Juegos en Redes

Alvaro J. Riascos[1]

[1]Universidad de los Andes y Quantil

20 de noviembre de 2023

Introducción

- Muchas decisiones que tomamos diariamente dependen de nuestra red de amigos, trabajo, etc. En el caso de países las decisiones políticas dependen lazos comerciales, etc.
- Dos características importantes en este contexto es si las decisones de los agentes son complementarias o son sustitutos.
- Comenzamos estudiando un modelo muy sencillo que sirve de referencia en el cual las decisiones de cada agente (i.e., nodo) no son estratégicas pero si dependen de la estructura de la red.

Caso simétrico

- En este primer modelo ignoramos la estructura de red y suponemos que todos los agentes pueden tener influencia sobre los demás (e.g., red completa). Suponemos que la decisión de cada agente es binaria $\{0, 1\}$
- Sea s_t el estado de la red en el momento t medido como el número de agentes que han tomado la decisión 1.
- Una cadena de Markov en el estado s_t queda determinada una vez una fija la matriz de transición: $P(s_{t+1} = s' \mid s_t = s)$.

Caso simétrico

- En este primer modelo ignoramos la estructura de red y suponemos que todos los agentes pueden tener influencia sobre los demás. Suponemos que la decisión de cada agente es binaria $\{0, 1\}$
- Sea s_t el estado de la red en el momento t medido como el número de agentes que han tomado la decisión 1. Existen $n + 1$ estados: $0, ..., n$.
- Una cadena de Markov en el estado s_t queda determinada una vez una fija la matriz de transición: $P(s_{t+1} = s' \mid s_t = s)$.

Caso simétrico

- Cada periodo se elige con probablidad uniforme entre los n agentes quien debe tomar una decisión.
- Sea p_s la probabiliad (dada) de que cualquier agente tome la decisión uno, cuando tenga que tomar una decisión y que s agentes entre los demás $n-1$ agentes hayan tomado la decisión uno.
- Vamos a ver que $p=(p_0,\ldots,p_{n-1})$ determina la matriz de transición.

Caso simétrico: Matriz de transición

- Si en el periodo t, $s_t = s$ entonces el proximo periodo pueden suceder tres cosas:
  1. $s_{t+1} = s + 1$ cuando se elige un agente que su decisión hasta el momento es 0 y con probabilidad p_s cambia a 1:
  $$P(s_{t+1} = s + 1 \mid s_t = s) = \frac{n-s}{n} p_s, 0 \leq s \leq n-1 \quad (1)$$
  2. $s_{t+1} = s - 1$: cuando se elige un agente que su decisión hasta el momento es 1 y con probabilidad $1 - p_{s-1}$ cambia a 0.
  $$P(s_{t+1} = s - 1 \mid s_t = s) = \frac{s}{n}(1 - p_{s-1}), 1 \leq s \leq n \quad (2)$$
  3. $s_{t+1} = s$ cuando se elige un agente que su decision hasta el momento es 1 y con probabilidad $1 - p_s$ no cambia 1.
  $$P(s_{t+1} = s \mid s_t = s) = \frac{n-s}{n}(1 - p_s) + \frac{s}{n} p_{s-1}, 0 \leq s \leq n \quad (3)$$
  4. Otro valores de s tiene probabilidad cero.

Caso simétrico: Estado estacionario

- Si $p_s \in (0,1)$ esta cadena es irreducible (i.e., fuertemente conexa) y aperiódica (i.e., con probabilidad positiva el estado puede no cambiar) luego tiene un estado estacionario.
- En estado estacionario la probabiliad de estar en estado s depende de que el periodo anterior el estado era $s-1$ o $s+1$ y aumentó o disminuyó el estado o, era s y no cambio.
- Por ejemplo, si $s=0$:

$$\mu_0 = \mu_0(1-p_0) + \mu_1 \frac{1}{n}(1-p_0) \tag{4}$$

- Se puede demostrar que si μ es el vector de estado estacionario entonces:

$$\frac{\mu_{s+1}}{\mu_s} = (\frac{n-1}{s+1})(\frac{p_s}{1-p_s}) \tag{5}$$

Esta ecuación, más la restricción de μ ser una distribución de probabilidad determinan univocamente la solución.

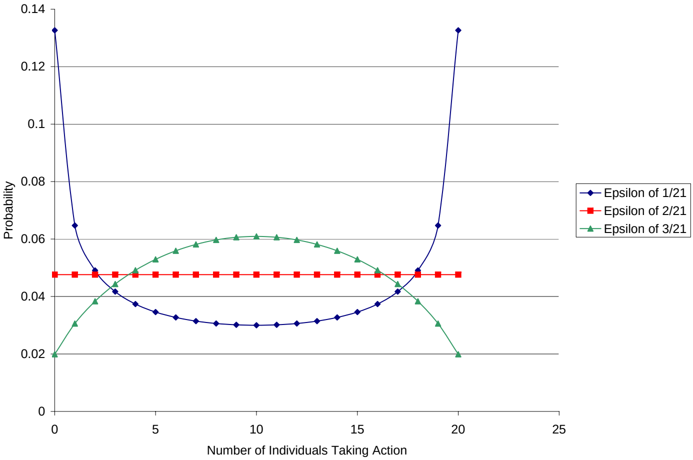
Hormigas, Inversión e Imitación

- Consideremos el modelo de Kirman (1983).
- Cada periodo se elige con una distribución uniforme un agente para tomar una decisión. Con probabilidad ϵ el agente lanza una moneda para elegir $\{0, 1\}$ y con probabilidad $1 - \epsilon$ elige uniformemente otro agente e imita su acción.
- Este es un caso particular del ejemplo anterior con:

$$p_s = \frac{\epsilon}{2} + (1 - \epsilon)\frac{s}{n-1} \tag{6}$$

- Si $\epsilon = 0$ este es un modelo de imitación pura. Si $\epsilon = 1$ es una modelo binomial.
- Una distribución uniforme de estados sociales se obtiene cuando $\mu_{s+1} = \mu_s$, es decir $\epsilon = \frac{2}{n+1}$ (véase figura).

Modelo de imitación de Kirman



Movilidad Social

- Calvo- Armengol y Jackson [2004]: Supongamos que la acción uno es procurar tener educación superior. n es el tamaño de la comunidad (i.e., familias) a la que pertenece.
- Cuano se elige aleatoriamente una familia, se sustituye la familia por un nuevo miembro (recien nacido) de esa familia. Ese recien nacido debe tomar una decisión de procurar o no tener educacón superior.
- Consideremos el caso: $p_s = q$ para $s \geq \tau$ y $p_s = 1 - q$ para $s < \tau$ donde fijamos el umbral $\tau \in \{0, ..., n-1\}$. Es decir con probabilidad q eligen educación superior si al menos τ han elegido eduación superior.
- Véase figura, con $n = 25$ columna de la derecha.

Father/Daughter Education Choices.

data			estimation		
AU	0	1		0	1
0	.903	.033	0	.902	.048
1	.054	.008	1	.048	.003
			q=.95,τ=14		
GR	0	1		0	1
0	.646	.192	0	.648	.157
1	.124	.038	1	.157	.038
			q=.81,τ=15		
UK	0	1		0	1
0	.246	.223	0	.230	.250
1	.254	.278	1	.250	.270
			q=.52,τ=25		

Movilidad Social

- Ahora el estado social es $x(t) \in \{0,1\}^n$, vector que denota en el momento t cual es la decisión de ese momento de cada agente.
- La estructura de red la incorporamos con una matriz de pesos w, $n \times n$. w_{ij} representa la probabilidad de que i tome la misma acción que j tomo el periodo anterior.
- Para hacer el modelo más general podemos introducir $\epsilon(0), \epsilon(1)$ probabilidades de que i elija $0, 1$ respectivamente independientemente de lo que hayan elegido los demás. En este caso:

$$p(x_i(t+1) = 1 \mid x_t) = \epsilon_i(1) + (1 - \epsilon_i(1) - \epsilon_i(0)) \sum_j w_{ij} x_{j(t)} \tag{7}$$

- Kirman es un caso particular: $w_{ij} = \frac{1}{n-1}, j \neq i, j \leq n, \epsilon_i(1) = \epsilon_i(0) = \frac{\epsilon}{2}$.

Juegos Gráficos

- Supongamos que tenemos una red de jugadores (N, g).
- Cada jugagador toma una acción x_i en $\{0, 1\}$.
- La función de utilidad de cada jugador es de la forma: $u_i(x_i, x_{N_i(g)})$, donde $x_{N_i(g)}$ es el perfil de estrategias de los vecinos directos.

Juegos de umbrales de complementos

- $u_i(1, x_{N_i(g)}) \geq u_i(0, x_{N_i(g)})$ si y sólo si: $\sum_{j \in N_i(g)} x_j \geq t_i$ donde t_i es un umbral.
- Equilibrio: un equilibrio de Nash un perfil de estrategias tal que:

$$u_i(1, x_{N_i(g)}) \geq u_i(0, x_{N_i(g)}) \text{ si } x_i = 1, \tag{8}$$

$$u_i(0, x_{N_i(g)}) \geq u_i(1, x_{N_i(g)}) \text{ si } x_i = 0 \tag{9}$$

Juegos de umbrales de complementos: Equilibrios

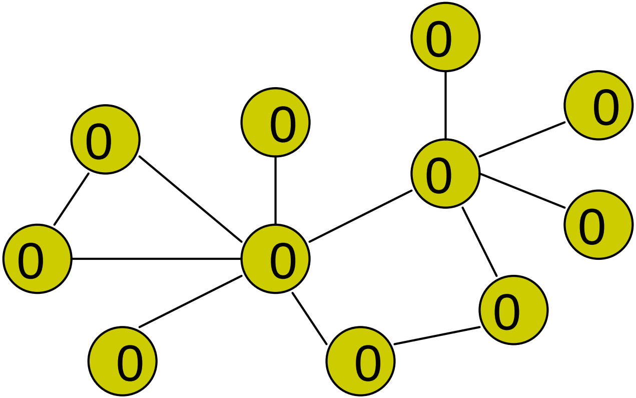


Figure 9.2.2. An Equilibrium in a Game of Complements with Threshold 2.

Juegos de umbrales de complementos: Equilibrios

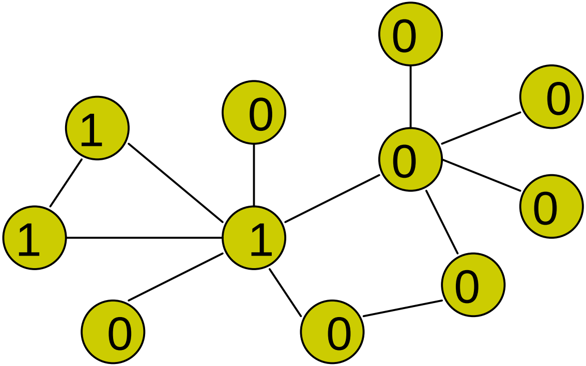


Figure 9.2.2. Another Equilibrium in a Game of Complements with Threshold 2.

Juegos de umbrales de complementos: Equilibrios

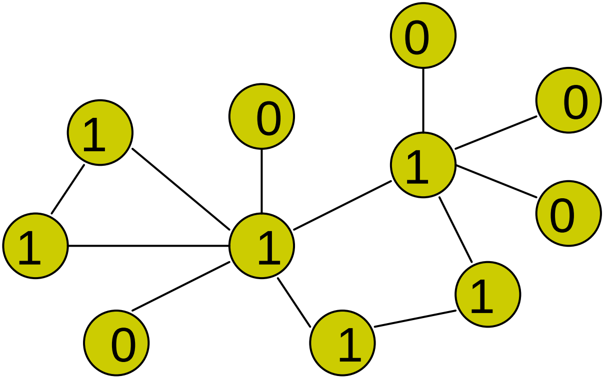


Figure 9.2.2. The ‘Maximal Equilibrium’ in a Game of Complements with Threshold 2.

No siempre existe un equilibrio

- Juego de la moda: dos tipos de jugadores, los conformistas y los rebeldes. En un juego diádico en el que cada conformista esta enlazado con un rebelde, no existe un equilibrio en puras.

Best-Shot Juego Público

- En este caso la función de utilidad es ($c \in (0, 1)$):

$$u_i(1, x_{N_i(g)}) = 1 - c, \qquad (10)$$

$$u_i(0, x_{N_i(g)}) = 1 \text{ si para algun j vecino } x_j = 1, \qquad (11)$$

$$u_i(0, x_{N_i(g)}) = 0 \text{ si i y para todos los vecinos } x_i = 0. \qquad (12)$$

Best-Shot Juego Público

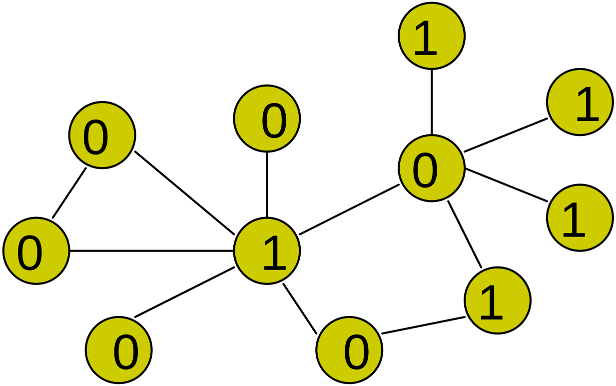


Figure 9.3.3. An Equilibrium in a Best-Shot Public Goods Graphical Game.

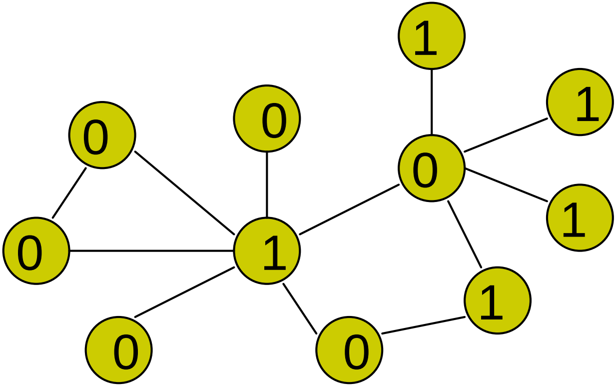


Figure 9.3.3. An Equilibrium in a Best-Shot Public Goods Graphical Game.

Juego Público

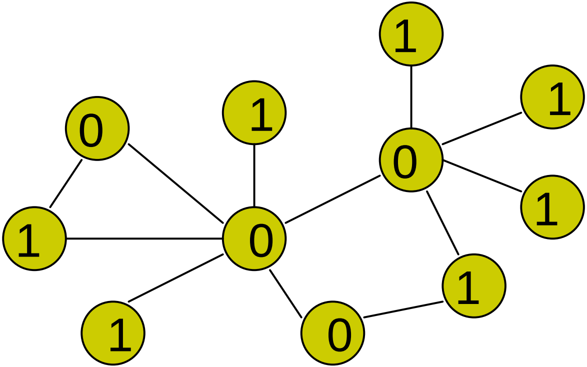


Figure 9.3.3. Another Equilibrium in a Best-Shot Public Goods Graphical Game.

- Considere una red con n nodos en donde cada nodo i es un individuo y toma una decisión $x_i \in R$.
- La función de utilidad es:

$$u_k(x) = -\frac{1}{2}x_k^2 + \alpha x^\top Ax + x_k\epsilon_k. \tag{13}$$

$\epsilon = (\epsilon_i)_{i=1}^n$ es un vector aleatroio.

- Un equilibrio de Nash del juego es un vector $x^* \in R^n$ tal que para todo i, x_i^* maximiza la utilidad de i dadas la acciones de los demás.
- Existencia: si $r(A) < 1/\alpha$,existe un único equilibrio de Nash y es igual a $(I - \alpha A)^{-1}\epsilon$: obsérve que $\partial/(\partial x_k)x^\top Ax = (x^\top A)_k$, luego,

$$x_k = \alpha(x^\top A)_k + \epsilon_k \qquad (k \in n).$$

Usando que A es simétirca $x = \alpha Ax + \epsilon$, el resultado se sigue del lema de Neumann.