Capítulo 1

Juegos estratégicos

La teoría de juegos es el estudio de las interacciones estratégicas entre agentes racionales con diferentes objetivos. La principal característica de esta teoría es que reconoce que las decisiones de un jugador pueden afectar de forma directa los objetivos de los demás jugadores. Podemos dividir la teoría en dos grandes ramas; la teoría de juegos estratégicos (o juegos no cooperativos) y la teoría de juegos coalicionales (o juegos cooperativos). La principal diferencia entre estos juegos es que en los juegos estratégicos los jugadores actuan en forma independiente mientras que en los juegos coalicionales se supone que los jugadores pueden hacer coaliciones, o arreglos de obligatorio cumplimiento, mediante algún mecanismo que no es explícito.

En este libro nos vamos a concentrar únicamente en la teoría de juegos estratégicos. Los juegos estratégicos se pueden representar de dos formas.

1. Forma normal, para juegos estáticos.[1]

2. Forma extensiva, para juegos dinámicos.

Los juegos en forma normal, a su vez, se pueden clasificar en juegos de información completa e incompleta. Los juegos en forma extensiva, en cambio, se clasifican en juegos de información perfecta y juegos de información imperfecta. La representación de un juego en forma extensiva es la forma más general de representar un juego. En este libro vamos a comenzar estudiando los juegos estratégicos en su representación normal. La Figura 1 muestra es-

[1]También se denominan juegos en forma estratégica. Sin embargo, reservamos este nombre para toda la clase de juegos estratégicos (en forma normal y extensiva).

quemáticamnete una taxnomía de la teoría de juegos estratégicos y algunos de los ejemplos más conocidos o aplicaciones más importantes.

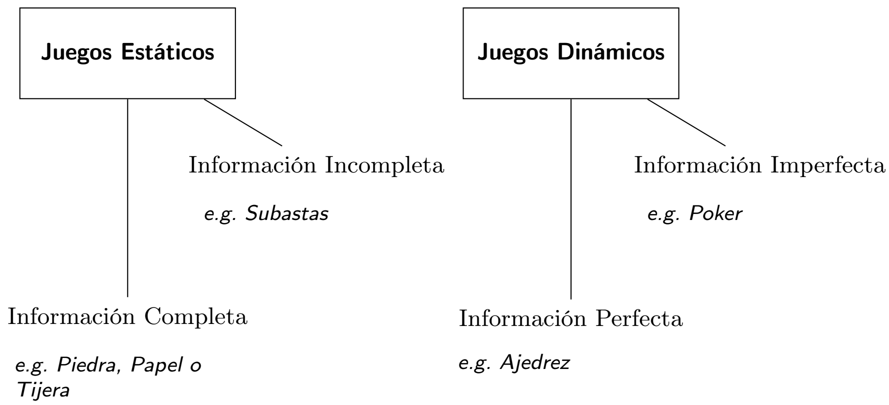

Figura 1.1: Taxonomía de la teoría de juegos estratégicos (i.e., no cooperativos) con algunos ejemplos o aplicaciones importantes.

1.1. Juegos en forma normal

Definición 1.1 (Juego en forma normal)**.** Un juego en forma normal es una estructura $G = (N, \{S_i\}_{i=1,...,n}, \{\pi_i\}_{i=1,...,n})$ donde

1. N es un conjunto de jugadores, $N = \{1, ..., n\}$.
2. S_i es un conjunto de acciones o estrategias puras para cada jugador[2].
3. $\pi_i : \prod_{i=1}^{n} S_i \to \mathbb{R}$ es la utilidad (pago neto) de cada jugador.

Ejemplo 1.2 (Dilema de los prisioneros)**.** Sea $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{A, C\}$. El pago neto de cada agente lo representamos mediante la siguiente tabla. La convención que vamos a utilizar es que la estrategia del jugador 1 la representan las filas, y las del jugador 2, las columnas. El pago neto del primer jugador es el primer número de cada celda, el del segundo jugador, el segundo.

[2] Más adelante, cuando estudiemos juegos dinámicos, vamos a hacer una diferenciación entre acciones y estrategias.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Ejemplo 1.3 (Batalla de los sexos)**.** Supongamos que hay dos agentes $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{B, S\}$, $\pi_1, \pi_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$

M\H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Ejemplo 1.4 (Juego de conducción)**.** Supongamos que hay dos conductores que en ausencia de normas de tránsito deben decidir todos los días por cuál carril conducir su carro. Entonces $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{D, I\}$, $\pi_1, \pi_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$

M\H	D	I
D	1,1	0,0
I	0,0	1,1

Obsérvese que la batalla de los sexos y el juego de conducción son juegos en los que los jugadores quisieran coordinar sus acciones para obtener un mejor pago.

Ejemplo 1.5 (Juego de revelación)**.** Los dos jugadores son un ser superior (SB) y una persona (P).[3] Las estrategias para SB son: $S_{SB} = \{RE, NRE\}$, $S_P = \{CE, NCE\}$ donde RE y NRE significan respectivamente que SB revela su existencia y que no revela su existencia, y CE, NCE significan respectivamente que P cree o no cree en su existencia.

SB\P	CE	NCE
RE	3,4	1,1
NRE	4,2	2,3

El ejemplo busca representar de forma explícita las siguientes hipótesis sobre el comportamiento e interacción entre un ser superior y un agente. Por una parte, el primer supuesto es que el principal objetivo de un ser superior es lograr que el agente crea en la existencia de un ser superior. Su segundo

[3]Brams, S. (2007). Superior Beings. If They Exist, How Would We Know?: Game-Theoretic Implications of Omnipotence, Omniscience, Immortality, and Incomprehensibility. Springer Science Business Media.

objetivo es que él prefiere no revelar su existencia. Por otra parte, suponemos que el primer objetivo del agente es poder validar su creencia en la existencia o no de un ser superior. Su segundo objetivo es que prefiere creer en la existencia de un ser superior. Las preferencias de la tabla son apenas una representación posible de estos objetivos. El SB prefiere que el agente elija la primera columna y dada la elección de una de las dos columnas, prefiere no revelar su existencia. El agente prefiere comprobar la existencia o no de un ser superior, resultados en la diagonal. Ahora, por fuera de la diagonal, él prefiere creer en la existencia de un ser superior que no creer.

1.2. Teoría de la decisión con múltiples agentes

Todo juego plantea un problema de decisión para los agentes involucrados. Queremos enfatizar, por lo menos informalmente, cuáles son las características más sobresalientes que intervienen en este tipo de interacción. Por el momento, ignoramos las potenciales asimetrías de información entre los jugadores (i.e., este será uno de los temas más relevantes cuando estudiemos juegos de información incompleta). Para el caso de juegos de información completa, los elementos fundamentales son:

1. El conjunto de acciones y/o un conjunto de consecuencias.
2. Una relación de preferencia sobre las consecuencias.[4]
3. Una estructura de conocimiento (un conjunto de estados de la naturaleza y un operador de conocimiento).
4. Una hipótesis de comportamiento o racionalidad.

El conjunto de acciones es típicamente fácil de describir, al igual que las consecuencias de un perfil de acciones. Como en general las acciones determinan de forma unívoca las consecuencias, casi siempre supondremos que las preferencias dependen directamente de las acciones.

Ahora, el concepto de estructura de conocimiento es el más complejo de formalizar y por eso en este libro usaremos una aproximación intuitiva. Los dos

[4]Usualmente, como en los ejemplos anteriores, las preferencias se expresan sobre las acciones. Sin embargo, si se desea analizar las preferencias de forma detallada, por ejemplo, verificar si cumplen o no ciertos axiomas, lo adecuado es hacerlo sobre el espacio de consecuencias.

elementos fundamentales de una estructura de conocimiento son el concepto de estado de la naturaleza y el operador de conocimiento. El concepto de estado de la naturaleza encierra muchas posibilidades, principalmente las acciones de todos los jugadores y estados exógenos al problema de decisión que pueden tener influencia sobre las decisiones de los agentes (incertidumbre o riesgo). En general, se espera que un estado de la naturaleza sea una descripción completa de todas las características relevantes para la toma de una decisión (i.e., en otra interpetación, es una descripción completa del estado del mundo). Los estados de la naturaleza son únicos y dos estados de la naturaleza distintos no suceden simultáneamente. El concepto de operador del conocimiento básicamente divide el espacio de estados en subconjuntos disyuntos cuya unión es el espacio completo (i.e., una partición del espacio de estados). Cuando un agente observa un estado, él es informado del conjunto de estados que el operador de conocimiento determina que se conocen en ese estado (i.e., el conjunto de la partición a la cual pertenece). De esta forma se modela el conocimiento que los agentes tienen en cada estado. No exploraremos más esta definiciónón formal sino que haremos una aproximaciónón intuitiva como se explica en las siguientes secciones.

Decimos que un problema de decisión está bien puesto cuando el conjunto de acciones, la estructura de conocimiento y las preferencias son independientes. Por ejemplo, no poder correr muy rápido (cien metros en menos de diez segundos) no debería de cambiar nuestra preferencia por poderlo hacer (i.e., acciones disponibles independientes de las preferencias). O saber que es posible correr muy rápido no debería cambiar el hecho de que esta acción probablemente no es posible (i.e., acciones independientes del conocimiento). De igual forma, suponemos que las preferencias son independientes de los estados de la naturaleza (i.e., en este caso decimos que las preferencias son intrínsecas). Por ejemplo, sería natural considerar que las preferencias por una sombrilla o un helado son distintas dependiendo del estado del tiempo (i.e., estado de la naturaleza, lluvioso o soleado). Sin embargo, este tipo de preferencias no son lo que llamamos preferencias intrínsecas. Para distinguir estas preferencias instrumentales (que dependen del estado de la naturaleza) de las preferencias intrínsecas, es bueno preguntarse por la razón por la que estas preferencias son así. Esto llevará a preguntas más fundamentales sobre las preferencias de los agentes (¿Por qué prefiere más la sombrilla a un helado cuando llueve que cuando hace sol?). Este proceso puede continuar indefinidamente hasta tanto no exista relación entre las preferencias y el estado (por ejemplo, porque reducir las preferencias a algo más básico supone considerar estados de la naturaleza que por definición no se están considerando como parte del problema).

La hipótesis de comportamiento está intimamente relacionada con la estructura de conocimiento. Básicamente, el supuesto fundamental es que los agentes toman acciones que son las mejores posibles dada sus conjeturas sobre las acciones de los demás. Las conjeturas a su vez dependen de la estructura de conocimiento de cada uno.

La relevancia de la estructura de conocimiento en un problema de decisión se explora informalmente en la siguiente sección y será una constante a lo largo de este libro.

1.2.1. Conocimiento común e inconsciencia

En el siguiente ejemplo se pone de manifiesto la importancia que tiene el conocimiento que suponemos tiene un agente sobre el conocimiento que tienen los demás y viceversa.

Ejemplo 1.6 (Paradoja de los sombreros)**.** Supongamos que hay tres personas sentadas en un salón. Cada una de ellas tiene un sombrero que saben que puede ser blanco o rojo. Cada una de ellas puede observar el sombrero que los demás tienen en su cabeza, pero no el que tiene en su cabeza. Supongamos que los tres son rojos. Lo único que saben las personas es que el sombrero puede ser blanco o rojo y lo único que pueden hacer es ver el color del sombrero de los demás. Si preguntáramos uno a uno cuál es el color del sombrero que ellos tienen en su cabeza, todos responderían "no sé". Ahora, supongamos que les hacemos el siguiente anuncio: "existe por lo menos un sombrero rojo en la cabeza de ustedes", y volvemos y les preguntamos uno a uno si saben con certeza cuál es el sombrero que tienen en la cabeza. Cada uno de ellos puede oír lo que responden los anteriores. En esta ocasión los dos primeros a quienes se les pregunta responden que no saben, pero el último debería de responder que su sombrero es con seguridad rojo.

Para ver esto, obsérvese que, antes del anuncio, las tres personas saben que hay por lo menos un sombrero rojo entre los tres (dado que sabemos que los tres sombreros son rojos y cada uno puede ver el sombrero de los demás). Más aún, el tercero sabe que el segundo sabe que hay por lo menos un sombrero rojo (debido a que sabe que el primero tiene un sombrero rojo y el segundo lo puede observar). Sin embargo, antes del anuncio, el tercero no sabe que el segundo sabe que el primero sabe que hay por lo menos un sombrero rojo entre los tres. Ahora, una vez hecho el anuncio, saber que hay por lo menos un sombrero rojo entre los tres se convierte en conocimiento común: todos saben que los demás saben y todos saben que los demás saben que los otros saben, etc. En particular, el tercero sabe que el segundo sabe que el primero sabe que hay por lo menos un sombrero rojo entre los tres. Por lo tanto, dado que el primero y el segundo afirmaron no saber de qué color era el sombrero, el tercero puede deducir que su sombrero es rojo.

Para ver esto suponga que, una vez hecho el anuncio, los dos primeros responden "no sé". Ahora el tercero puede razonar así. Si mi sombrero no fuera rojo, como el segundo jugador sabe que el primero respondió no sé, entonces es porque el segundo sabe que el primero está viendo un sobrero rojo. Si el mío no es rojo, entonces el segundo jugador debería deducir que el sombrero rojo que está viendo el primer jugador es el del jugador dos, luego el jugador dos debió responder que su sombrero era rojo. Como no lo hizo, eso quiere decir que mi sombrero es rojo. Obsérvese que la clave de este argumento es que después de hecho el anuncio, el jugador tres sabe que el jugador dos sabe que el jugador uno sabe que hay por lo menos un sombrero rojo entre los tres.

En contraste con el concepto de conocimiento común, existen muchas otras formas de relajar este supuesto. Por ejemplo, puede ser que los agentes no sean conscientes de todos los elementos del juego. Es decir, el juego no es conocimiento común (un jugador desconoce que existe un tercero, desconoce todas las acciones de sus oponentes, etc.) o puede tener un conocimiento limitado (sabe algo sobre su oponente pero no sabe que su oponente sabe que él sabe), etc.

1.3. Soluciones de un juego

Para fijar ideas, en esta sección supongamos que todos los jugadores son *racionales* en el sentido de que sus acciones son una mejor respuesta a sus conjeturas sobre las acciones de los demás. Más adelante consideraremos otras formas de racionalidad. Supongamos también que los jugadores escogen sus estrategias de forma *independiente* de los demás. Además, que todos los jugadores conocen cada uno de los elementos del juego G. Más precisamente, en el juego, la racionalidad de los jugadores y el conocimiento de los mismos es conocimiento común. A lo largo de este libro estudiaremos diferentes niveles de conocimiento y racionalidad de los jugadores. Es decir, qué tipo de racionalidad y conocimiento se supone sobre los demás y si es conocimiento común o no.

La pregunta más fundamental de la teoría de juegos es: ¿cuál es nuestra mejor predicción de la interacción de los agentes en el juego? Es decir, dadas las hipótesis mencionadas anteriormente, ¿qué estrategias consideramos razonables para cada jugador? Esto es lo que denominamos una solución de un juego. Todo concepto de solución de un juego está basado en un supuesto sobre todas las características fundamentales de un problema de decisión con múltiples agentes.

Una solución de un juego es una descripción sistemática del resultado que podríamos esperar de la interacción de los jugadores en el juego. Hay tres conceptos claves que unifican las ideas principales relacionadas con la solución de un juego. Se trata de los conceptos de dominancia, estabilidad y seguridad. El primer concepto está relacionado con la identificación de estrategias que un agente racional no jugaría. El segundo representa un concepto de equilibrio que busca identificar estrategias en las cuales no existen incentivos a desviarse, y el tercero identifica estrategias que garantizan cierta utilidad para los jugadores en el peor de los casos.

Notación 1. Sea $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ y para cualquier jugador i sea $S_{-i} = \prod_{j \neq i}^{n} S_j$. Dada una estrategia conjunta $s = (s_1, ..., s_n) \in S$ y cualquier jugador i también denotamos la estrategia conjunta s como $s = (s_i, s_{-i})$ donde $s_i \in S_i$ es la estrategia del jugador i y s_{-i} es la estrategia conjunta de todos los jugadores con excepción del jugador i.

1.3.1. Dominancia

Existen dos ideas básicas asociadas al concepto de dominancia. La primera es la idea de estrategias dominadas y la eliminación de estrategias dominadas de forma sucesiva. La segunda es la idea de estrategias racionalizables y la eliminación de estrategias no racionalizables de forma sucesiva.

1.3.2. Eliminación de estrategias dominadas

Definición 1.7 (Dominancia)**.** Una estrategia $\widehat{s}_i \in S_i$ domina débilmente una estrategia $s_i \in S_i$, o s_i es una estrategia débilmente dominada por $\widehat{s}_i$, si para todo $s_{-i} \in S_{-i}$:

$$\pi_i(\widehat{s}_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i})$$

con desigualdad estricta por lo menos para un s_{-i}. Cuando en la definición anterior podemos sustituir la desigualdad débil por una estricta para todo $s_{-i} \in S_{-i}$ decimos que $\widehat{s}_i \in S_i$ domina (estrictamente) la estrategia s_i, o en otras palabras, que s_i es una estrategia dominada (estrictamente) por $\widehat{s}_i$.

Nota técnica 1.8. Mientras no se diga lo contrario, el término domina o dominada se utiliza en un sentido estricto.

Ejemplo 1.9. En el siguiente juego, para el agente 1, Y domina a Z.

1\2	A	B	C
X	2,7	2,0	2,2
Y	7,0	1,1	3,2
Z	4,1	0,4	1,3

Observe que $\pi_1(Y, s_2) > \pi_1(Z, s_2)$ para cualquier $s_2 \in S_2$.Es decir:

- $\pi_1(Y, A) = 7 > \pi_1(Z, A) = 4$
- $\pi_1(Y, B) = 1 > \pi_1(Z, B) = 0$
- $\pi_1(Y, C) = 3 > \pi_1(Z, C) = 1$

Ejercicio 1.10. Demuestre que U es una estrategia dominada débilmente por V.

1\2	T	U	V
L	1,4	7,0	0,2
M	0,0	2,-6	3,5
N	5,1	1,4	4,4

Definición 1.11 (Estrategias dominantes)**.** Una estrategia $\widehat{s_i} \in S_i$ es una estrategia dominante débilmente si domina débilmente a toda estrategia. Decimos que es dominante (estrictamente) si domina (estrictamente) a toda estrategia.

Definición 1.12 (Equilibrio en estrategias dominantes)**.** Cuando cada uno de los jugadores tiene una estrategia dominante estrictamente (débilmente) $\widehat{s_i} \in S_i$, decimos que el juego tiene un equilibrio en estrategias dominantes estrictamente (débilmente). Este equilibrio es el perfil de estrategias $\widehat{s} = (\widehat{s_1}, \widehat{s_2}, ..., \widehat{s_N}) \in S$.

Ejemplo 1.13 (Dilema de los prisioneros)**.** En el dilema de los prisioneros cada uno de los agentes tiene una estrategia dominante.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Obsérvese que $\pi_i(A, s_{-i}) > \pi_i(C, s_{-i})$ para todo i y para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.

Ejemplo 1.14 (Batalla de los sexos)**.** En la batalla de los sexos ningún jugador tiene una estrategia dominante.

M\H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Note que $\pi_1(B, B) > \pi_1(S, B)$, sin embargo $\pi_1(B, S) < \pi_1(S, S)$ por lo que ni B domina a S, ni al contrario. De igual manera, para $i = 2$ $\pi_2(B, B) > \pi_2(B, S)$ pero $\pi_2(S, B) < \pi_2(S, S)$.

Ejercicio 1.15. Demuestre que si existe un equilibrio en estrategias dominantes (estrictamente o débilmente) entonces es único.

El equilibrio en estrategias dominantes es un concepto de equilibrio muy fuerte desde el punto de vista estratégico, ya que requiere de la existencia de estrategias dominantes para cada jugador. Sin embargo, es muy débil desde el punto de vista del grado de conocimiento que se supone de los jugadores. El equilibrio en estrategias dominantes estrictamente se basa en una hipótesis de comportamiento débil: los individuos no juegan nunca una estrategia que es dominada. Luego, al existir una estrategia dominante estrictamente, esta es la única a considerar como racional (la hipótesis en el caso de estrategias dominantes débilmente es más discutible como veremos más adelante).

Estas características hacen que este concepto de solución sea muy fuerte y que no exista en muchos ejemplos. La tensión entre los diferentes conceptos de solución, las exigencias desde el punto de vista estratégico de un juego y el conocimiento que se supone de los jugadores será una constante a lo largo de este libro.

Para estudiar más a fondo la idea de condiciones mínimas que debe satisfacer un concepto de solución introduciremos el concepto de estrategias no dominadas iterativamente. El concepto de dominancia sugiere una forma de identificar un conjunto de estrategias en el cual cualquier resultado de un juego debería de estar.

Definición 1.16 (Estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa)**.** Sea $S_i^0 = S_i$ y definamos S_i^k, $k \geq 0$ de la siguiente forma:

$$S_i^{k+1} = \left\{ \begin{array}{c} s_i \in S_i^k : \text{No existe } \widehat{s}_i \in S_i^k \text{ tal que} \\ \pi_i(\widehat{s}_i, s_{-i}) > \pi_i(s_i, s_{-i}),\ \forall s_{-i} \in S_{-i}^k \end{array} \right\}$$

y $S_i^\infty = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_i^k$. El conjunto S_i^∞ se denomina el conjunto de estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa del agente i y el conjunto $S^\infty =$

$\prod_{i=1}^{N} S_i^{\infty}$ el conjunto de estrategias conjuntas no dominadas estrictamente de forma iterativa del juego G.

Definición 1.17 (Juegos solucionables en estrategias no dominadas iterativamente)**.** Si S^{∞} consiste de un sólo elemento, decimos que el juego es solucionable en estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa.

Ejemplo 1.18. Consideremos el juego:

1\2	A	B	C
X	2,7	2,0	2,2
Y	7,0	1,1	3,2
Z	4,1	0,4	1,3

El proceso de eliminación arroja:

$$\begin{array}{l|l} S_1^0 = \{X, Y, Z\} & S_2^0 = \{A, B, C\} \\ S_1^1 = \{X, Y\} & S_2^1 = \{A, B, C\} \\ S_1^2 = \{X, Y\} & S_2^2 = \{A, C\} \\ S_1^3 = \{Y\} & S_2^3 = \{A, C\} \\ S_1^4 = \{Y\} & S_2^4 = \{C\} \end{array}$$

Recuerde que, mientras no se diga lo contrario, nos referiremos con estrategia no dominada a cualquier estrategia no dominada en un sentido estricto.

Observemos que el concepto de estrategias no dominadas iterativamente de un juego lo hemos definido únicamente como un proceso de eliminación secuencial de estrategias dominadas estrictamente. Un ejemplo que ilustra los problemas de utilizar estrategias no dominadas débilmente será discutido más adelante.

La definición de dominancia iterativa supone que en cada iteración se eliminan *todas* las estrategias dominadas estrictamente. Esto no es esencial en la definición. En efecto, se puede demostrar que el resultado final es independiente de si se eliminan algunas o todas y del orden en el que se eliminan.[5]

De forma análoga a la definición anterior, podemos definir W_i^k, W_i^{∞} y W^{∞} utilizando el concepto de estrategias dominadas débilmente. De la definición es implícito que en cada iteración todas las estrategías dominadas débilmente

[5] Véase Osborne y Rubinstein página 60, para una definición que sólo supone que se eliminan algunas estrategias en cada iteración.

se deberían de eliminar. Ahora, a diferencia de la dominancia estricta, el concepto de supervivencia de estrategías débilmente dominadas iterativamente sí depende de si se eliminan todas las estrategias o no y del orden en el que se eliminan. Los siguientes ejemplos ponen en evidencia estas características.

Ejemplo 1.19 (Eliminación de estrategias dominadas débilmente)**.** Considere el siguiente ejemplo:

1\2	L	R
U	5,1	4,0
M	6,0	3,1
D	6,4	4,4

Observe que D domina débilmente tanto a U como a M. Si se empieza el proceso eliminando a U solamente, el resultado es diferente a si se empieza eliminando a M solamente y es diferente a si se eliminan ambas al comienzo. Eliminando a U sobreviven $\{(D, R)\}$. Eliminando a M sobreviven $\{(D, L)\}$. Dominando débilmente a U y a M sobreviven $\{(D, L), (D, R)\}$.

Ejemplo 1.20 (Eliminación de estrategias dominadas débilmente)**.** Considere el siguiente ejemplo:

1\2	W	X	Y
A	1,2	2,3	0,3
B	2,2	2,1	3,2
C	2,1	0,0	1,0

Si aquí se eliminan tanto A como C el resultado es diferente a si se elimina solo C. Si se elimina C sobreviven $\{(B, Y)\}$. Si se elimina A y C sobreviven $\{(B, W), (B, Y)\}$.

Estas características del proceso de eliminación iterativa débil hacen más difícil de racionalizar este proceso como hipótesis de comportamiento. Sin embargo, una forma de hacerlo es la siguiente. Suponga que los jugadores suponen que sus adversarios pueden tener una mano temblorosa. Vamos a ilustrar esto a través de un ejemplo muy sencillo. Considere el siguiente juego:

1\2	A	B
A	1,2	2,3
B	2,2	2,0

La estrategia A es dominada débilmente para el jugador 1. Ahora si el jugador 1 piensa que su adversario va jugar con probabilidad positiva cada una de sus acciones (mano temblorosa) entonces en valor esperado la estrategia A es dominada estrictamente. Observemos que la hipótesis de racionalidad de no jugar estrategias dominadas débilmente es una hipótesis más fuerte que suponer que los jugadores no juegan estrategias dominadas estrictamente.

Ejercicio 1.21. Demuestre que $W^\infty \subseteq S^\infty$. Dé un ejemplo que muestre que en general la contenencia es estricta.

Ejercicio 1.22. Sea EW y ES el conjunto de equilibrios en estrategias dominantes débilmente y estríctamente respectivamente. Demuestre que:

$$ES \subseteq EW \subseteq W^\infty \subseteq S^\infty$$

El concepto de estrategias no dominadas iterativamente enmarca los requerimientos mínimos que debe tener cualquier candidato a solución de un juego. Sin embargo, no es un concepto de equilibrio estrictamente hablando, en el sentido de que no lleva en consideración una noción de estabilidad en la cual, con ese conjunto de estrategias, los jugadores no tengan incentivos unilaterales a desviarse. En cambio, se trata de un conjunto de estrategias que deberían contener a cualquier concepto de solución de un juego.

El concepto de estrategias no dominadas iterativamente es un concepto muy débil y en ocasiones no provee de ninguna información adicional sobre el resultado del juego. Por ejemplo, en la batalla de los sexos, ningún jugador tiene una estrategia dominada y, por lo tanto, S^∞ es el mismo conjunto de estrategias del juego original.

En este orden de ideas, aunque la idea de eliminación de estrategias dominadas iterativamente es un concepto muy débil desde el punto de vista estratégico, supone algo más de conocimiento por parte de los jugadores. Este conocimiento está relacionado con qué conoce uno sobre lo que los demás hacen. Específicamente, la hipótesis de comportamiento es que ningún jugador juega una estrategia dominada y se supone una forma débil de inteligencia, la idea de que todo jugador sabe que el otro no jugará una estrategia dominada y, a su vez, cada uno de ellos sabe que el otro sabe, etc.

Las hipótesis de racionalidad y conocimiento común sobre la inteligencia de los jugadores permiten, en principio, considerar como irracionales algunas otras estrategias que no son eliminadas por el proceso de eliminación de estrategias dominadas estrictamente. Esto nos conduce al siguiente concepto; el de estrategias racionalizables.

Ejercicio 1.23 (Subasta al segundo precio con información completa)**.** Considere un juego en el que uno conjunto de jugadores (i.e., participantes de una subasta) están ofertando por un único bien que se está subastando. Cada jugador tiene una valoración privada del objeto (i.e., en este contexto esto quiere decir que la valoración que cada agente tiene del objeto no depende de la valoración que los demás tengan del objeto, es independiente) pero esta es conocimiento común de todos los jugadores (i.e., esto es lo que se conoce como información completa, concepto que estudiaremos más adelante). Los agentes deben ofertar de forma simultánea por el bien y gana el que más oferte gana pero paga la segunda oferta más alta (i.e., subasta al segundo precio). Por simplicidad supongamos que no hay empates. El pago para cada jugador es, en caso de ganar, igual a su valoración menos lo que paga. De lo contrario, es cero. Demuestre que la eliminación débil de estrategias dominadas débilmente tiene una predicción muy precisa: ganan los jugadores que tienen la valoración más alta del objeto.

1.3.3. Estrategias racionalizables

Definición 1.24 (Mejor respuesta)**.** Una estrategia $\widehat{s}_i$ es mejor respuesta para el jugador i cuando las estrategias de los demás son s_{-i} si:

$$\pi_i(\widehat{s}_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i})$$

para todo s_i. Una estrategia s_i nunca es una mejor respuesta si no existe s_{-i} tal que s_i sea mejor respuesta cuando las estrategias de los demás son s_{-i}.

Ejemplo 1.25 (Dilema de los prisioneros)**.** En el dilema de los prisioneros la mejor respuesta para los dos jugadores es A para todo s_{-i}:

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Cuando 2 juega A (i.e. $s_{-1} = A$) la mejor respuesta del jugador 1 es jugar $\widehat{s}_1 = A$ dado que $\pi_1(A, A) = -10 \geq \pi_1(C, A) = -12$. Del mismo modo, cuando $s_{-1} = C$ la mejor respuesta del jugador 1 sigue siendo $\widehat{s}_1 = A$ dado que $\pi_1(A, C) = 0 \geq \pi_1(C, C) = -1$. Dado que los pagos de este juego son simétricos, la mejor respuesta del jugador 2 será $\widehat{s}_2 = A$ tanto para $s_{-2} = A$ como para $s_{-2} = C$.

Ejercicio 1.26. Muestre que en la batalla de los sexos $\widehat{s}_1 = B$ es la mejor respuesta para $s_{-1} = B$ y que $\widehat{s}_1 = S$ es la mejor respuesta para $s_{-1} = S$. Encuentre la mejor respuesta de 2 para cada estrategia de 1.

La hipótesis de racionalidad sugiere que un jugador sólo jugará una estrategia que sea mejor respuesta a algún perfil de estrategias de los demás jugadores (esta es una hipótesis de racionalidad más fuerte que suponer que los jugadores no jugarían estrategias dominadas, véase ejercicio 1.29). Es intuitivo pensar en la misma línea que la definición de eliminación de estrategias dominadas estrictamente y extender a una definición de eliminación iterativa de estrategias que nunca son mejor respuesta.

Definición 1.27 (Estrategias racionalizables)**.** Las estrategias que sobreviven al proceso de eliminación iterativa de estrategias que nunca son mejor respuesta conforman el conjunto de estrategias racionalizables R^{∞}.

Ejemplo 1.28. Considere el siguiente juego:

1\2	A	B	C
X	2,7	2,0	2,2
Y	7,0	1,1	3,2
Z	4,1	0,4	1,3

Para el jugador 1:
Si $s_{-1} = A \rightarrow \widehat{s}_1 = Y$
Si $s_{-1} = B \rightarrow \widehat{s}_1 = X$
Si $s_{-1} = C \rightarrow \widehat{s}_1 = Y$
Como Z nunca es mejor respuesta no se considera en el análisis de 2. De la misma forma se van a descartar estrategias abajo.

-Para el jugador 2: -Si $s_{-2} = X \rightarrow \widehat{s}_2 = A$ -Si $s_{-2} = Y \rightarrow \widehat{s}_2 = C$	-Para el jugador 1: -Si $s_{-1} = A \rightarrow \widehat{s}_1 = Y$ -Si $s_{-1} = C \rightarrow \widehat{s}_1 = Y$
-Para el jugador 2: -Si $s_{-2} = Y \rightarrow \widehat{s}_2 = C$	-Para el jugador 1: -Si $s_{-1} = C \rightarrow \widehat{s}_1 = Y$

Con esto se concluye que $R^{\infty} = \{(Y, C)\}$

Se puede demostrar que el proceso de eliminación es independiente del orden.

Ejercicio 1.29. Demuestre que una estrategia estrictamente dominada nunca es una mejor respuesta.

Ejercicio 1.30. Demuestre o dé un contraejemplo de la afirmación $R^{\infty} \subseteq S^{\infty}$.

Paradójicamente, una estrategia dominada débilmente puede ser una mejor respuesta. Este es el caso con las estrategias que son dominadas débilmente pero no lo son estrictamente. Esta observación muestra que el concepto de eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas no tiene bases racionales tan sólidas como el concepto basado en eliminación estricta. Sin embargo, como veremos más adelante, este tipo de eliminación puede eventualmente eliminar equilibrios de Nash lo cuál resulta atractivo en presencia de múltiples equilibrios.

1.3.4. Equilibrio de Nash - Cournot

Definición 1.31 (Equilibrio de Nash - Cournot)**.** Una estrategia conjunta $\widehat{s} \in S$ es un equilibrio de Nash - Cournot si para todo jugador i y para toda estrategia $s_i \in S_i$:

$$\pi_i(\widehat{s}_i, \widehat{s}_{-i}) \geq \pi_i(s_i, \widehat{s}_{-i})$$

Notemos que este concepto de solución tiene como eje central una idea de estabilidad. En otras palabras, en este tipo de equilibrios se cumple que ningún agente tiene incentivos unilaterales a desviar porque cualquier otra de sus estrategias, suponiendo las de los demás fijas, le trae un pago menor o igual. De ahora en adelante nos referiremos a estos equilibrios simplemente como equilibrios de Nash.

Ejemplo 1.32 (Dilema de los prisioneros)**.** En el dilema de los prisioneros el equilibrio de Nash $\widehat{s} = \{(A, A)\}$ coincide con el equilibrio en estrategias dominantes.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Note que $\widehat{s} = \{(A, A)\}$ es un equilibrio de Nash ya que no hay incentivos unilaterales a desviar:

$$\pi_i(A, A) \geq \pi_i(C, A). \quad \forall i$$

Como se demostró antes, en este juego cada jugador tiene una única estrategia dominante $s_i = A$ por lo que el equilibrio en estrategias dominantes es el perfil de estrategias (A, A) y coincide con el equilibrio de Nash.

Ejemplo 1.33. batalla$_{s}exos][Batalladelossexos]LabatalladelossexostienedosequilibriosdeNash, ningunod$

M\H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Note que $\widehat{s} = \{(B, B)\}$ es un equilibrio de Nash ya que no hay incentivos unilaterales a desviar

$$\pi_i(B, B) \geq \pi_i(S, B). \quad \forall i$$

De igual manera $\widehat{s} = \{(S, S)\}$ es un equilibrio de Nash ya que no hay incentivos unilaterales a desviar

$$\pi_i(S, S) \geq \pi_i(B, S). \quad \forall i$$

Como se demostró antes, en este juego no hay ninguna estrategia que domine a la otra, por lo que no hay un equilibrio en estrategias dominantes.

Ejercicio 1.34. Demuestre que todo equilibrio en estrategias dominantes débilmente es un equilibrio de Nash.

Ejemplo 1.35 (Tragedia de los comunes)**.** n jugadores desean compartir una banda de transmisión de información. La capacidad máxima es uno y cada agente debe escoger qué cantidad $x_i \in [0, 1]$ desea transmitir. El beneficio para cada agente i es:

$$\pi_i = x_i \left(1 - \sum_j x_j\right)$$

Esto quiere decir que a cada jugador le genera utilidad la cantidad que transmite, pero también la genera utilidad que la banda no esté tan congestionada. Un equilibrio de Nash de este ejemplo es:

$$x_i = \frac{1}{n+1}$$

Para demostrar que este efectivamente es un equilibrio de Nash se calcula el beneficio de usar esta estrategia y después se prueba que no existe ninguna estrategia con un pago estrictamente mayor.

Pago de seguir la estrategia:
$\pi_i = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1-n}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$

Pago de ocupar $\varepsilon > 0$ más de banda, es decir de desviarse hacia arriba:
$\pi_i = \left(\frac{1}{n+1} + \varepsilon\right)\left(1 - \frac{n-1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \varepsilon\right) = \left(\frac{1+\varepsilon(n+1)}{n+1}\right)\left(\frac{n+1-n+1-1-\varepsilon(n+1)}{n+1}\right)$
$\pi_i = \left(\frac{1+\varepsilon(n+1)}{n+1}\right)\left(\frac{1-\varepsilon(n+1)}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \varepsilon^2$
Dado que el pago es menor no hay incentivos a desviarse hacia arriba. Ahora analicemos si hay incentivos a ocupar $\varepsilon > 0$ menos de banda, es decir de desviar hacia abajo:
$\pi_i = \left(\frac{1}{n+1} - \varepsilon\right)\left(1 - \frac{n-1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \varepsilon\right) = \left(\frac{1-\varepsilon(n+1)}{n+1}\right)\left(\frac{n+1-n+1-1+\varepsilon(n+1)}{n+1}\right)$
$\pi_i = \left(\frac{1-\varepsilon(n+1)}{n+1}\right)\left(\frac{1+\varepsilon(n+1)}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \varepsilon^2$
Tampoco hay incentivos a desviar hacia abajo, por lo que es un equilibrio de Nash.

El problema es que el valor individual y social de esta solución es muy bajo: $\frac{1}{(1+N)^2}$ y $\frac{N}{(1+N)^2} \sim \frac{1}{N}$ respectivamente.

Ahora, si maximizamos el valor social suponiendo que cada agente usa la misma proporción x de la banda entonces:

$$\sum_i x_i \left(1 - \sum_j x_j\right) = nx\,(1 - nx)$$

y obtenemos la solución socialmente eficiente $x = \frac{1}{2n}$ que implica un beneficio social igual a $\frac{1}{4}$, el cual es muy superior al beneficio social en la solución descentralizada.

El dilema de los prisioneros y la tragedia de los comunes llaman la atención sobre el costo social de la descentralización (i.e., el costo de la competencia o racionalidad individual). Esto se conoce como el precio de la anarquía (*price of anarchy*).

Ejemplo 1.36 (Paradoja de Braess)**.** Este ejemplo se le atribuye a Dietrich Braess, ingeniero civil quien llamó la atención sobre sus características paradójicas a comienzos de los años 50. Considere la Figura 1.2 en la cual se representan esquemáticamente las posibles formas de ir en carro de la ciudad A a la ciudad B utilizando las dos carreteras que se muestran en la figura.

Debido a las características de las rutas, el tiempo que dura el trayecto de A hasta la ciudad intermedia 1 depende del tráfico, mientras que el tiempo de la ciudad intermedia 1 hasta la ciudad B es independiente del tráfico y siempre toma la misma cantidad de minutos. De forma similar, el trayecto de A a la ciudad intermedia 2 es independiente del tráfico, mientras que el de la ciudad intermedia 2 hasta la ciudad B depende del tráfico de la misma

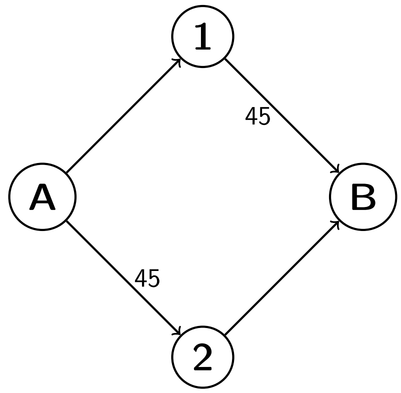

Figura 1.2: Rutas posibles para ir de la ciudad A a la B.

forma que de A hasta la ciudad intermedia 1. No es difícil convencerse que, dado un cierto número de carros que debe viajar desde el A hasta B, si cada uno de ellos tiene conocimiento sobre los detalles mencionados anteriormente y cada uno evalúa de forma independiente e individualista cuál carretera va utilizar, el flujo esperado es que la mitad de los carros utilizarán un trayecto y la otra mitad el otro. Concretamente supongamos que el número de carros es 4000. En el trayecto sujeto a congestión, el tiempo es igual al número de carros dividido por 100. En los trayectos que no están sujetos a congestión el tiempo es 45. En el equilibrio de Nash el tiempo de traslado es 65 minutos, 45 minutos en el trayecto no sujeto a congestión y 2000/100=20 minutos en el trayecto que sí. Ahora, supongamos que las autoridades competentes deciden construir una carretera entre las ciudades intermedias 1 y 2 con el fin de mitigar los problemas de congestión de viajar de A a B (línea punteada de la Figura 1.3).

Más aún, supongamos que el tiempo de desplazamiento entre 1 y 2 es prácticamente cero. Ahora, la pregunta sobre el flujo vehicular esperado dado que cada individuo actúa de forma individual, conoce las características del problema mencionadas y supone que los demás actúan de la misma forma requiere un poco más de esfuerzo. Es fácil de ver que todos los carros tomaran la ruta A - 1, pues si todos hacen esto el tiempo de desplazamiento hasta 1 es 40 minutos. Estando en 1, lo óptimo es hacer 1 - 2 - B, pues el tiempo de esta última parte sería 40 minutos y la alternativa sería 45. En conclusión el nuevo equilibrio implica un tiempo de desplazamiento de 80 minutos. El resultado es sorprendente dado que el número de carros que viaja de A hacia

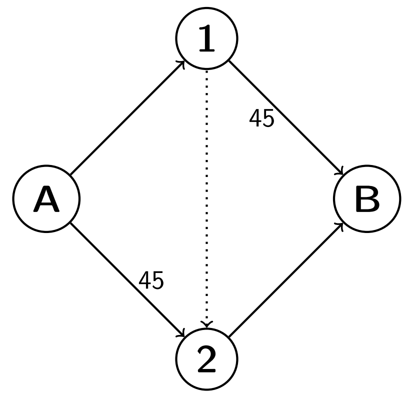

Figura 1.3: Rutas posibles para ir de la ciudad A a la B al construir una nueva carretera (línea punteada).

B es exactamente el mismo, y que las mismas rutas que estaban a disposición anteriormente siguen estándolo una vez construida la variante que comunica 1 y 2. En conclusión, el comportamiento individualista en el segundo caso tiene como consecuencia un resultado ineficiente para la sociedad.

Proposición 1. Todo equilibrio de Nash sobrevive el proceso de eliminación de estrategias dominadas estrictamente.

Prueba. Sean $EN(S)$ los equilibrios de Nash del juego G cuando el espacio de estrategias es S. Es claro que $EN(S) \subseteq S^1$ (la eliminación fuerte no puede eliminar una estrategia que haga parte de un equilibrio de Nash). Ahora, obsérvese que los equilibrios de Nash cuando el espacio de estrategias es S^1 satisfacen $EN(S) \subseteq EN(S^1)$. Aplicando el mismo argumento anterior al caso en que el juego tiene como espacio de estrategias S^1 obtenemos $EN(S) \subseteq EN(S^1) \subseteq S^2$. Continuando de esta forma obtenemos $EN(S) \subseteq S^\infty$. ■

Proposición 2. Si un juego tiene un equilibrio en estrategias no dominadas iterativamente (es resoluble en estrategias no dominadas iterativamente) entonces esa estrategia conjunta es un equilibrio de Nash y además es el único equilibrio de Nash.

Prueba. Para ver esto supongamos que no es Nash. Entonces algún agente no está optimizando dadas las estrategias de los demás. Escojamos una estrategia que sí sea mejor respuesta en S_{-i}. Como esta estrategia no sobrevivió el proceso de eliminación, ya que sólo una lo hizo, entonces tuvo que ser eliminada en algún momento. Como fue eliminada, esto quiere decir que fue dominada estrictamente en algún momento en S_i^{k-1}. Ahora, $S_i^{k-1} \supseteq S^\infty$ luego en particular, existiría una estrategia que domina estrictamente a la mejor respuesta cuando los demás juegan lo que les corresponde en el equilibrio en estrategias no dominadas iterativamente, lo que es una contradicción. La unicidad se sigue de que el proceso de eliminación de estrategias dominadas no elimina ningún equilibrio de Nash. Luego, dado que el juego es resoluble (es decir, solo existe una solución para cada jugador en S^∞, y como sabemos que no se elimina equilibrios de Nash, significa que la estrategia resultante es el único equilibrio de Nash. ■

El converso no es cierto, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.37. En este ejemplo $S_i^\infty = \{A, B, C\}$, $i = 1, 2$; pero tiene un único equilibrio de Nash (A, A).

1\2	A	B	C
A	1,1	1,0	1,0
B	0,1	2,-2	-2,2
C	0,1	-2,2	2,-2

El concepto de equilibrio de Nash es más débil que el concepto de equilibrio en estrategias dominantes, un ejemplo de esto son los equilibrios en la Batalla de los sexos. En este juego, no es posible encontrar un equilibrio en estrategias dominantes. Sin embargo, se encuentran dos equilibrios de Nash como se demostró en el ejemplo **??**.

A diferencia del proceso de dominación iterativa, el proceso de dominación débilmente iterativa sí puede eliminar equilibrios de Nash como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.38. Nash no sobrevive eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente.

1\2	A	B
A	1,1	0,-3
B	-3,0	0,0

Note que (A, A) Y (B, B) son equilibrios de Nash. Sin embargo, para ambos jugadores B es una estrategia dominada débilmente. Esto implica que si se realiza el proceso de eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente, uno de los dos equilibrios de Nash, (B, B), se va a perder. El siguiente diagrama de Venn se muestra la relación entre S^∞, W^∞ y EN para este ejemplo.

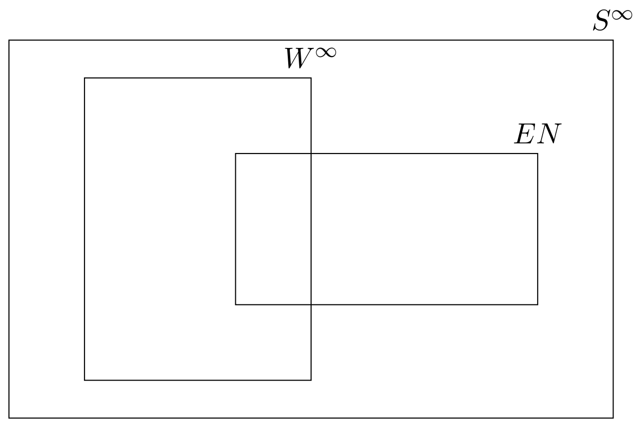

Figura 1.4: Diagrama de Venn para los conjuntos S^∞, W^∞ y EN para los casos en los que $W^\infty \cap EN \neq \varnothing$

Ejemplo 1.39. Considere el siguiente juego.

1\2	A	B	C
A	1,-1	-1,1	0,-2
B	-1,1	1,-1	0,-2
C	-2,-1	1,-1	0,-1

En este caso, hay dos equilibrios de Nash $EN = \{(C, B), (C, C)\}$, ninguno de los cuales está contenido en W^∞ porque B domina débilmente a C para el jugardor 1. Este ejemplo muestra que existen casos en los que $W^\infty \cap EN = \varnothing$. Es decir, que el proceso de dominación iterativa de estrategias puras dominadas débilmente elimina todos los equilibrios de Nash. A continuación se tiene el diagrama de Venn de este ejemplo.

No todos los juegos tienen un equilibrio de Nash en estrategias puras, como se puede observar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.40 (Cara y Sello)**.** Considere el siguiente juego.

1\2	C	S
C	1,-1	-1,1
S	-1,1	1,-1

En este caso no existe un equilibrio de Nash - Cournot en estrategias puras. En el siguiente capítulo se introducirá la extensión mixta de un juego, que usa estretagias mixtas, para poder resolver este tipo de juegos.

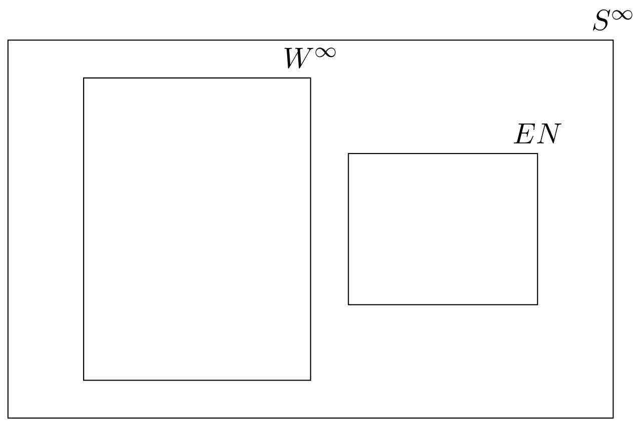

Figura 1.5: Diagrama de Venn para los conjuntos S^∞, W^∞ y EN para los casos en los que $W^\infty \cap EN = \varnothing$

El equilibrio de Nash - Cournot es un concepto más débil en términos estratégicos que el equilibrio en estrategias dominantes pero más fuerte en términos de la inteligencia que se supone tienen los jugadores. En este es necesario que los agentes tengan una expectativa correcta sobre lo que los demás van a jugar y viceversa. Más aún, es una condición natural y, por lo tanto, una condición mínima que impondremos a cualquier concepto de equilibrio.

1.3.5. Seguridad

Existen situaciones en las que jugar el equilibrio de Nash puede resultar muy riesgoso ya que se está haciendo el supuesto de que los otros jugadores van a actuar de cierta manera. Puede que el pago de que no lo hagan sea tan bajo que los jugadores privilegien el concepto de seguridad. A partir del siguiente ejemplo se va a resaltar la idea de seguridad:

Ejemplo 1.41. Considere el siguiente juego:

1\2	A	B
X	2,1	2,-20
Y	3,0	-10,1
Z	-100,2	3,3

El único equilibrio de Nash (Z, B) de este juego es un poco peligroso para el jugador 1. Observemos que si el jugador 2 comete un error y no juega Nash entonces 1 se ve muy perjudicado (pasa de ganar 3 a -100). Alternativamente, él podría jugar una estrategia que le garantizara el mejor pago posible en el peor de los casos.

Definición 1.42. Formalmente el valor maxmin o valor de seguridad de un jugador, en estrategias puras, se define como la utilidad para el jugador i cuando el jugador i resuelve:

$$\max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} \pi_i\left(s_i, s_{-i}\right)$$

Notemos que este valor supone que todos los adversarios de i actúan concertadamente para minimizar el pago de i. Las estrategias para el jugador i que resuelven el problema anterior se llaman estrategias maxmin del jugador i y el pago de ese problema se denomina valor de seguridad del juego. Intuitivamente, el valor de seguridad para un jugador es el pago más alto que el jugador puede asegurar. Si sus adversarios no se coordinan para castigarlo, podría obtener mayores pagos que el valor de seguridad.

Ejemplo 1.43. Considere el ejemplo anterior.

1\2	A	B
X	2,1	2,-20
Y	3,0	-10,1
Z	-100,2	3,3

Jugador 2:
Primero hay que encontrar $\min_{s_1 \in S_1} \pi_2\left(s_1, s_2\right)$

- si 2 juega A, 1 va a jugar Y porque $0 < 1 < 2$;
- si 2 juega B, 2 va a jugar X porque $-20 < 1 < 3$;

Ahora el jugador 2 maximiza entre sus opciones, ($\max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} \pi_2\left(s_1, s_2\right)$). En este caso, la estrategia maxmin del jugador 2 va a ser A dado que $0 > -20$, y el valor maxmin para 2 va a ser 0.

En el ejercicio anterior si ambos jugadores juegan sus estrategias maxmin, se llegaría (X, A). Sin embargo, esto no puede considerarse un equilibrio dado que hay incentivos a desviar. A pesar de esto, las estrategias maxmin pueden ser útiles en un contexto con múltiple equilibrios de Nash en donde uno de ellos sea la intersección de las estrategias maxmin de los jugadores.

1.4. Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes afirmaciones determine si es falsa o verdadera y escriba una corta justificación de su respuesta.

    a) El concepto de equilibrio en estrategias dominantes estrictamente supone que los jugadores son inteligentes en el sentido de que todos saben que los demás no juegan estrategias dominadas estrictamente.

    b) El conjunto que resulta de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas (S^{∞}) puede ser vacío.

    c) Suponer que un individuo no juega estrategias dominadas estrictamente es un hipótesis de racionalidad más fuerte que suponer que no juega estrategias dominadas débilmente.

    d) El concepto de equilibrio de Nash es más exigente en términos estratégicos que el concepto de equilibrio en estrategias dominantes, pero menos exigente en términos de la inteligencia que se supone de los jugadores (i.e., conjeturas).

    e) El conjunto que resulta de la eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente (W^{∞}) contiene todos los equilibrios de Nash.

    f) Todo equilibrio de Nash sobrevive al proceso de eliminación iterativa de estrategias dominadas estrictamente, pero no a la eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente.

    g) Todo equilibrio de Nash sobrevive el proceso de eliminación de estrategias dominadas débilmente, pero no la eliminación de estrategias dominadas estrictamente.

    h) Todo perfil de estrategias que sobrevive al proceso de eliminación de estrategias dominadas (estríctamente) es un equilibrio de Nash.

    i) El concepto de equilibrio de Nash supone que los jugadores hacen conjeturas sobre lo que los demás van a jugar pero no supone que necesariamente estas conjeturas se realizan en equilibrio.

    j) La ineficiencia del equilibrio de Nash se debe en parte a que los agentes escogen sus estrategias de forma independiente.

    k) El precio de la anarquía se refiere a la ineficiencia que resulta del comportamiento individualista de los individuos.

l) En un juego con varios equilibrios de Nash no puede suceder que un equilibrio sea dominado por el otro (i.e., en un equilibrio los pagos son estrictamente superiores para para cada jugador que lo que les corresponde en otro equilibrio).

m) La eliminación de estrategias dominadas estrictamente disminuye (estrictamente) el valor maxmin de un juego para por lo menos un jugador.

n) En un juego estático arbitrario, el valor maxmin para un jugador debe ser el pago en algún equilibrio de Nash.

ñ) El concepto de equilibrio de Nash implica el concepto de seguridad cuando el juego tiene equilibrios de Nash en estrategias puras.

o) Todo equilibrio de Nash es una estrategia maxmin para cada jugador.

p) En un juego en forma normal si cada jugador juega una estrategia maxmin entonces ese perfil de estrategias es un equilibrio de Nash.

2. Considere la siguiente variación de la paradoja de los sombreros. El profesor dice: "voy a esperar un minuto para que me digan de que color es el sobrero que tiene cada uno en su cabeza. Durante ese minuto pueden levantar la mano y decir rojo o blanco. Si después de un minuto no han dicho nada se entiende que cada uno de ustedes no sabe el color de sus sombrero con certeza. Una vez finalizado el juego los que tomaron una decisión ilógica serán penalizados, a los demás se les dará una bonificación. Por ejemplo, haber levantado la mano sin tener certeza, o haber dejado que pase el tiempo cuando se hubiera podido levantar la mano porque debería de saber serán penalizados."

   Ahora el profesor anuncia con un megáfono que existe por lo menos un sombrero blanco entre ellos tres y los pone a jugar con las mismas reglas del juego.

   En este caso, al finalizar el tiempo de espera, todos deberían de levantar la mano.

3. Demuestre que si el conjunto de estrategias que sobreviven la eliminación iterativa de estrategias dominadas estrictamente consiste de un solo perfil de estrategias, entonces este perfil es un equilibrio de Nash y además el equilibrio de Nash es único.

4. Demuestre que si se eliminan iterativamente las estrategias dominadas estrictamente de un juego, no se elimina ningún equilibrio de Nash.

5. Considere la siguiente definición: sea $s^* \in S$ una estrategia conjunta en el espacio de las estrategias puras. Se dice que $s^* \in \widehat{EW}$ si $\forall i$:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in \ S_i, \forall s_{-i} \in \ S_{-i}$$

A la luz de la anterior definición ¿Son las siguientes proposiciones ciertas? Si sí, demuéstrelo formalmente. En caso contrario, dé un contraejemplo.

a) Si $s^* \in \widehat{EW}$, entonces s^* es un Equilibrio de Nash.

b) Si $\widehat{s}$ es un Equilibrio de Nash, entonces $\widehat{s} \in \widehat{EW}$.

Solución:

a) Esta afirmación es verdadera y se probará por contradicción.

Supongamos que para cierto jugador i la estrategia $s_i^* \in \widehat{EW}$ pero que $s_i^* \notin EN$. Lo primero implica que para el jugador i:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in \ S_i, \forall s_{-i} \in \ S_{-i} \tag{1.1}$$

Por otro lado, lo segundo implica que la estrategia $s_i^* \in \ S_i$ no es mejor respuesta del jugador i ante $s_{-i}^* \in \ S_{-i}$, donde $s_{-i}^* \in EN$. Es decir:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \ < \pi_i(\widehat{s_i}, s_{-i}^*), \text{ con } \widehat{s_i} \in \ S_i \text{ y } s_{-i}^* \in \ S_{-i} \tag{1.2}$$

Note que la ecuación (2) contradice la ecuación (1) cuando se habla en particular del jugador i, de la estrategia $\widehat{s_i} \in \ S_i$ y de la estrategia $s_{-i}^* \in \ S_{-i}$. Por tanto, se debe cumplir que si $s^* \in \widehat{EW}$, entonces s^* es un Equilibrio de Nash.

b) Esta afirmación es falsa, lo cual se muestra con un contraejemplo.

Suponga el siguiente juego en forma normal en donde solo hay dos jugadores:

1\2	C	D
A	2,3	3,1
B	2,2	3,2

Dado que para el jugador 1 se cumple que:

$$\pi_1(A, s_2) \geq \pi_1(B, s_2), \forall s_2 \in \ S_2$$

Y también se cumple que:

$$\pi_1(B, s_2) \geq \pi_1(A, s_2), \forall s_2 \in \ S_2$$

Entonces se puede afirmar que ambas estrategias de ese jugador hacen parte del conjunto $\widehat{EW}$.

Por su parte, para el jugador 2 se observa que:

$$\pi_2(s_1, C) \geq \pi_2(s_1, D), \forall s_1 \in \ S_1$$

Por tanto, se puede afirmar que para el jugador 2 la estrategia $C \in \widehat{EW}$.

En conclusión se tendría que $\widehat{EW} = [(A, C), (B, C)]$. Como (B,D) es también un equilibrio de Nash y no pertenece a $\widehat{EW}$ se prueba lo que se deseaba probar.

6. Considere el siguiente juego.

$1\backslash 2$	X_2	Y_2
X_1	2,2	0,6
Y_1	6,0	1,1

a) ¿Cuál es el equilibrio de Nash?

Suponga ahora que los jugadores se pueden comunicar y le piden a un abogado que les elabore un contrato que dice lo siguiente: si ambos lo firman, ambos prometen jugar (X_1, X_2). Si solamente uno lo firma, digamos i, entonces i promete jugar Y_i. En caso de firmar el contrato, es de obligatorio cumplimiento (e.g., no cumplirlo tiene una penalidad muy alta)

El nuevo juego es:

$1\backslash 2$	X_2	Y_2	S_2
X_1	2,2	0,6	0,6
Y_1	6,0	1,1	1,1
S_1	6,0	1,1	2,2

b) Calcular el nuevo equilibrio.

c) ¿Qué aprende usted de este ejercicio?

7. Juegos en formal normal. Considere el siguiente juego;

1\ 2	A	B	C	D
W	0,7	2,5	7,0	0,1
X	5,2	3,3	5,2	0,1
Y	7,0	2,5	0,7	0,1
Z	0,0	0,-2	0,0	10,-1

¿Cuál es su mejor predicción de la interacción de los dos jugadores en este juego?

8. Juego del gallina, basado en Shubik (1984)[6]

Dos pilotos de avión dirigen sus aeronaves en la misma línea recta, uno en sentido sur-norte y otro en sentido norte-sur. En el momento en el que la colisión es inminente, si uno de los dos pilotos desvía el rumbo de su avión a la derecha (D) entonces este es considerado como gallina y obtiene un pago menor al del otro piloto, en el caso en que ambos se desvían, ninguno obtiene un pago y cuando ninguno se desvía (ND) la colisión genera un pago mucho menor a ambos jugadores. La matriz de pagos de esta situación es la siguiente:

1\2	ND	D
ND	-10,-10	5,-5
D	-5,5	0,0

Encuentre el equilibrio de Nash de este juego.

9. Considere el siguiente juego

1\ 2	A	B	C	D
W	3,4	5,6	2,1	4,5
X	5,5	4,3	3,4	2,8
Y	3,3	5,6	7,9	4,1
Z	3,2	5,4	6,2	8,9

a) Encuentre S^{∞}.

b) Encuentre W^{∞}.

[6]Shubik, M. (1984). Game theory in the social sciences : concepts and solutions. Cambridge, MA ; London : MIT Press, 1984.

c) Encuentre el equilibrio en estrategias dominantes.

d) Encuentre R^{∞}.

e) Encuentre el equilibrio de Nash.

10. Usando el principio del buen orden de los números naturales demuestre la proposición 1.

    Solución
    Suponga que tenemos una estrategia conjunta que es Nash pero no está en S^{∞}. Eso quiere decir que para algún i, la estrategia que le corresponde en Nash no está en S_i^{∞}, luego fue eliminada en alguna iteración k. Sea k el menor k para el cual existe un i tal que la estrategia que le corresponde a i en el equilibrio de Nash es eliminada en la iteración k. Entonces esto implica que existe una estrategia en S_i^{k-1} que domina estrictamente en S_{-i}^{k-1} la estrategia de Nash que le corresponde a i. Sin embargo, todas las estrategias de los demás jugadores pertenecen a S_{-i}^{k-1} (por la definición de k, además $k \neq 0$) luego esto implicaría que la estrategia que le corresponde a i en el equilibrio de Nash no sería una mejor respuesta.

11. Juego de Blotto. Imagine que usted es un coronel del ejército, antes de iniciar un combate debe decidir dónde ubicar sus tropas (T) entre un determinado número de campos de batalla (N). Usted sabe que en un mismo campo de batalla ganara quien asigne más tropas, sin embargo, ninguna de las partes conoce a cuantas tropas se enfrentaran en cada campo. Para ganar el combate será necesario maximizar el número de campos de batalla en los cuales se venció a las tropas enemigas.

    a) Definiendo S como el conjunto de estrategias posibles. Si usted debe asignar al menos una tropa a cada campo de batalla, donde $T \geq N$ ¿cuantas estrategias ($|S|$) puede aplicar?

    b) Si $T = 5$ y $N = 3$ plantee el juego de forma normal donde los pagos sean 1 si tiene más campos ganados, 0 si empatan y -1 si tiene menos campos ganados a su oponente

    c) A partir del juego anterior determine cuales son los equilibrios de Nash del juego tanto en estrategias puras como en mixtas

    d) Asuma que $T = 6$ y $N = 3$, ahora considere una nueva regla en la que solo es posible ubicar tropas en un orden no decreciente, plantee el juego de forma normal y encuentre los equilibrios de Nash y la estrategia optima

Solución

a) El número de estrategias estará determinado por

$$|S| = \begin{cases} 1 & si\ T = N \\ \binom{T}{N} \cdot - \binom{T-1}{N} \cdot & de\ lo\ contrario \end{cases} \tag{1.3}$$

simplificando

$$|S| = \begin{cases} 1 & si\ T = N \\ \dfrac{(T-1)!}{(N-1)!(T-N)!} & de\ lo\ contrario \end{cases} \tag{1.4}$$

b)

Jugador 1 \ Jugador 2	(1,2,2)	(2,1,2)	(2,2,1)	(1,1,3)	(1,3,1)	(3,1,1)
(1,2,2)	0	0	0	0	0	1
(2,1,2)	0	0	0	0	1	0
(2,2,1)	0	0	0	1	0	0
(1,1,3)	0	0	-1	0	0	0
(1,3,1)	0	-1	0	0	0	0
(3,1,1)	-1	0	0	0	0	0

c) El juego tiene como $EN = \{[(1,2,2);(2,1,2);(2,2,1)] \times [(1,2,2);(2,1,2);(2,2,1)]\}$ en estrategias puras, y un infinito número de equilibrios en mixtas entre las estrategias mencionadas en los equilibrios en puras

d)

Jugador 1 \ Jugador 2	(2,2,2)	(1,2,3)	(1,1,4)
(2,2,2)	0	0	1
(1,2,3)	0	0	0
(1,1,4)	-1	0	0

$EN = \{[(2,2,2);(1,2,3)] \times [(2,2,2);(1,2,3)]\}$ en estrategias puras, y un infinito número de equilibrios en mixtas entre las estrategias mencionadas en los equilibrios en puras. La estrategia optima la podemos encontrar con el EW en la cual ambos jugadores jugaran (2,2,2)

12. Considere el siguiente juego

1\ 2	A	B	C
W	a,b	c,d	e,f
X	g,h	i,j	k,l
Y	m,n	o,p	q,r

De valores a cada letra de tal forma que:

a) Exista un equilibrio en estartegias dominantes.

b) $S^{\infty}=W^{\infty}$

c) EN$=W^{\infty}=R^{\infty}=S^{\infty}$

d) Exista un Equilibrio de Nash que no pertenezca a W^{∞}

e) R^{∞} y EN en puras sean iguales y no exista un equilibrio en estrategias dominantes.

13. Precio de la Anarquía. En máximo media página explique en que consiste el precio de la anarquía y dé por lo menos un ejemplo formal (explícito de un juego con su respectiva justificación) en el que se presenta dicho fenómeno.

14. Demostrar las siguientes proposiciones:

a) La estrategia maxmin de un jugador no es única.

b) Una estrategia dominante (estricta o débilmente) es maxmin.

c) La eliminación de estrategias dominates (estricta o débilmente) no cambia el valor de seguridad de un juego para ningun jugador.