Teoría Espectral, Matrices No Negativas y Cadenas de Markov

Alvaro J. Riascos Villegas

Agosto, 2023

Contenido

Definiciones básicas

- Sea A una matriz (real) $n \times n$. Un número $\lambda \in C$ es un valor propio de A si existe un vector $e \in C^n$ diferente de cero tal que $Ae = \lambda e$. e se llama vector propio (por la derecha) de A.
- El conjunto de todos los valores propios se llama el espectro de A y se denota por $\sigma(A)$.
- λ es un valor propio si y solo si $det(A - \lambda I) = 0$ donde I es la matriz identidad $n \times n$.
- Por el Teorema Fundamental del Álgebra $\sigma(A)$ tiene a lo sumo n valores propios distintos.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(A) = \{i, -i\},$$

con vectores propios $(-1, i)^\top$ y $(-1, -i)^\top$.

Definciones básicas

- Decimos que vector $e \in C^n$ diferente de cero es un vector propio de A por la izquierda si es e es una vector propio de A^T.
- El radio espectral de A se define como:

$$r(A) := \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \text{ es un valor propio de } A\}. \tag{1}$$

- Obsérvese que $r(A^\top) = r(A)$

Contenido

Matrices Primitivas e Irreducibles

- Decimos que $A \geq 0$ si todos los elementos de A son no negativos.
- $A \gg 0$ si todos los elementos A son positivos.

Definition

Decimos que $A \geq 0$ es **irreducible** si $\sum_{m=0}^{\infty} A^m \gg 0$ y **primitiva** si existe un m tal que $A^m \gg 0$.

- Obsérvece que ser primitiva es una propiedad más fuerte que ser irreducible.

Conexión Fuerte y Aperiodicidad Algebraicamente

Theorem

Sea A la matriz de adyacencia de un grafo dirigido con pesos. Entonces:

- *A define un grafo fuertemente conexo si y solo si A es irreducible.*
- *A define un grafo fuertemente conexo y es aperiodica si y solo si A es primitiva.*

Teorema de Perron–Frobenius

- Obsérvece que en general $r(A)$ no es un valor propio de A:

  $$A = \text{diagonal}(-1, 0) \implies \sigma(A) = \{-1, 0\} \text{ pero } r(A) = 1.$$

  Pero si A es no negativa, $r(A)$ siempre es un valor propio de A (Perron–Frobenius).

Teorema de Perron–Frobenius

Theorem (Perron–Frobenius: Matriz No Negativa)

Si $A \geq 0$, *entonces* $r(A)$ *es un valor propio de* A *con vectores propios no negativos, por la izquierda y derecha:*

$$\exists\, e, \epsilon \in R_+^n, \ \textit{diferentes de cero, tal que } Ae = r(A)e \ \textit{y} \ A^T\epsilon = r(A)\epsilon. \tag{2}$$

Teorema de Perron–Frobenius

Theorem (Perron–Frobenius: Matriz Irreducible)

Si A es irreducible, además:

1. $r(A)$ *es estrictamente positivo y es un valor propio simple.*
2. e *y* ϵ *son positivos.*
3. *Los demás vectores propios de* A *tienen por lo menos una componente negativa.*

Teorema de Perron–Frobenius

Theorem (Perron–Frobenius: Matriz Primitiva)

Si A es irreducible, además:

1. $\mid \lambda \mid \leq r(A)$ *es estricta para todos los valores propios de A distintos a $r(A)$.*
2. *Con e y ϵ normalizados:* $\frac{A^m}{r(A)^m} \to e\epsilon$

Teorema de Perron–Frobenius

Lemma

Si $A \geq 0$, entonces:

1. $\min_i rsum_i(A) \leq r(A) \leq \max_i rsum_i(A)$ *and*
2. $\min_j csum_j(A) \leq r(A) \leq \max_j csum_j(A)$.

Demostración.

Let A be as stated and let e be the right eigenvector in (2). Since e is nonnegative and nonzero, we can and do assume that $\sum_j e_j = 1$. From $Ae = r(A)e$ we have $\sum_j a_{ij}e_j = r(A)e_i$ for all i. Summing with respect to i gives $\sum_j \mathrm{csum}_j(A)e_j = r(A)$. Since the elements of e are nonnegative and sum to one, $r(A)$ is a weighted average of the column sums. Hence the second pair of bounds in Lemma holds. The remaining proof is similar (use the left eigenvector). $\square$

Contenido

Neumann Series Lemma

Theorem (Serie Geométrica de Matrices)

Si A es una matriz tal que $r(A) < 1$, entonces existe $(I - A)^{-1}$ y:

$$(I - A)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} A^m$$

Contenido

Distribución Estacionaria

Theorem (Teorema Existencia y Unicidad Distribución Estacionaria de Cadenas de Markov)

Toda cadena de Markov (matriz estocástica por filas) finita tiene una distribucion estacionaria. Si el grafo asociado es fuertemente conexo, entonces la distribución estacionaria es única y positiva.

Demostración.

Por el lema anterior $r(A) = 1$ y por el teorema de PF existe un vector propio con valor propio 1. Normalizando se obtiene la distribución estacionaria. Fuertemente conexco es equivalente a irreducible (fuertemente conexo es equivalente a para todo i, j, $a_{ij}^k > 0$ par algún k que es equivalente a ser irreducible). El resto del teorema se sigue de PF. $\square$

Contenido

Estabilidad

- Decimos que A estocástica por filas es estable, si v^* es una distribución estacionaria única y para toda distribución de probababilidad v, $\lim_{n\to\infty} A^n v = v^*$.
- La condición necesaria para estabilidad es aperiodicidad (véase Teorema 4.2.3 de Sargent)