Replicación aproximada de derivados de electricidad en mercados incompletos

Seminario DERIVEX

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes y Quantil

Octubre 24 de 2012

Resumen

- Supongamos que existen por lo menos dos activos: una activo para el cual existe un mercado (futuros de energía eléctrica) y un activo libre de riesgo (un bono).
- Consideramos el problemas de valorar una opción Europea que tiene como subyacente variables con y/o sin mercado en una situación donde los mercados son incompletos (intuitivamente hay más fuentes de incertidumbre que los activos que se pueden transar).
- La existencia de un subyacente o fuente de incertidumbre que no tiene mercado hace imposible replicar exactamente el pago del derivado.
- Por esta razón decimos que los mercados son incompletos.

Resumen

- En esta presentación se propone una técnica desarrollada por Bertsimas, Kogan y Lo [2000] para de forma aproximada replicar el pago del derivado.
- La estrategia es dinámica, autofinanciada y óptima en el sentido de minimizar el error cuadrático medio.
- Ésta puede ser calculada de forma recursiva bajo el supuesto de que la dinámica de los subyacentes son procesos de Markov.

Mercados Incompletos

- Decimos que los mercados son incompletos cuando los activos disponibles no son capaces de generar todas las tranferencias de ingreso futura y entre estados.
- Es un ejemplo clásico de fallas del mercado (no se cumple el primer teorema del de la economía del bienestar en un sentido muy fuerte: ineficiencia restringida).
- Ejemplos:
  - El modelo de Black y Scholes con volatilidad estocástica.
  - Derivados con subyacentes que no tienen un mercado.
- En mercados incompletos es posible valorar un activo utilizando argumentos de equilibrio general.
- Sin embargo la pregunta de si se puede replicar un activo arbitrario no se responde.

Mercados Incompletos

- Aquí se plantea el problema: dada una riqueza inical, ¿Cómo con esta riqueza inicial se minimiza el valor esperado del error cuadrático?
- En segunda instancia la pregunta es, ¿Cuál es la menor riqueza inicial que con la cuál se puede garantiza un mínimo error?
- Esta riqueza inicial se puede intepretar como un costo de producción de una estrategia replicante óptima en cierto sentido.
- ¿Qué relación tiene este costo (mínimo) con el precio que implicaría una medida de martingala (entre las muchas existentes).
- La posibilidad de replicar un derivado con activos existentes es la base del desarrollo del mercado de derivados.

Replicación aproximada

- En mercados (dinámicamente) completos, siempre se puede replicar con $\varepsilon = 0$.
- A lo largo de la presentación se van a dar ejemplos de estructuras de mercados en la que es posible hacer $\varepsilon-$ replicaciones.

- P_t el precio de un activo, $t \in [0, \infty)$ para el cual existe un mercado (e.g., futuro de energía).
- $\Phi(P_T, Z_T)$ es el pago de un derivado (simple) que es función del activo (con mercado) y otras variables $Z_t \in [0, \infty)$ que no están perfectamente correlacionadas con P_t. Estas últimas las llamamos variables de estado.
- Existe un bono libre de riesgo y la tasa de interés es cero.
- Vamos a ilustrar toda la teoría con un ejemplo genérico relacionado con el sector eléctrico.

Example (Opciones)

Supongamos que queremos calcular el costo de reproducir aproximadmente una opción de compra con subyacente el precio promedio spot de la energía eléctrica, Z_t. Si K es el precio de ejercicio en la fecha de maduración T entonces el pago para el poseedor de la opción es: $max\{0, Z\_\{T\} - K\}$. El subyacente de este derivado no tiene un mercado.

El modelo

Tipos de derivados

Example (Contrato futuro)

Considere un contrato futuro que vence en $\bar{T} \geq T$ y definamos un activo (cuenta de margen) con precio $P(t) = F(t, \bar{T}) - F(0, \bar{T})$. El precio de este activo es igual al valor de la cuenta de margen de una posición larga en el contrato (se compromete a comprar el activo en $\bar{T}$ al precio $F(0, \bar{T})$). Suponemos que este activo es transable.

- El problema de replicación que queremos resolver es replicar apróximadamente el derivado:

$$\blacksquare(P\_\{T\}, Z\_\{T\}) = max\{0, Z\_\{T\} - K\}$$

- El vector $\begin{bmatrix} P_t & Z_t \end{bmatrix}$ es un proceso Markoviano.
- La compra y venta del activo toma lugar en tiempo discreto $t = 0, 1, , ...$

- Denotamos por θ_t el número de unidades del activo transado y por B_t la unidades invertidas en el bono libre de riesgo.
- Denotamos el portafolio por $h_t = (\theta_t, B_t)_{t=0,1,\ldots}$ y $(\theta_t)_{t=0,1,\ldots}$ como una estrategia.
- El valor del portafolio en t es:

$$V_t = \theta_t P_t + B_t$$

- Éste es autofinanciable si y sólo si:

$$V_{t+1} - V_t = \theta_t \left(P_{t+1} - P_t \right)$$

- Obsérvese que si tenemos el valor inicial del portafolio V_0 entonces para describir un portafolio autofinanciable $h_t = (\theta_t, B_t)_{t=0,1,...}$ es suficiente describir $(\theta_t)_{t=0,1,...}$
- Un derivado $\Phi(P_T, Z_T)$ es replicable con valor inicial V_0 si existe si existe una estrategia $(\theta_t)_{t=0,1,...}$ tal que:

$$\begin{aligned} V_T &= \theta_T P_T + B_T \\ &= \Phi(P_T, Z_T) \end{aligned}$$

El problema de valoración en mercados incompletos

- El problema de valoración en mercados completos (libres de arbitraje) puede plantearse de dos formas:
  1. Encontrar un portafolio autofinanciable que replique el derivado.
  2. Utilizar los teoremas fundamentales de valoración de activos para deducir la medida neutral al riesgo (martingala equivalente) y valorar el derivado.
- En mercados incompletos (libres de arbitraje):
  1. No es posible replicar cualquier derivado.
  2. No existe una única medida neutral al riesgo.

El problema de valoración en mercados incompletos

- Con una medida neutra al riesgo es fácil valorar los dos derivados del ejemplo anterior.
  - En el caso de la opción europea se calcula el valor descontado del valor esperado (con la medida neutral al riesgo) del pago del derivado.
  - En el caso del contrato forward, el precio forward es el valor esperado (con la medidad neutra al riesgo) del precio promedio de la electricidad en el futuro.

El problema de valoración en mercados incompletos

- En esta presentación nos vamos a concentrar en la primera alternativa.
- El problema que nos planteamos es cómo construir un portafolio que "casi" replique el derivado.
- Es interesante observar que el valor inicial de un portafolio que casi replica un derivado no es necesariamente el valor de éste.
- Sin embargo, la pregunta no deja de ser importante: ¿Calcular un portafolio que aproxime de forma óptima en algún sentido el pago final del derivado?.

El problema de replicación

- Consideremos el siguiente problema (error cuadrático dado una riqueza inicial):

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(V_0) &= \min_{\{\theta_t\}_{t=0,1,\ldots}} \quad E\left[\left(V_T - \Phi(P_T, Z_T)\right)^2\right] \\
& \quad s.a \\
& \quad \{\theta_t\}_{t=0,1,\ldots} \text{ es autofinanciable} \\
V_0 &= \theta_0 P_0 + B_0
\end{aligned}
$$

- Finalmente (nivel de riqueza que minimiza el error):

$$
\varepsilon^* = \min_{\{V_0\}} \varepsilon(V_0)
$$

  denotamos la solución de este problema por V_0^*.

- El valor esperado E se calcula en términos del proceso markoviano de $\begin{bmatrix} P_t & Z_t \end{bmatrix}$.

El problema de replicación

- La interpretación es la siguente: V_0^* es la menor riqueza que permite la construcción de un portafolio autofinanciable que minimiza el error cuadrático medio en el problmea de replicación aproximada.
- Como mencionamos anteriormente V_0^* no representa el valor del derivado. En efecto dado que existen varias medidas de neutras al riesgo, el error de replicación puede ser valorado de formas distintas por agentes con preferencias distintas.
- Si el mercado seleccionara una medida neutral al riesgo no hay nada que garantice que la valoración del derivado coincida con V_0^*.
- De cualquier forma V_0^* puede interpretarse como el costo de producción de una estrategia óptima en cierto sentido.
- Algunas comparaciones numéricas pueden ser muy dicientes de las bondades de esta solución.

El problema de replicación

Example (Replicación apróximada en el modelo BS en tiempo continuo)

Consideremos el problema de replicación de una opción put con la siguientes características:

$$\Phi(P_T, Z_T) = 1000 \max\{0, 40 - P_T\}$$

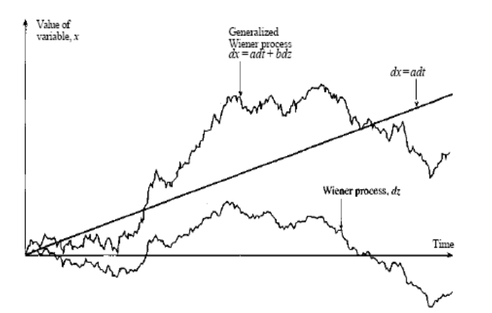
y el modelo de precios (no hay variables de estado):

$$\begin{aligned} dP_t &= \mu P_t dt + \sigma P_t dW_t \\ &\Rightarrow \\ P_t &= P_0 \left(\exp\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t \right) \end{aligned}$$

La calibración es: $\mu = 0.07$, $\sigma = 0.13$ y suponemos que hay <u>25 períodos transaccionales</u>.

El problema de replicación

Example



Example

Period t	Sample Path A					Sample Path B				
	P_t	V_t^*	θ_t^*	V_t^{BS}	θ_t^{BS}	P_t	V_t^*	θ_t^*	V_t^{BS}	θ_t^{BS}
0	40.000	1461.0	−474.8	1466.4	−481.7	40.000	1461.0	−474.8	1466.4	−481.7
1	40.750	1104.9	−394.2	1105.1	−400.8	39.875	1520.4	−491.8	1526.6	−495.9
2	42.125	562.9	−252.1	554.0	−264.0	40.250	1336.0	−452.4	1340.6	−454.3
3	41.375	751.9	−318.6	752.0	−331.8	36.500	3032.3	−762.4	3044.3	−845.8
4	42.000	552.8	−256.1	544.7	−267.2	36.875	2746.4	−744.1	2727.1	−822.1
5	43.125	264.7	−157.8	244.0	−169.5	36.500	3025.4	−777.9	3035.4	−858.3
6	43.250	245.0	−145.6	222.8	−155.1	37.000	2636.5	−750.1	2606.3	−824.5
7	42.250	390.6	−216.7	377.9	−229.5	39.875	479.9	−407.8	235.8	−500.5
8	43.000	228.2	−149.7	205.8	−160.6	39.875	479.9	−412.1	235.8	−501.4
9	41.750	415.2	−250.3	406.6	−267.9	40.125	376.9	−384.8	110.4	−468.4
10	42.000	352.7	−221.1	339.6	−235.5	39.500	617.3	−466.9	403.2	−556.1
11	42.625	214.5	−157.2	192.4	−168.9	41.250	−199.7	−227.2	−570.0	−315.0
12	41.750	352.1	−233.8	340.2	−248.5	40.625	−57.7	−300.8	−373.1	−394.7
13	41.500	410.5	−258.4	402.3	−271.0	39.875	167.9	−403.7	−77.0	−506.9
14	42.625	119.8	−128.5	97.5	−141.7	39.375	369.8	−482.4	176.4	−590.1
15	42.875	87.7	−100.5	62.1	−110.7	39.625	249.2	−452.1	28.9	−552.9
16	42.875	87.7	−91.5	62.1	−99.2	39.750	192.7	−439.2	−40.2	−534.3
17	43.125	64.8	−65.5	37.3	−70.4	39.250	412.3	−533.4	226.9	−632.3
18	43.000	73.0	−62.3	46.1	−65.4	39.500	278.9	−500.5	68.8	−592.6
19	43.000	73.0	−50.8	46.1	−51.7	39.750	153.8	−461.4	−79.3	−546.5
20	41.875	130.2	−121.8	104.3	−128.2	39.750	153.8	−472.5	−79.3	−552.5
21	41.125	221.5	−209.8	200.4	−219.8	39.875	94.8	−452.8	−148.4	−526.6
22	41.375	169.1	−137.5	145.5	−140.7	39.625	208.0	−538.7	−16.7	−610.2
23	40.625	272.2	−263.5	251.0	−271.2	39.875	73.3	−476.8	−169.3	−542.8
24	40.000	436.9	−475.7	420.5	−496.3	40.000	13.7	−432.2	−237.1	−496.3
25	40.500	199.1	0.0	172.3	0.0	40.125	−40.3	0.0	−299.2	0.0

Example

- Obsérvese que en la simulación A la estrategia de BS implica un menor error a lo largo de esa simulación (la estrategia que minimiza el error lo hace en promedio).
- La simulación B un mayor error (la estrategia de BS replica exactamente el derivado en tiempo continuo no en tiempo discreto).
- BKL reportan el resultado de simular 250.000 caminos:
  - El promedio del error de las estrategias BS fue $248.
  - El error de la estrategia de que replica aproximadamente fue $241.
  - El resultado pone de manifiesto que la estrategía que replica aproximadamente en efecto lo hace en promedio.
- Los autores demuestran que en la medida que el número de períodos transaccionales aumenta las estrategías son en el límite iguales.

El problema de replicación

Example (Replicación apróximada en el modelo BS en tiempo discreto)

Consideremos el problema de replicación de una opción put con la siguientes características:

$$\Phi(P_T, Z_T) = \max\{0, 1 - P_T\}$$

y el modelo de precios (no hay variables de estado):

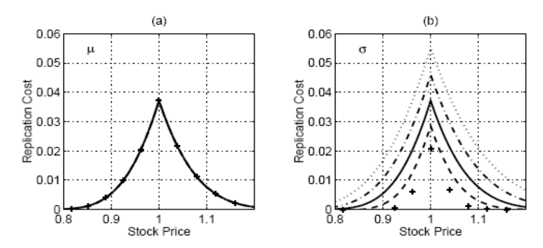
$$\begin{aligned} P_{t+1} &= P_t\,(1+\phi_t) \\ \log(1+\phi_t) &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z_t \\ z_t &\sim N(0,1) \end{aligned}$$

La calibración de referencia es: $\mu = 0.07$, $\sigma = 0.13$ y suponemos que hay <u>25 períodos transaccionales</u>.

El problema de replicación

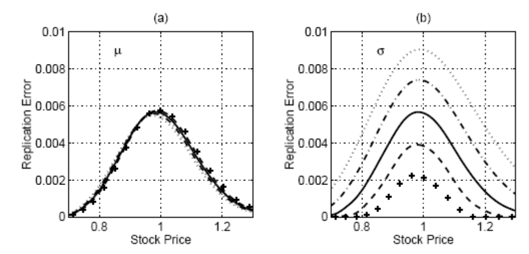
Example

Costo de replicación.



Example

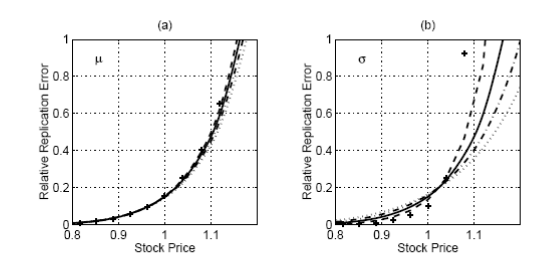
Error replicación.



El problema de replicación

Example

Error relativo (al costo) de replicación.



Example (Volatilidad Estocástica)

$Z_t = \sigma_t$.

Solución

- La solución a este problema de optimización es análoga al problema de calcular una estrategia de inducción hacia atrás en un juegos de información completa en forma extensiva.
- La técnica se general se conoce como el método de programación dinámica estocástico en tiempo discreto.
- Intuitivamente considere el período anterior a la última oportunidad de hacer transacciones.

Solución

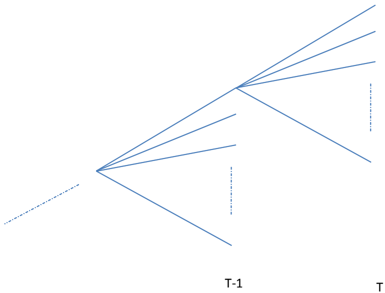
- Definamos la función valor en T :

$$J_T(V_T, P_T, Z_T) = (V_T - \Phi(P_T, Z_T))^2$$

- La ecuación de Bellman:

$$J_t(V_t, P_t, Z_t) = \min_{\theta_t(V_t, P_t, Z_t)} E\left[J_{t+1}(V_{t+1}, P_{t+1}, Z_{t+1}) \mid V_t, P_t, Z_t\right]$$

- Gráficamente:



Solución

Theorem (Bertsimas, Kogan y Lo (2000))

1. *La función valor es cuadrática:*

$$J_t(V_t, P_t, Z_t) = a_t(P_t, Z_t)(V_t - b_t(P_t, Z_t))^2 + c_t(P_t, Z_t)$$

2. *El control óptimo (estrategia)* $\theta_t^*(V_t, P_t, Z_t)$ *es lineal en* V_t.
3. *La funciones que definen la función valor y el control óptimo se obtiene de forma recursiva.*

Consideraciones finales

- El error de aproximación como una medida de incompletitud.
- Cómo usarlo como una guía para el diseño de un mercado de derivados de energía.

Fin