Capítulo 2

Extensión mixta

2.1. Extensión mixta de un juego

Una forma de enriquecer considerablemente la teoría es generalizando el concepto de estrategia. En este capítulo se retomarán los conceptos del capítulo anterior en el contexto de estrategias mixtas. Una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre el espacio de las acciones (i.e., estrategias puras). Es decir, una estrategia mixta expresa la probabilidad con la que cada agente va a jugar cada una de sus acciones.

Existen por lo menos dos formas de motivar el concepto de estrategias mixtas. A lo largo de los ejemplos que estudiaremos, una u otra forma de justificar este concepto tendrá más relevancia. Sin embargo, la utilización de estrategias mixtas no deja ser una idea controvertida y muy discutida cuando se trata de los fundamentos de la teoría de juegos. ¿Realmente es natural suponer que un agente elige una distribución de probabilidad que determina sus acciones y no una acción misma?

La primera manera de justificar el concepto de estrategias mixtas surge de naturalmente cuando es del interés de los diferentes jugadores seguir estrategias *impredecibles* para los demás jugadores y viceversa. Ahora, la mejor manera de generar estrategias impredecibles es justamente hacerlo de tal forma que para cada jugador inclusive su propia estrategia sea impredecible. Esta situación es típica de juegos en los que los jugadores tienen intereses opuestos.

La segunda forma de justificación proviene de un contexto en el que los jugadores tienen implícitamente el interés de colaborar, ya que resulta mejor desde el punto de vista individual. La imposibilidad de forzar una coordinación entre las partes hace que los agentes formen expectativas sobre lo que los demás jugadores van a escoger. Estas expectativas se pueden modelar como distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras de cada jugador, es decir, como estrategias mixtas [1].

Una forma de entender esto es que cada jugador recibe una señal privada independiente y sus estrategias no son más que funciones de la señal en el espacio de estrategias puras (véase Mas Colell et. al. página 232). Borel [1921] fue el precursor de la idea de estrategias mixtas.

Definición 2.1 (Estrategias mixtas)**.** Para el jugador i, una estrategia mixta σ_i sobre el espacio de estrategias puras es un distribución de probabilidad sobre S_i. Denotamos esto por $\sigma_i \in \Sigma_i$ donde Σ_i es el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre S_i y $\sigma_i(s_i)$ es la probabilidad que la estrategia σ_i le asigna a la acción $s_i \in S_i$. Una estrategia mixta conjunta o perfil de estrategias es un vector $\sigma \in \Sigma = \prod_{i=1}^{N} \Sigma_i$, $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_N)$ donde $\sigma_i \in \Sigma_i$[2]. Adicionalmente, suponemos que los jugadores escogen las estrategias mixtas de forma *estadísticamente independiente*.

En ocasiones haremos explícito el conjunto de estrategias puras sobre el cual se definen las estrategias mixtas Σ_i y utilizaremos la notación, $\Sigma(S_i)$.

Definición 2.2 (Extensión mixta de un juego en forma normal)**.** Sea $G = \left(N, \{S_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{\pi_i\}_{i=1,\ldots,n}\right)$ un juego en forma normal. La extensión mixta del juego es el juego en forma estratégica:

$$\overline{G} = (N, \{\Sigma_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{\overline{\pi}_i\}_{i=1,\ldots,n})$$

donde el pago neto de cada jugador es una extensión del pago neto π_i definido por $\overline{\pi}_i : \Sigma \to R$ donde:

$$\overline{\pi}_i(\sigma_1, ..., \sigma_n) = \sum_{s_1 \in S_1, \ldots, s_n \in S_n} \sigma_1(s_1) ... \sigma_n(s_n) \pi_i(s_1, ..., s_n)$$

Note que el pago de los jugadores es un pago esperado; su estructura está dada por la suma de los pagos de cada evento (cada estrategia conjunta pura) multiplicados por las probabilidades de ocurrencia (estrategias mixtas

[1] Véase sección 3.2.4, página 41 de [OR] para la formalización de esta intepretación

[2] De forma análoga, decimos que un vector $s \in S$, donde $s_i \in S_i$ es una estrategia conjunta o perfil de estrategias en estrategias puras.

de cada jugador). Además, dado que es una distribución de probabilidad, $\sum_{s_1 \in S_1, \ldots, s_n \in S_n} \sigma_1(s_1) \ldots \sigma_n(s_n) = 1$. Es importante resaltar que hemos utilizado el hecho de que los jugadores escogen las estrategias de forma independiente.

Ejemplo 2.3. Considere el juego de Piedra (R), Papel (P) o Tijera (S).

$1 \backslash 2$	R	P	S
R	0,0	-1,1	1,-1
P	1,-1	0,0	-1,1
S	-1,1	1,-1	0,0

En este juego cada jugador tiene 3 estrategias puras $S_1 = S_2 = \{R, P, S\}$. Una estrategia mixta de este juego para el jugador i es de la forma $\sigma_i = (\alpha, \beta, \gamma)$ con α, β y $\gamma \in [0, 1]$ y $\alpha+\beta+\gamma = 1$. Por ejemplo, $\sigma_i = (1/2, 1/4, 1/4)$ quiere decir que el jugador i jugará con probablidad de un medio Piedra (R) y con una probablidad de un cuarto Papel (P) y Tijeras (S). Las estrategias puras son estrategias mixtas con uno de sus componentes igual a 1. Observe que $s_i = R$ es lo mismo que $\sigma_i = (1, 0, 0)$, $s_i = P$ es $\sigma_i = (0, 1, 0)$ y $s_i = S$ es $\sigma_i = (0, 0, 1)$.

Este es un juego en el que los jugadores quisieran ser tan impredecibles como puedan para que su adversario no anticipe su jugada y les gane. De hecho, se puede demostrar que $EN = \{\sigma_1^*, \sigma_2^*\}$ con $\sigma_1^* = \sigma_2^* = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Con algunas consideraciones adicionales, las definiciones que hemos hecho en el Capítulo 1 pueden extenderse a la extensión mixta del juego. A continuación se presentan los conceptos de dominancia, estrategias racionalizables y equilibrios de Nash en su extensión mixta.

Notación 2. Por simplicidad en la notación escribiremos $\overline{\pi}_i$ simplemente como π_i.

2.1.1. Dominancia

Definición 2.4 (Dominancia de mixtas por mixtas)**.** Decimos que para el agente $i \in N$ una estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ es dominada (estrictamente) por una estrategia $\widehat{\sigma}_i \in \Sigma_i$ si para todo $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$:

$$\pi_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) > \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Vale la pena resaltar que los pagos esperados de cualquier estrategia mixta son combinaciones convexas de los pagos de las estrategias puras involucradas, por lo que nunca van a superar el pago de la estrategia pura con el pago más alto. Esto implica que para establecer que una estrategia mixta es dominada no es necesario probar con cada $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$. Solo hace falta probarlo para las estrategias puras $s_{-i} \in S_{-i}$.

Definición 2.5 (Dominancia débil de mixtas por mixtas)**.** Decimos que para el agente $i \in N$ una estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ es dominada débilmente por una estrategia $\widehat{\sigma}_i \in \Sigma_i$ si para todo $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$:

$$\pi_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Con desigualdad estricta en almenos un $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$.

Esta definición es más débil que la definición que dimos en el caso de estrategias puras. Es decir, si una estrategia es dominada débilmente por una estrategia pura, entonces es dominada débilmente por una estrategia mixta. El converso claramente no es cierto como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6. Considere el siguiente juego en forma estratégica (los pagos del jugador 2 son irrelevantes para el ejemplo).

1\2	A	B
X	1,*	1,*
Y	3,*	0,*
Z	0,*	3,*

En este juego, ninguna estrategia del jugador 1 es dominada en estrategias puras. Sin embargo, la estrategia $s_1 = X$ es dominada por la estrategia mixta $\sigma_1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Obsérvese que:
$\pi_1(\sigma_1, A) = 0 * 1 + \frac{1}{2} * 3 + \frac{1}{2} * 0 = \frac{3}{2} > \pi_1(X, A) = 1$
$\pi_1(\sigma_1, B) = 0 * 1 + \frac{1}{2} * 0 + \frac{1}{2} * 3 = \frac{3}{2} > \pi_1(X, B) = 1$
Recuerde que, el pago para el jugador 1 de cualquier estrategia mixta que 2 pueda jugar es una combinación convexa, de los pagos que obtiene 1 en las puras. Por esta razón, solo hace falta probar que para las puras se cumple la definición de dominación.

Ejemplo 2.7. Para el siguiente juego se van a encontrar todas las estretegias mixtas que dominan a C.

1\2	A	B	C
X	1,0	1,4	3,1
Y	5,7	0,2	5,5
Z	0,4	3,0	0,1

En este juego, ninguna estrategia del jugador 2 es dominada en puras. Para hacer el análisis en mixtas es bueno buscar una estrategia candidata a ser dominada para saber a cuál componente de la estrategia mixta darle una probabilidad de cero. Note que ninguna combinación convexa de los pagos de B y C va a poder superar el pago de A cuando 1 juega Y o Z, entonces A se descarta como candidata a ser dominada. De igual manera, cuando 1 juega X, el pago de B no puede ser superado por una combinación convexa de A y C.

Por este motivo se va a plantear una estrategia mixta para dominar a C. Para que esto ocurra es necesario que exista un $\sigma_2 = (\alpha, 1-\alpha, 0)$ tal que $\pi_2(X, \sigma_2) > \pi_2(X, C)$, $\pi_2(Y, \sigma_2) > \pi_2(Y, C)$ y $\pi_2(Z, \sigma_2) > \pi_2(Z, C)$. Entonces se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

$$\pi_2(X, \sigma_2) = \alpha * 0 + (1-\alpha) * 4 > \pi_2(X, C) = 1 \tag{2.1}$$
$$\pi_2(Y, \sigma_2 = \alpha * 7 + (1-\alpha) * 2 > \pi_2(Y, C) = 5 \tag{2.2}$$
$$\pi_2(Z, \sigma_2) = \alpha * 4 + (1-\alpha) * 0 > \pi_2(Z, C) = 1 \tag{2.3}$$

De la primera condición se obtiene que $\alpha < \frac{3}{4}$, de la segunda $\alpha > \frac{3}{5}$ y de la tercera $\alpha > \frac{1}{4}$. Entonces, toda estrategia mixta de la forma $\sigma_2 = (\alpha, 1-\alpha, 0)$ con $\alpha \in (\frac{3}{5}, \frac{3}{4})$ domina a C.

Ejercicio 2.8. Muestre que para el siguiente juego no es posible dominar estrictamente ninguna estrategia del jugador 1 ni en puras ni en mixtas. Sin embargo, es posible encontrar una estrategia mixta que domine débilmente a L.

1\2	U	V	W
L	0,0	3,1	1,1
M	5,1	2,2	2,0
N	1,4	4,2	0,1

Ejercicio 2.9. Demuestre que la siguiente definición es equivalente a la definición dada anteriormente de dominancia estricta de una estrategia mixta por una estrategia mixta. Para el agente $i \in N$ una estrategia $\sigma_i \in \Sigma_i$ es dominada (estrictamente) por una estrategia $\widehat{\sigma}_i \in \Sigma_i$ si para todo $s_{-i} \in S_{-i}$:

$$\pi_i(\widehat{\sigma}_i, s_{-i}) > \pi_i(\sigma_i, s_{-i})$$

Esta equivalencia depende de la forma explícita como se ha definido la extensión mixta del juego.

Implícitamente en la definición de dominación suponemos que las estrategias mixtas de los demás jugadores se escogen de forma independiente. [3] Utilizando esta nueva definición de dominancia es natural definir un nuevo concepto de eliminación iterativa de estrategias mixtas dominadas (estrictamente o débilmente) por estrategias mixtas. Denotamos este conjunto Σ^∞.

Ejemplo 2.10. Vamos a encontrar Σ^∞ en el siguiente juego

1\2	X	Y	Z
A	1,7	2,2	0,3
B	0,0	4,4	1,0
C	3,1	2,0	0,2

$$\Sigma_1^0 = \{A, B, C\} \mid \Sigma_2^0 = \{X, Y, Z\}$$

Para el jugador 1, A es dominada por una mixta $\sigma_1 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\Sigma_1^1 = \{B, C\} \mid \Sigma_2^1 = \{X, Y, Z\}$$

Para el jugador 2, dado que A es dominada, se puede dominar a X con una mixta $\sigma_2 = (0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

$$\Sigma_1^2 = \{B, C\} \mid \Sigma_2^2 = \{Y, Z\}$$

Ahora en la tabla restante solo hay que hacer dominación estricta.

$$\begin{array}{l|l} \Sigma_1^3 = \{B\} & \Sigma_2^3 = \{Y, Z\} \\ \Sigma_1^4 = \{B\} & \Sigma_2^4 = \{Y\} \end{array}$$

De esta manera es posible concluir que $\Sigma^\infty = \{(B, Y)\} = \{((0, 1, 0), (0, 1, 0))\}$.

Ejercicio 2.11. Encuentre Σ^∞ para el siguiente juego:

1\2	X	Y	Z
A	-2,4	3,1	30,0
B	0,0	9,1	2,4
C	1,1	1,0	1,5

[3] Para un caso más general véase Osborne y Rubinstein página 54

2.1.2. Estrategias racionalizables

En la sección anterior de estrategias mixtas llamamos la atención sobre la posibilidad de extender el concepto de estrategias no dominadas de forma iterativa (S^{∞}) al concepto de estrategias mixtas no dominadas de forma iterativa (Σ^{∞}). Vamos a explorar un poco más esta extensión usando el concepto de estrategias racionalizables.

En el capítulo anterior se definieron a las estrategias racionalizables como aquellas que sobreviven al proceso de eliminación sucesivo de estrategias que nunca son mejor respuesta. La extensón a mixtas es natural. A continuación se define formalmente el conjunto de estrategias racionalizables en mixtas.

Definición 2.12 (Estrategias racionalizables)**.** Sea G un juego en forma normal. Para cada jugador $i \in N$ definamos la siguiente sucesión de estrategias mixtas $(R_i^q)_{i \in \mathbb{N}}$.

1. Sea $R_i^0 = \Sigma_i$.
2. $R_i^{q+1} = \{\sigma_i \in R_i^q : \exists \sigma_{-i} \in R_{-i}^q$ tal que $\forall \widetilde{\sigma}_i \in R_i^q, \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(\widetilde{\sigma}_i, \sigma_{-i})\}$.

   Es decir, R_i^{q+1} son las estrategias de R_i^q que son mejor respuesta a alguna estrategia $\sigma_{-i} \in R_{-i}^q$ que el agente i crea que los demás jugadores puedan eventualmente utilizar.

$R_i = \bigcap\limits_{q=1}^{\infty} R_i^q$ se llama el conjunto de estrategias racionalizables del jugador i. Una estrategia conjunta σ se llama racionalizable si la estrategia que le corresponde a cada jugador es racionalizable: $\sigma \in R = \prod\limits_{i=1}^{n} R_i$

Teorema 2.13 (Bernheim, 1984 y Pearce, 1984)**.** El conjunto de estrategias conjuntas racionalizables es no vacio. Más aún, para cada jugador, el proceso de eliminación de estrategias no racionalizables termina en un número finito de iteraciones.

La idea básica detrás del concepto de estrategias racionalizables es que los jugadores no juegan estrategias que no son racionales. Además cada uno sabe que los demás son racionales y cada uno sabe que los demás saben que son racionales, etc. Esto quiere decir que, al igual que en el concepto de equilibrio de Nash - Cournot, solamente se juegan estrategias que son mejores respuestas. Sin embargo, a diferencia del equilibrio de Nash - Cournot, no se supone que las expectativas que los agentes tienen sobre las estrategias de los demás se realizan. Es decir, intuitivamente el concepto de estrategias racionalizables supone una forma más débil de conocimiento que el concepto de equilibrio de Nash.

Definición 2.14 (Niveles de conocimiento)**.** Supongamos que cada jugador es racional en el sentido de que no juega estrategias que no son mejores respuestas a alguna estrategia de los demás. Decimos que el conocimiento de un jugador es de grado 1 si este sabe que los demás jugadores son racionales. Es de grado 2 si él sabe que los demás saben que los demás jugadores son racionales (i.e., si él sabe que los demás tienen conocimiento de grado 1), etc.

En la definición de estrategias racionalizables, q denota, intuitivamente, el grado de conocimiento que se asume de cada jugador en la definición de cada conjunto de estrategias mixtas R_i^q. También está implícito en la definición de estrategia racionalizable el hecho de que los agentes escogen sus estrategias de forma independiente y esto restringe las expectativas que los agentes se forman de las estrategias de los demás.

No es difícil convencerse que cualquier estrategia que forma parte de un equilibrio de Nash - Cournot es racionalizable. Luego, ser racionalizable es más débil que ser un equilibrio de Nash - Cournot. Por ejemplo, en la Batalla de los Sexos, el conjunto de estrategias racionalizables es la totalidad del conjunto de estrategias, luego el concepto de estrategia racionalizable es estrictamente más débil que el de Nash - Cournot. Este caso pone en evidencia que el concepto de estrategia racionalizable puede ser un concepto muy débil y con poco poder predictivo en muchos casos.

El concepto de estrategias mixtas que sobreviven el proceso de eliminación débil es un concepto aún más débil que el de estrategias racionalizables. En efecto, si una estrategia mixta es dominada, ciertamente no puede ser la respuesta óptima a ninguna estrategia conjunta que los demás jugadadores jueguen. Se sigue que el conjunto de estrategias mixtas no dominadas sucesivamente contiene al conjunto de estrategias racionalizables. En el caso de juegos bilaterales, estos dos conjuntos coinciden (Perace, 1984) pero, en general, la contenencia es estricta. Si permitiéramos que los agentes se formaran expectativas correlacionadas sobre las estrategias de los demás, ambos conceptos coincidirían (esto explica por qué en juegos bilaterales no es necesario hacer esta extensión). La siguiente figura muestra la relación entre estos conceptos.

Ejercicio 2.15. Demuestre que el conjunto de estrategias mixtas no dominadas iterativamente contiene al conjunto de estrategias racionalizables.

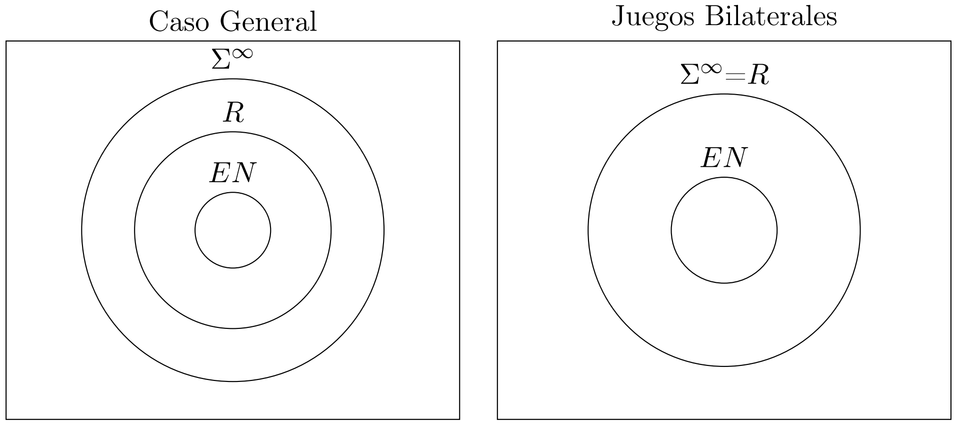


Figura 2.1: Diagramas de Venn de Σ^{∞}, R y EN para juegos bilaterales y en general.

Parece intutivo que una estrategia racionalizable le asigne probabilidad positiva solo a aquellas estrategias que se juegan con probabilidad positiva en algún equilibrio de Nash. Sin embargo esto no es cierto como lo demuestra un ejemplo de Bernheim (véase Vega - Redondo, tabla 2.10). Por lo tanto, el concepto de estrategia racionalizable, así como el concepto de estrategias no dominadas iterativamente, no es propiamente un concepto de equilibrio en el sentido de que no existan incentivos a desviaciones unilaterales.

2.1.3. Equilibrio de Nash - Cournot

Definición 2.16 (Equilibrio de Nash - Cournot)**.** Una estrategia mixta conjunta $\widehat{\sigma} \in \Sigma$ es un equilibrio de Nash - Cournot si para todo jugador i y para toda estrategia $\sigma_i \in \Sigma_i$:

$$\overline{\pi}_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \geq \overline{\pi}_i(\sigma_i, \widehat{\sigma}_{-i})$$

Proposición 3. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\widehat{\sigma}$ es un equilibrio de Nash.
2. Para todo i, $\overline{\pi}_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \geq \overline{\pi}_i(s_i, \widehat{\sigma}_{-i})$ para todo s_i.
3. Para todo jugador, $\overline{\pi}_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}) = \overline{\pi}_i(s_i, \widehat{\sigma}_{-i})$ para todo s_i en el soporte de $\widehat{\sigma}_i$ y $\overline{\pi}_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \geq \overline{\pi}_i(s_i, \widehat{\sigma}_{-i})$ para todo s_i por fuera del soporte de

$\widehat{\sigma}_i$.[4]

Nota técnica 2.17. Esta proposición es útil para calcular equilibrios de Nash en estrategias mixtas. En particular el numeral tres afirma que en un equilibrio de Nash en estrategias mixtas todas las estrategias puras con probabilidad positiva arrojan la misma utilidad que la utilidad en equilibrio.

Ejemplo 2.18 (Cara y sello)**.** Como habíamos visto en el capitulo anterior, en el ejemplo de cara y sello no existe un equilibrio de Nash - Cournot en estrategias puras. Sin embargo, la estrategia mixta $\sigma_i = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ para cada jugador es un equilibrio Nash - Cournot en estrategias mixtas.

1\2	C	S
C	1,-1	-1,1
S	-1,1	1,-1

Para ver esto, considere la forma de actuar de cada jugador cuando él supone cierto conportamiento sobre los demás. El jugador 1 cree que el jugador 2 va jugar $\sigma_2 = (\beta, 1-\beta)$. Este vector indica que el jugador uno cree que dos va a jugar C con probabilidad β, y cree que va a jugar sello con probabilidad $1-\beta$.

Ahora se obtiene el pago esperado de jugar para cada una de sus estrategias puras cuando el otro jugador juega una mixta. Recuerde que, cómo se mencionó antes, el pago de jugar un equilibrio de Nash es igual al pago de jugar cualquier estrategia en el soporte de $\hat{\sigma_i}$. Esto implica que los pagos esperados de las estrategias puras van a ser menores o iguales al pago de la mixta que es equilibrio de Nash.

$$\pi_1(C, \sigma_2) = \beta * 1 + (1-\beta) * (-1) = 2\beta - 1 \tag{2.4}$$
$$\pi_1(S, \sigma_2) = \beta * (-1) + (1-\beta) * 1 = -2\beta + 1 \tag{2.5}$$

Ahora se comparan los pagos para saber cuál va a ser la mejor respuesta del jugador 1 para cualquier estrategia del jugador 2.

El jugardor 1 va a jugar cara si y solo si: $2\beta - 1 \geq -2\beta + 1 \rightarrow \beta \geq \frac{1}{2}$

De esto es posible establecer que la mejor respuesta del jugador 1 es:

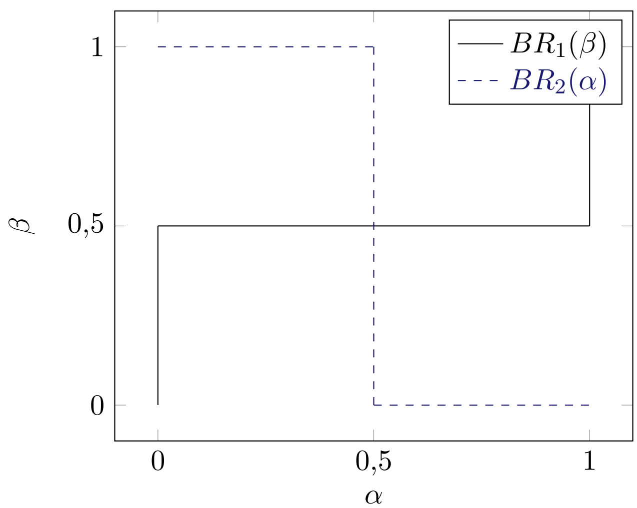
$$BR_1(\beta) = \begin{cases} \text{C} & \text{si } \beta > \frac{1}{2} \\ \text{C o S} & \text{si } \beta = \frac{1}{2} \\ \text{S} & \text{si } \beta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

[4]Una estrategia pura está en el soporte de una estrategia mixta si tiene probabilidad positiva.

Haciendo el mismo procedimiento para el jugador 2 sobre las creencias $\sigma_1 = (\alpha, 1-\alpha)$, se obtiene la mejor respuesta del jugador 2.

$$BR_2(\alpha) = \begin{cases} \text{C} & \text{si } \alpha < \frac{1}{2} \\ \text{C o S} & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \\ \text{S} & \text{si } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Finalmente, para encontrar el equilibrio de Nash solo hay que encontrar los puntos en los que se intersectan las dos mejores respuestas. Para esto usaremos el siguiente gráfico:



En los ejes se encuentra la probabilidad de que cada jugador juegue Cara. Note que lo máximo que esta probabilidad puede ser es 1. La mejor respuesta del jugador 1 es la linea continua; el jugador 1 va a jugar sello siempre que β sea menor a 0.5, es decir α va a ser igual a cero; cuando β es 0.5 cualquier α es mejor respuesta y cuando β es mayor a 0.5, α debe ser igual a 1 (i.e. uno va a jugar cara). Para el otro jugador el análisis es el mismo para poder graficar. El punto en el que se encuentran las dos curvas es el equilibrio de Nash de este juego $EN = \{\sigma_1^*, \sigma_2^*\} = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$.

Ejercicio 2.19 (Encuentro en NY)**.** Considere el siguiente juego:

1\2	E	G
E	100,100	0,0
G	0,0	1000,1000

Muestre que este juego tiene dos equilibrio de Nash en estrategias puras y un equilibrio de Nash simétrico en estrategias mixtas $(10/11, 1/11)$. Muestre también que este equilibrio satisface las condiciones del numeral tres de la proposición anterior.

Ejemplo 2.20 (Entrada de una firma)**.** Considere el siguiente juego:

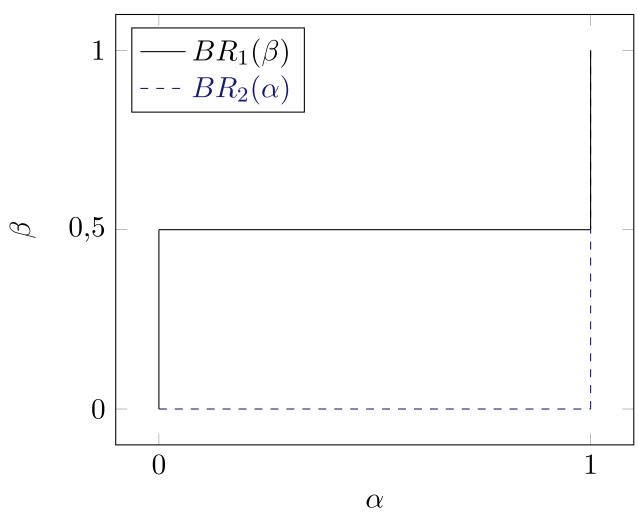
1\2	F	C
N	0,2	0,2
E	-1,-1	1,1

Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras (E, C) y (N, F). Haciendo el proceso del ejemplo anterior se llega a que:

$$BR_1(\beta) = \begin{cases} \text{N} & \text{si } \beta > \frac{1}{2} \\ \text{N o S} & \text{si } \beta = \frac{1}{2} \\ \text{S} & \text{si } \beta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$BR_2(\alpha) = \begin{cases} \text{C} & \text{si } \alpha < 1 \\ \text{C o F} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Lo que gráficamente se ve de la siguiente forma:



Como se ve en el gráfico, se encuentra un continuo de equilibrios en estrategias mixtas y el equilibrio $(E, C) = ((0, 1), (0, 1))$. Todas las estrategias mixtas de la forma $\sigma = ((1,0), (\beta, 1-\beta))$, con $\beta \geq \frac{1}{2}$ son equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Note que en esta forma de escribirlo se está incluyendo el equilibrio en puras (N, F).

Ahora, considere esta interpretación del juego. El jugador 2 es una firma incumbente y monopolista en un mercado y el jugador 1 es una firma que está considerando entrar a competir a este mercado. Las estrategias F y C las interpretamos como planear pelear o conciliar. Obsérvese que el equilibrio (N, F) puede interpretarse como sustentado por la amenaza de que la firma incumbente peleará (estrategia F) en caso de que la firma 1 decida entrar. Esta amenaza es, sin embargo, poco creíble pues, dado que la firma 1 decide entrar, ciertamente no es la mejor estrategia para la firma 2 pelear. Este ejemplo sirve como motivación para el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos que estudiaremos más adelante.

Ejercicio 2.21 (Batallla de los sexos)**.** Pruebe que en este juego hay, además de los equilibrios en estretegias puras, un equilibrio en estrategias mixtas: $\sigma = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right)$

Ejercicio 2.22 (Equilibrios simétricos)**.** Un juego de dos jugadores $G = (\{1,2\}, (S_1, S_2), (\pi_1, \pi_2))$ es un juego simétrico si $S_1 = S_2$ y si $\pi_1(s_1, s_2) \geq \pi_2(s_1, s_2)$ entonces $\pi_2(s_2, s_1) \geq \pi_1(s_2, s_1)$. Demuestre que existe un equilibrio de Nash de la forma (s, s). Este se conoce como un equilibrio simétrico. Este resultado se debe a Nash.

Ejercicio 2.23. Dilema de los viajeros. Sean $S_1 = S_2 = \{2, 3, ..., 99, 100\}$. Si $s_1 < s_2, \pi_1(s_1, s_2) = s_1 + 2, \pi_2(s_1, s_2) = s_1 - 2$. Si $s_1 > s_2, \pi_1(s_1, s_2) = s_2 - 2, \pi_2(s_1, s_2) = s_2 + 2$. Mostrar que el único equilibrio de Nash es $(2, 2)$

Ejercicio 2.24. . Basado en *Seven Puzzles You Think You Must Not Have Heard Correctly with solutions* (Winkler). Los nombres de 100 prisioneros se encuentran en 100 cajas de madera, uno en cada una. Las cajas se encuentran una al lado de la otra en un cuarto. Uno a uno los prisioneros entran en el cuarto y pueden abrir máximo 50 cajas para verificar qué nombres se encuentran en las cajas. Una vez salen del cuarto no se les permite ninguna comunicación con los demás prisioneros y deben dejar el cuarto como lo encontraron. Sin embargo, ellos sí pueden definir con anterioridad una estrategia para abrir las cajas. Si los 100 prisioneros no logran encontrar cada uno de ellos sus nombres, son asesinados. Encuentre una estrategia para ellos que les garantice salvarse con probabilidad superior a 30 %.

Ejemplo 2.25 (¿Cómo patear un penal?)**.** El domingo 9 de julio de 2006, se enfrentaban en la final del mundial de Alemania las selecciones de Francia e Italia. Corría el minuto 7 del encuentro cuando el delantero de Francia Florent Malouda caía en el área luego de un choque con el defensa italiano Marco Materazzi. Ante esta situación, el árbitro del encuentro señalo penal. El capitán de Francia Zinedine Zidane toma la responsabilidad de cobrar el tiro. Frente a él se encuentra el guardameta Gianluigi Buffon. El diez de Francia tiene la oportunidad de poner por delante a su equipo y quizás llevarse consigo su segundo mundial en su ultimo partido como jugador profesional de futbol. La gran pregunta es ¿hacia dónde debería patear el penal? ¿Qué estrategia le garantiza el mejor resultado posible?

Esta situación ejemplifica una situación típica de juegos estratégicos de suma cero. Hay dos jugadores. El primero de estos es el encargado de cobrar el penal, el cual tiene como estrategias patear a la derecha (R), al centro (C) o a la izquierda (L). El otro jugador de este juego es el arquero, quien tiene como posibles acciones lanzarse a la derecha (R), a la izquierda (L) o permanecer en el centro (C). Para simplificar el problema asuma que, si el balón es enviado en la dirección en la que el guardameta se encuentra, será tapado y el jugador dos ganará, en cualquier otro caso el jugador 1 será el ganador. En la siguiente tabla se resumen los pagos con la perspectiva del jugador que patea

Jugador 1 \ Jugador 2	L	C	R
L	0	1	1
C	1	0	1
R	1	1	0

Es fácil verificar que el único equilibrio de Nash (o Maxmin dado que es suma cero) es jugar $\frac{1}{3}$ para cada opción. En la práctica, los arqueros reconocen que aunque estén ubicados en la misma dirección en la que se patea el balón no tienen 100 % de probabilidad de tapar el tiro. De igual forma, los cobradores saben que, aunque lancen en una dirección diferente a la posición en la que estará el arquero, esto no garantiza que marquen el gol. Por esto, los pagos para cada jugador se definen por las probabilidades de marcar ($\pi_{i,j}$) o de tapar ($1 - \pi_{i,j}$), donde $i = \{L, C, R\}$ representa la elección del cobrador y $j = \{L, C, R\}$ representa la decisión del arquero.

Los resultados de la evidencia empírica muestran que cuando se reduce el juego a un escenario 2×2 ($\{L, R\} \times \{L, R\}$) los jugadores profesionales actúan jugando una estrategia mixta de acuerdo a la probabilidad de acierto observada. Otro resultado muestra cómo las decisiones tanto de cobradores como arqueros son serialmente independientes; es decir, las acciones tomadas anteriormente no influyen en la probabilidad de escoger la siguiente acción palacios2003professionals. En la siguiente tabla se presenta la probabilidad de anotar observada

Jugador 1 \ Jugador 2	L	R
L	$\pi_{L,L} = 58{,}3\,\%$	$\pi_{L,R} = 94{,}97\,\%$
R	$\pi_{R,L} = 92{,}91\,\%$	$\pi_{R,R} = 69{,}92\,\%$

Fuente: [Palacios-Huerta, 2003]

[Palacios-Huerta, 2003] encuentra que el equilibrio óptimo para los anteriores datos son $P(i = L) = 0{,}3854$ y $P(j = L) = 0{,}4199$, mientras que lo observado en los datos es $P(i = L) = 0{,}3998$ y $P(j = L) = 0{,}4231$, lo que no presenta diferencias significativas entre lo que predice la teoría y lo que se observa en la realidad. Cuando se amplía el análisis al escenario 3×3 el resultado no es tan claro. La evidencia empírica ha mostrado que los arqueros son proclives a un tipo particular de desviación al agente racional nombrado como "sesgo de acción" bar2007action. Este sesgo nos muestra que cuando un arquero decide su estrategia, puede sentir menor culpabilidad de fallar si actúa como se espera (saltar ya sea a la derecha o a la izquierda) generando en la practica una probabilidad observada de mantenerse en el centro menor a lo que sería óptimo para ellos.
Con los ejemplos anteriores podemos observar el uso práctico de la teoría económica para la predicción de comportamientos estratégicos en juegos no cooperativos como el de cobrar un penal, información que quizás hubiera dado mas probabilidades a Gianluigi Buffon de mantenerse en el centro del arco, dirección en la que Zinedine Zidane hizo su lanzamiento para convertir el gol con el que Francia comenzaría ganando la final del mundial, que irónicamente perdería frente a Italia en la serie de penales.

Ejercicio 2.26. Calcular la estrategia óptima para las siguientes probabilidades de anotación (Fuente: [Bar-Eli et al., 2007])

Jugador 1 \ Jugador 2	L	C	R
L	71,1 %	100 %	96,4 %
C	82,3 %	50 %	94,1 %
R	94,2 %	100 %	55,2 %

Teorema 2.27 (Nash 1950)**.** Todo juego finito (i.e., el número de jugadores y conjunto de estrategias de cada jugador es finito) tiene un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

2.2. Equilibrio de Nash - Cournot: Extensiones*

Esta sección es un poco más avanzada y no es necesaria para la comprensión del resto del libro. Para su comprensión se requiere conocer algunos conceptos básicos de análisis: conjuntos compactos, cuasiconcavidad, el teorema de punto fijo de Kakutani, Brouwer y algunos otros.

El teorema de Nash - Cournot se puede demostrar fácilmente utilizando un poco de análisis: Defina la correspondencia de mejor respuesta $B_i : \Sigma_{-i} \to \Sigma_i$ como:

$$B(\sigma_{-i}) = argmax_{\sigma \in \Sigma_i}(\pi_i(\sigma, \sigma_{-i}))$$

y sea $B : \Sigma \to \Sigma$ definida como $B = \prod B_i$. Por el teorema del punto fijo de Kakutani, B tiene un punto fijo σ^* (es decir, $\sigma^* \in \Sigma$ tal que $\sigma^* \in B(\sigma^*)$. Por definición este es un equilibrio de Nash.

Es elemental extender el anterior teorema al siguiente caso. Suponga que los espacios de estrategias son conjuntos no vacíos, compactos, convexos, las funciones de utilidad de cada agente son continuas y cuasicóncavas como función de su propia estrategia. Entonces existe un equilibrio de Nash. La prueba es idéntica a la anterior.

Ejercicio 2.28. Muestre, a través de ejemplos, que ninguna de las hipótesis de este teorema puede ser eliminada.

Nota técnica 2.29. El concepto de equilibrio Nash se remonta a Cournot [1838]. La formalización y primera demostración se debe a Nash [1950] en la que utiliza el teorema del punto fijo de Kakutani. En Nash [1951] se muestra como sustituir el teorema de Kakutani por el de Brower.

Ejercicio 2.30. Suponga que las funciones de utilidad son estrictamente cuasicóncavas en la propia estrategia. Aplique el teorema de Brower para obtener una demostración muy sencilla de la existencia de un equilibrio de Nash.

Teorema 2.31 (Glicksberg 1952)**.** Dado un juego G en forma estratégica donde el espacio de estrategias de cada jugador es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ y las funciones de utilidad son continuas, se tiene que G tiene un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.[5]

[5]Este teorema requiere introducir el concepto de estrategia mixta sobre un espacio de estrategias continuo y además extender el juego y definir una noción de continuidad en el espacio de estrategias mixtas.

La extensión es importante pues introduce juegos en los que el espacio de acciones es un continuo. Sin embargo, la hipótesis de continuidad es fuerte. Por ejemplo, no se cumple en el modelo de competencia oligopolística de Bertrand.

Teorema 2.32 (Debreu 1952, Fan 1952 y Glicksberg 1952)**.** Bajo las condiciones del teorema anterior, si el espacio de estrategias es convexo y las funciones de utilidad son cuasicóncavas en la estrategia de cada jugador entonces el juego tiene un equilibrio Nash en estrategias puras.

Nota técnica 2.33. La demostración de este teorema es una aplicación inmediata del teorema de punto fijo de Kakutani (véase la proposición 20.3 de [OR]). El teorema de Nash es un corolario inmediato: un equilibrio de estrategias mixtas es un equilibrio en estrategias puras de la extensión mixta del juego. Es fácil ver que la extensión mixta satisface todas las propiedades del teorema anterior.

Ejemplo 2.34 (No existencia del equilibrio de Nash)**.** Supongamos que dos jugadores pueden venderle un producto a tres posibles compradores. Los compradores A y C tienen acceso a sólo un vendedor. B tiene acceso a los dos vendedores. Los tres compradores tienen una restricción presupuestal de una unidad. Los vendedores escogen el precio de venta de su producto pero no pueden discriminar entre los compradores. Ellos escogen de forma simultánea un precio $p_i \in [0, 1]$. Supongamos que en caso de que los precios sean idénticos el comprador B compra del vendedor 1.

Este juego no tiene un equilibrio, aun en estrategias mixtas. Suponga que existe un equilibrio en estrategias puras tal que $p_1 > \frac{1}{2}$. El jugador 2 va escoger un precio ligeramente inferior $p_1 > p_2 > \frac{1}{2}$. En este caso el jugador 1 va querer disminuir su precio y así sucesivamente. Luego no existe un equilibrio con $p_1 > \frac{1}{2}$. Si $p_1 \leq \frac{1}{2}$, la única mejor respuesta del jugador 1 es $p_2 = 1$. Pero en este caso 1 tiene un incentivo a aumentar su precio. La no existencia de un equilibrio en estrategias mixtas se deja como ejercicio para el lector.

2.3. Juegos bilaterales de suma cero

Un juego bilateral de suma cero es un juego con dos jugadores en el cual todo resultado del juego representa pagos opuestos para los jugadores. Esto es, los jugadores tienen intereses opuestos.

Un ejemplo de juego de suma cero es el juego de cara y sello. Hay otros ejemplos más complejos e interesantes como el juego del ajedrez. Sin embargo, como veremos más adelante, se pueden obtener resultados bastante más fuertes para este caso que los que se obtienen del teorema de Von Neumann (1928) que exponemos en esta sección.

Definición 2.35. Un juego bilateral de suma cero es un juego $G = (\{1, 2\}, \{S_i\}_{i=1,2}, \{\pi_i\}_{i=1,2})$ tal que para todo $s \in S$, $\pi_1(s) + \pi_2(s) = 0$.

El requerimiento de sumar cero es una simplificación no fundamental, basta con que la suma sea constante. Por eso en ocasiones se llaman juegos bilaterales de suma constante. Es fácil ver que si la suma de los pagos es cero para las estrategias puras, también lo es para las estrategias mixtas (y viceversa).[6]

Teorema 2.36 (von Neumann, 1928)**.** Sea G una juego bilateral de suma cero. Entonces:

1. $\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$. El primer valor lo denominamos el valor maxmin del jugador 1 y lo denotamos por v_1, el segundo lo denominamos el valor minmax del jugador 1 y lo denotamos por v_2. Luego el teorema afirma que en un juego de suma cero estos dos valores son iguales y denotamos el valor común por v_1^* denominado el valor del juego para el jugador 1.

2. Para todo equilibrio de Nash - Cournot (σ_1^*, σ_2^*) tenemos $v_1^* = \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ y viceversa, si σ_1^*, σ_2^* son estrategias maxmin para cada jugador entonces (σ_1^*, σ_2^*) es un equilibrio de Nash - Cournot. En particular, todos los equilibrios de Nash - Cournot generan la misma utilidad.

Este teorema es equivalente al teorema Minmax de von Neumann que se encuentra más adelante.[7] Sin embargo, la demostración que se presenta en esta sección se basa en el teorema de existencia del equilibrio de Nash. El teorema Minmax y el teorema anterior son bastante anteriores al teorema de

[6] Algunos autores consideran una generalización de juegos de suma cero que denominan juegos estrictamente competitivos. Estos son juegos en los que los dos jugadores tiene preferencias opuestas por las alternativas (en estrategias puras). Estos juegos comparten muchas de la propiedades de los juegos de suma cero, pero en general la característica de ser competitivo no se extiende a estrategias mixtas.

[7] El teorema de von Neumann puede verse como un caso particular del teorema de dualidad en la teoría de optimización (véase Myerson, página 125). En efecto, existe una equivalencia entre juegos de suma cero y problemas de programación lineal.

Nash. De la demostración del teorema es fácil darse cuenta que el teorema se puede enunciar para cualquier juego en forma normal para el cual exista un equilibrio de Nash, sin apelar a estrategias mixtas.

La estrategia Maxmin para el jugador i refleja la estrategia de maximizar el pago para el jugador i bajo el supuesto de que el otro siempre va tratar de minimizar el pago de i. Este es el valor de seguridad del juego para el jugador que se discutió en el capítulo anterior. Intuitivamente, es lo máximo que el jugador i puede garantizar de utilidad para él mismo (en el peor caso).

La estrategia Minmax para el jugador i representa la menor utilidad a la que los demás jugadores, en caso de coordinar, pueden forzarlo.

El segundo resultado establece una relación muy particular en los juegos de suma cero. La estrategia maxmin, el resultado de una estrategia individualista, la máxima utilidad en el peor caso, coincide con el equilibrio de Nash. Esto le da solidez al concepto de equilibrio de Nash en juegos de suma cero.

Prueba. Primero demostramos que:

$$v_1 = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2) \leq v_2 = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2).$$

Por construcción $\min\limits_{\sigma_2' \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2') \leq \pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$, luego

$$v_1 \leq \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$$

y, como el lado izquierdo es un número, podemos minimizar el lado derecho y se mantien la desigualdad y obtenemos:

$$v_1 \leq v_2$$

Obsérvese que en esta demostración no se usa que el juego es de suma cero. En efecto esta propiedad es válida para cualquier juego bilateral.

Para demostar que $v_1 \geq v_2$, sea (σ_1^*, σ_2^*) un equilibrio de Nash - Cournot. Vamos a demostrar que $v_1 \geq \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq v_2$.

Para ver esto obsérvese que $v_1 = \max\limits_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min\limits_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2) \geq \min\limits_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2) = \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ (porque σ_2^* es una mejor respuesta para el segundo jugador dado que el primero juega σ_1^*) luego $v_1 \geq \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$.

Por otro lado, $v_2 = \min\limits_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max\limits_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2) \leq \max\limits_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2^*) = \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ (porque σ_1^* es mejor respuesta para π_1 cuando el jugador 2 juega σ_2^*).

De la demostración anterior se sigue que, dado un equilibrio de Nash - Cournot (σ_1^*, σ_2^*), tenemos $v_1^* = \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$. Sólo hace falta demostrar su converso, que un par de estrategias maxmin es un equilibrio de Nash-Cournot.

Sea $v = \max\limits_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min\limits_{\sigma_2\in\Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$ el valor del juego. Sean (σ_1^*, σ_2^*) un par de estrategias tales que $\sigma_1^* \in \arg\max\limits_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min\limits_{\sigma_2\in\Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$ y $\sigma_2^* \in \arg\min\limits_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max\limits_{\sigma_1\in\Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$. Por definición, esto implica que para todo σ_1 se cumple $\pi_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \leq v$ y análogamente se tiene que para todo σ_2 se cumple $\pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2) \geq v$. Como $\pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = v$, entonces σ_1^* es mejor respuesta para σ_2^* (pues alcanza el máximo de $\pi_1(\cdot, \sigma_2^*)$). Análogamente, σ_2^* es mejor respuesta para σ_1^* y por tanto es equilibrio de Nash-Cournot. ■

El teorema anterior implica que el valor del juego es el mismo para cada jugador independientemente de qué equilibrio de Nash jueguen. En efecto, no es necesario que los jugadores jueguen un equilibrio de Nash específico para que que se realice ese valor.

Más aún, del teorema se deduce fácilmente que si $(\sigma_1, \sigma_2), (\sigma_1', \sigma_2')$ son dos equilibrios de Nash entonces $(\sigma_1', \sigma_2), (\sigma_1, \sigma_2')$ son equilibrios de Nash. Es decir, basta con que cada jugador utilice como estrategia alguna que sea perteneciente a una estrategia conjunta que sea un equilibrio y que él espere que los demás hagan lo mismo y viceversa. Esta propiedad se conoce como *intercambiabilidad* del equilibrio en juegos bilaterales de suma cero. [8]

Ejercicio 2.37. Demostrar la propiedad de intercambiabildad del equilibrio para juegos de suma cero.

2.4. Aspectos normativos

Hasta ahora hemos analizado los equilibrios de los juegos sin detenernos a pensar en las características de los resultados. Muchos juegos pueden llevar a resultados que pueden considerarse como socialmente no deseados y, por esto, es necesario introducir formalmente un concepto que nos permita hacer conclusiones normativas de los resultados de las interacciones de los agentes.

Definición 2.38. En un juego en forma normal, una estrategia conjunta τ domina débilmente a σ en el sentido de Pareto si, para todo i :

$$\pi_i(\tau) \geq \pi_i(\sigma)$$

[8] Formalmente la intercambiabilidad implica que el conjunto de estrategias conjuntas que son equilibrios tiene la estructura de un producto cartesiano entre conjuntos de estrategias mixtas.

con desigualdad estricta para por lo menos un agente, y decimos que domina estrictamente en el sentido de Pareto si la desigualdad anterior la podemos cambiar por una desigualdad estricta.

Definición 2.39 (Eficiencia de Pareto)**.** En un juego en forma normal, una estrategia conjunta σ es eficiente en un sentido estrícto (o débil) si no existe una estrategia que la domine en el sentido de Pareto débilmente (estrictamente).

Una estrategia eficiente en un sentido estricto es también llamada eficiente en el sentido de Pareto. Luego una estrategia eficiente en el sentido de Pareto tiene la característica de que no es posible jugar algo diferente que mejore los pagos de un jugador sin que esto implique desmejorar los pagos de algún otro jugador.

Ejemplo 2.40 (Dilema del Prisionero)**.** El dilema del prisionero es un ejemplo clásico en el que el equilibrio de Nash es no es una estrategia eficiente en el sentido de Pareto.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

El equilibrio de Nash de este juego es EN=(A,A). Sin embargo esta no es una estrategia Pareto eficiente: note que pasar a jugar (C,C) mejora el pago de ambos jugadores sin perjudicar a ninguno.

Definición 2.41. Un juego es un dilema del prisionero generalizado si existen dos estrategias conjuntas $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_N)$ y $\tau = (\tau_1, ..., \tau_N)$ tal que:

1. σ es un equilibrio en estrategias dominantes débilmente.
2. τ domina débilmente a σ en el sentido de Pareto.

Considere un juego en que cada jugador tiene una valoración privada de un mismo objeto. Suponga los jugadores conocen la valoración privada del objeto de todos los participantes. Los agentes hacen una oferta por el objeto y gana el objeto el agente que haga la oferta más alta y paga el segundo valor más alto de todas las ofertas. La utilidad para el ganador es su valoración menos lo que paga. Para los demás jugadores es cero (i.e., subasta al segundo precio con información completa). Por simplicidad supongamos que no existe un par de jugadores con la misma valoración. Este juego es un caso especial de una subasta al segundo precio de un único bien en el que hemos hecho el supuesto de que hay información completa. El subastador es quien recibe el pago y asigna el objeto. Suponemos que el subastador no hace parte del conjunto de jugadores.

Ejercicio 2.42. Demuestre que la subasta que acabamos de describir tiene un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente) que consiste en ofertar la verdadera valoración.

Proposición 4. Una subasta al segundo precio como la que acabamos de describir, con información completa, es un dilema del prisionero generalizado (note que excluimos al subastador del conjunto de jugadores).

Prueba. Por el ejercicio anterior existe un equilibrio en estrategias dominantes débilmente (σ) que es ofertar la verdadera valoración de cada uno. Sea τ una estrategia que para cada jugador sea ofertar la mitad de su valoración. Entonces σ y τ satisfacen las propiedades de la defínción de un dilema de los prisioneros generalizado. ■

En teoría de subastas, tema que estudiaremos con más profundidad más adelante, se muestra que la subasta al segundo precio es eficiente en el sentido de que el objeto se le asigna al jugador con la mayor valoración (incluso cuando existe un precio de reserva del objeto mayor o igual a cero). Estas dos formas de estudiar la eficiencia de la subasta al segundo precio no son contradictorias. El concepto que estudiamos aquí, dilema del prisionero generalizado, hace referencia a eficiencia exante y el que estudiaremos más adelante, a eficiencia expost.

2.5. Teorema Minimax de von Neumann*

En 1928, veinte años antes de la publicación del libro que básicamente funda la teoría de juegos [von Neumann and Morgenstern, 1947], von Neumann probo este teorema que es equivalente al teorema minmax anterior.

Teorema 2.43 (von Neumann 1928)**.** Sea $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots N;\, j=1,\ldots M}$ una matriz de números reales. Entonces existen $p \in R_+^N$, $q \in R_+^M$ y $v \in R$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{j=1}^{M} q_j = 1 \tag{2.6}$$

y para todo i, j :

$$\sum_{i=1}^{N} p_i a_{ij} \geq v \geq \sum_{j=1}^{M} q_j a_{ij} \tag{2.7}$$

Proposición 5. El teorema Minmax de juegos de suma cero es equivalente al teorema minimax de von Neumann.

Prueba. Sea $\pi_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^T A \sigma_2 = -\pi_2(\sigma_1, \sigma_2)$ y

$$v = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2). \tag{2.8}$$

Supongamos que para todo $p \in R_+^N$, $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ existe j tal que:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i a_{ij} < v \tag{2.9}$$

en particular:

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_{1,i}^* a_{ij} < v \Rightarrow \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{1,i}^* a_{ij} \sigma_{2,j} < v \tag{2.10}$$

luego,

$$\min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2) < v \tag{2.11}$$

una contradicción. La otra desigualdad del teorema minmax es similar. ■

2.6. Ejercicios

1. Adivinar el promedio. Considere el siguiente juego. Cada jugador tiene que, de forma simultánea, escoger un número entero entre 1 y 100 (incluidos). La persona más cercana a un tercio del promedio de las ofertas gana \$100 y los demás nada. En caso de empate, el premio se divide proporcionalmente entre los ganadores.

    a) ¿Existe alguna estrategia pura que domine estrictamente a cualquier otra?
    b) Encuentre una estrategia mixta que domine estrictamente a 100.
    c) Muestre que 99 no puede ser estrictamente dominado.
    d) ¿Cuál es su mejor predicción sobre el resultado de este juego?

2. Sea $\sigma^* \in \Sigma$ un perfil de estrategias completamente mixtas. ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? En caso verdadero, demuéstrelo formalmente; de lo contrario, dé un contraejemplo.

a) Si σ^* sobrevive al proceso de eliminación de estrategias mixtas estrictamente dominadas, entonces para todo i se tiene que $E_{-i}[\pi_i(s_i, \sigma^*_{-i})] = E_{-i}[\pi_i(\sigma^*_i, \sigma^*_{-i})], \forall s_i \in S_i$, donde S_i son las estrategias puras de i.

b) Si para todo i, σ^*_i es mejor respuesta a σ^*_{-i}, entonces σ^* sobrevive al proceso de eliminación iterada de estrategias mixtas estrictamente dominadas.

Solución:

a) Esta afirmación es falsa, porque una estrategia que sobreviva al proceso de eliminación iterada de estrategias mixtas estrictamente dominadas no es necesariamente es un equilibrio de Nash y, por lo tanto, no necesariamente satisfará la condición. Como contraejemplo tomemos el juego de cara y sello:

1\2	C	S
C	1,-1	-1,1
S	-1,1	1,-1

En primer lugar, en este juego ninguna estrategia pura ni mixta es estrictamente dominada, por lo que todas sobreviven al proceso de eliminación iterada de estrategias mixtas estrictamente dominadas. Para verificar esta afirmación, note que para cualquier estrategia completamente mixta del jugador 1 existe una estrategia del jugador 2 que le genera pagos esperados positivos y otra que le genera pagos esperados negativos al jugador 1. De esta forma, no puede ser el caso que exista algún $\tilde{\sigma}_1$ tal que que para todo σ_2 el pago esperado de 1, $\Pi_1(\tilde{\sigma}_1, \sigma_2)$, sea estrictamente mayor al de cualquier otra estrategia $\sigma_1 \neq \tilde{\sigma}_1$. En otras palabras, no puede haber una estrategia estrictamente dominante en este juego para el jugador 1 y, por simetría, tampoco existe para el jugador 2.

Ahora, el único equilibrio de Nash de este juego es el perfil de estrategias completamente mixtas: $\sigma_{EN} = (\sigma_{EN,1}, \sigma_{EN,2}) = (1/2, 1/2)$. Sea $\sigma^*_1 = (1/3, 2/3)$. Sabemos que esta estrategia sobrevivió al proceso de eliminación iterada de estrategias mixtas estrictamente dominadas y que no es un equilibrio de Nash, por lo que debe existir un $\tilde{\sigma}_2$ tal que:

$$\Pi_1(C, \tilde{\sigma}_2) \neq \Pi_1(\sigma_1^*, \tilde{\sigma}_2)$$
$$\text{o}$$
$$\Pi_1(S, \tilde{\sigma}_2) \neq \Pi_1(\sigma_1^*, \tilde{\sigma}_2)$$

Considere $\sigma_2^* = (1/3, 2/3)$. Entonces: $\Pi_1(C, \sigma_2^*) = -1/3$ y $\Pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = 1/9$, lo cual completa el contrajemplo.

b) Esta afirmación es verdadera, puesto que si para todo i, σ_i^* es mejor respuesta a σ_{-i}^*, entonces σ^* es un equilibrio de Nash. Por otro lado, se sabe que la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas no elimina equilibrios de Nash, entonces σ^* tuvo que haber sobrevivido al proceso de eliminación.

3. Encuentre todos los equilibrios de Nash (tanto en estrategias puras como mixtas) del siguiente juego:

1\2	L	M	R
U	8,3	3,5	6,3
C	3,3	5,5	4,8
D	5,2	3,7	4,9

4. Considere el siguiente juego.

1\2	X_2	Y_2
X_1	2,2	0,6
Y_1	6,0	1,1

a) ¿Cuál es el equilibrio de Nash en puras?

b) Muestre que el equilibrio es ineficiente en el sentido de Pareto.

c) Suponga ahora que los jugadores se pueden comunicar y le piden a un abogado que les elabore un contrato que dice lo siguiente: si ambos lo firman, ambos prometen jugar (X_1, X_2). Si solamente uno lo firma, digamos i, entonces i promete jugar Y_i. En caso de firmar el contrato, es de obligatorio cumplimiento (e.g., no cumplirlo tiene una penalidad muy alta)

El nuevo juego es:

$1\backslash 2$	X_2	Y_2	S_2
X_1	2,2	0,6	0,6
Y_1	6,0	1,1	1,1
S_1	6,0	1,1	2,2

d) Encuentre el nuevo equilibrio.

e) ¿Qué aprendió usted de este ejercicio?

5. Considere el siguiente juego:

$1\backslash 2$	F	C
N	0,2	0,2
E	-1,-1	1,1

a) Calcular los equilibrios de Nash.

b) Calcular los equilibrios en estrategias mixtas.

6. Demuestre que, dado un juego en forma normal, para cada jugador todo equilibrio de Nash tiene un pago mayor o igual al valor minmax del jugador (no tiene que ser un juego bilateral ni un juego de suma cero).