias admisibles.

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^k$, definimos $\mathcal{U}(A)$ como una colección de funciones continuas $u : A \to \mathbb{R}$. Supongamos que $\mathcal{U}(A)$ esta dotada con la topología de la norma del supremo. Suponemos que cada jugador $t \in T_1$tiene una función objetivo $u_t \in \mathcal{U}(\widehat{K} \times M \times \mathcal{F}(T_2))$ y que cada jugador $t \in T_2$ tiene una función objetivo $u_t \in \mathcal{U}(M \times \mathcal{F}(T_2))$ que se supone son cuasicóncavas en las estrategias. Finalmente, suponemos que la correspondencia $U : T_1 \to \mathcal{U}(\widehat{K} \times M \times \ \mathcal{F}(T_2))$ definida por $U(t) = u_t$ es medible.[7]

Definición 3.28. Un equilibrio de estrategias puras de Nash de un juego generalizado $G = (T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t\in T}, h)$ está dado por los perfiles de estrategias $(f^*, (a_t^*; t \in T_2))$ tales que, para cualquier jugador no-atómico $t \in T_1$,

$$u_t(f^*(t), m(f^*), a^*) \geq u_t(f(t), m(f^*), a^*), \quad \forall f(t) \in \Gamma_t(m^*, a^*), \tag{3.2}$$

y para cualquier jugador atómico $t \in T_2$, $u_t(m(f^*), a^*) \geq u_t(m(f^*), a_t, a_{-t}^*)$, $\forall a_t \in \Gamma_t(m^*, a_{-t}^*)$, donde el mensaje $m(f^*) := \int_{T_1} h(t, f^*(t))d\lambda$ pertenece al conjunto M.

En nuestra definición de equilibrio de Nash, cada agente maximiza su función objetivo, mientras que en Balder (1999) y Rath (1992), en el equilibrio, casi todos maximizan su función objetivo. Sin embargo, teniendo en cuenta que las funciones objetivo son continuas y los espacios de acciones compactos, dado un equilibrio para cualquiera de los juegos estudiados en estos artículos, siempre es posible cambiar las asignaciones asociadas con el conjunto de los

[7]Supongamos que hay un número finito de tipos en el conjunto de agentes no-atómicos, T_1. Esto es, hay una partición finita de T_1 en conjuntos Lebesgue-Medibles $\{I_1, \dots, I_r\}$ tal que dos jugadores t y t' pertenecientes al mismo elemento de la partición son idénticos. En este caso, la restricción acerca de la medibilidad de U se satisface de forma trivial.

jugadores no-atómicos que no maximizan, dándoles a cada uno de ellos una estrategia óptima, sin cambiar la integrabilidad de los perfiles de acciones o el valor de los mensajes. De este modo, el Teorema 2 en Rath (1992) y el Teorema 2.1 de Balder (1999) aseguran la existencia del equilibrio de Nash donde todos los jugadores maximizan su función objetivo.

Teorema 3.29. Considere un juego generalizado $G = (T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t \in T}, h)$ donde,

1. *El conjunto de los jugadores es* $T_1 \cup T_2$*, donde* T_1 *es un conjunto compacto de medida finita de jugadores no-atómicos, y* T_2 *es un conjunto finito de jugadores atómicos.*

2. *Para cualquier* $t \in T$*, los espacios de acciones* K_t *son no-vacíos y compactos, las correspondencias de estrategias admisibles* Γ_t *son continuas y tienen valores no-vacíos y compactos, y las funciones objetivo* u_t *son continuas.*

3. *Cada jugador atómico tiene un conjunto convexo de acciones, una correspondencia con valores convexos de estrategias admisibles, y una función objetivo cuasi-cóncava en su propia estrategia.*

4. *Existe un conjunto compacto* $\widehat{K}$ *tal que, para cualquier* $t \in T_1$*,* $K_t \subset \widehat{K}$ *y* $\bigcap\limits_{t \in T_1} K_t$ *este es no vacio.*

5. *La función* $h : T_1 \times \widehat{K} \to R^l$ *es continua.*

6. *La correspondencia* $U : T_1 \to U(\widehat{K} \times M \times \ F(T_2))$*, que asocia con cualquier* $t \in T_1$ *la función objetivo* u_t*, es medible.*

Entonces, existe un equilibrio de estrategias puras de Nash.