

# Sponsored Search Markets

Capítulo 15 de *Networks, Crowds and Markets*  
(Easley & Kleinberg, 2010)

Andrés, Paula y Juan Carlos

Secciones 14.6 – 15.9

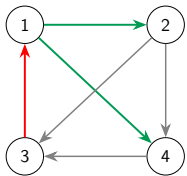
9 de septiembre de 2026

# Agenda

- 1 14.6 Análisis espectral: hubs, autoridades y PageRank
- 2 15.1 Publicidad ligada a la búsqueda
- 3 15.2 La publicidad como mercado de matching
- 4 15.3 El principio VCG en mercados de emparejamiento
- 5 15.4 Decir la verdad como estrategia dominante
- 6 15.5 La subasta de segundo precio generalizada (GSP)
- 7 15.6 Equilibrios de la subasta GSP
- 8 Calidad del anuncio
- 9 Consultas complejas e interacción entre palabras clave
- 10 Precios VCG y la propiedad de vaciado de mercado

## Contexto: ¿por qué necesitamos esta sección?

- Recordemos las **reglas de actualización** de hubs/autoridades (Cap. 14.2) y de PageRank (Cap. 14.3): se iteran una y otra vez, empezando desde un valor inicial arbitrario.
- Hasta ahora solo dijimos que estas iteraciones **convergen** — sin demostrarlo.
- Quedan dos preguntas abiertas:
  - ❶ ¿Converge **siempre**, para cualquier red?
  - ❷ ¿El resultado depende de los **valores iniciales** elegidos?
- Necesitamos una herramienta que nos permita responder ambas preguntas: el **álgebra de matrices y eigenvectores**.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fila 1 de  $M \rightarrow$  hub

$$(0 \quad 1 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = a_2 + a_4$$

enlaces salientes  $\Rightarrow$  hub-score

Fila 1 de  $M^T \rightarrow$  autoridad

$$(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = h_3$$

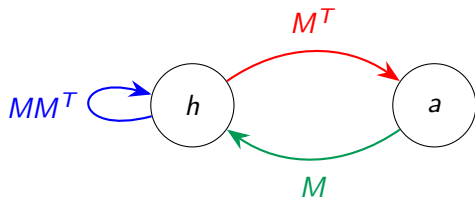
enlaces entrantes  $\Rightarrow$  authority-score

En notación matricial

$$h \leftarrow Ma$$

$$a \leftarrow M^T h$$

# Fusionando el ciclo



- $M^T$ : de  $h$  a  $a$  (autoridad)
- $M$ : de  $a$  a  $h$  (hub)
- $MM^T$ : el ciclo completo, en un solo paso

## Una vuelta completa

$$\underbrace{h^{(k)} = (MM^T)^k h^{(0)}}_{\text{autoridad} \rightarrow \text{hub, repetido } k \text{ veces}}$$

## Iteración desde $h^{(0)} = (1, 1, 1, 1)$

| $k$ | $a^{(k)}$         | $h^{(k)}$         |
|-----|-------------------|-------------------|
| 0   | —                 | $(1, 1, 1, 1)$    |
| 1   | $(1, 1, 2, 2)$    | $(3, 4, 1, 2)$    |
| 2   | $(1, 3, 6, 7)$    | $(10, 13, 1, 6)$  |
| 3   | $(1, 10, 19, 23)$ | $(33, 42, 1, 19)$ |

# Eigenvector: definición y por qué siempre existe

## Definición (14.6)

$$(MM^T) h^* = c h^*$$

$h^*$  no cambia de dirección al multiplicar por  $MM^T$ , solo se estira por el factor  $c$  (el eigenvalor).

*Ejemplo: si  $h^* \approx (1, 1,25, 0, 0,56)$ , entonces  $MM^T h^* \approx 3,25 \cdot h^*$  — mismo factor en las 4 coordenadas.*

### Por qué existe siempre:

- $MM^T$  es **simétrica**  $\Rightarrow$  tiene  $n$  eigenvectores  $z_1, \dots, z_n$  **ortogonales** que forman una base.
- Cualquier vector inicial se escribe como  $h^{(0)} = p_1 z_1 + \dots + p_n z_n$ .
- Al iterar, con  $|c_1| > |c_2| \geq \dots$ :

$$\frac{h^{(k)}}{c_1^k} = p_1 z_1 + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^k p_2 z_2 + \dots \longrightarrow p_1 z_1$$

- Los términos con  $i \geq 2$  se desvanecen  $\Rightarrow$  converge a la dirección de  $z_1$ , sin importar el punto de partida  $h^{(0)}$  (si es positivo).

# PageRank: matriz no simétrica $\Rightarrow$ Teorema de Perron

**Construyendo  $\tilde{N}$ :**  $\tilde{N}_{ij} = s N_{ij} + (1 - s)/n$  — mezcla enlaces reales ( $N$ ) con salto aleatorio uniforme  $\Rightarrow$  elimina los ceros de  $N$ .

## Teorema de Perron (14.6.B)

Si toda entrada de una matriz  $P$  es positiva, entonces:

- 1 Existe un eigenvalor real  $c > 0$  mayor (en valor absoluto) que todos los demás.
- 2 Su eigenvector  $y$  es único y de coordenadas positivas.
- 3 Si  $c = 1$ , cualquier punto de partida converge hacia  $y$ .

## PageRank como paseo aleatorio (14.6.C):

- $\tilde{N}$  (a diferencia de  $MM^T$ ) **no es simétrica**  $\Rightarrow$  no aplica el argumento de la base ortogonal; Perron garantiza la convergencia igual.
- Un usuario salta de página en página siguiendo enlaces al azar. La probabilidad de estar en  $X$  tras  $k$  pasos sigue la misma regla:  $b \leftarrow N^T b$ .
- **Resultado:** esa probabilidad, tras  $k$  pasos, es exactamente el PageRank de  $X$  tras  $k$  actualizaciones — misma cantidad, dos interpretaciones.

## Cap 15. ¿Cuánto vale un clic?

### Precios reales por clic (Google, según el libro)

| Consulta                             | Precio por clic |
|--------------------------------------|-----------------|
| “Keuka Lake”                         | \$1.50          |
| “calligraphy pens”                   | \$1.70          |
| “calligraphy pens” (mal escrita)     | \$0.60          |
| “loan consolidation”, “mesothelioma” | \$50 o más      |

- Incluso una consulta **mal escrita** sigue teniendo valor comercial — el anunciante igual quiere a ese cliente potencial.
- Los slots más **altos** en la página cuestan más: los usuarios hacen clic en ellos con más frecuencia.
- Detrás de estos precios hay una **subasta**, no un precio fijo — eso es lo que exploramos en 15.2.



## El modelo: cost-per-click (CPC)

El anunciante solo paga cuando el usuario hace clic en su anuncio — no por mostrarlo. Un clic revela una intención más fuerte que solo emitir la consulta.

- Con un único slot de anuncio, sería una subasta de un solo ítem (Cap. 9): el precio de segundo precio ya resuelve ese caso.
- El problema real es más difícil: hay **múltiples slots**, y algunos son más valiosos que otros (los de arriba reciben más clics).
- Precio fijo (*posted price*) es inviable: demasiadas palabras clave, con demanda que cambia constantemente.

**Plan:** (1) representar el problema como mercado de *matching* (Cap. 10) → (2) mecanismo VCG  
→ (3) el que se usa en la práctica: GSP

# La publicidad como mercado de matching

## La construcción

$$v_{ij} = r_i \cdot v_j$$

$r_i$ : clickthrough rate del slot  $i$  (clics por hora)

$v_j$ : revenue per click del anunciante  $j$

- Slots = **vendedores**, anunciantes = **compradores** (mercado de matching, Cap. 10).
- Supuesto: el clickthrough rate depende solo del **slot**, no de qué anuncio se muestre ahí.

**Ejemplo (Fig. 15.2):** 3 slots, clickthrough rates  $r = (10, 5, 2)$ ; 3 anunciantes, revenue per click  $v = (3, 2, 1)$ .

| Slot ( $r_i$ ) | Anunciante ( $v_j$ ) |
|----------------|----------------------|
| $a$ (10)       | $x$ (3)              |
| $b$ (5)        | $y$ (2)              |
| $c$ (2)        | $z$ (1)              |

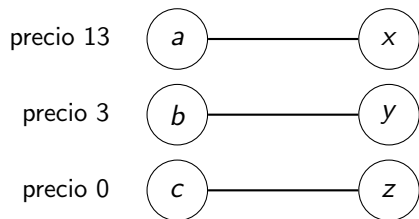
## Construyendo el mercado (Fig. 15.3a)

Matriz de valuaciones  $v_{ij} = r_i \cdot v_j$

|       | Slot a (10) | Slot b (5) | Slot c (2) |
|-------|-------------|------------|------------|
| x (3) | 30          | 15         | 6          |
| y (2) | 20          | 10         | 4          |
| z (1) | 10          | 5          | 2          |

- Es un mercado de matching con **estructura especial**: todos los compradores están de acuerdo en el orden de preferencia de los slots (todos prefieren  $a > b > c$ ).
- Las valuaciones de un comprador son un **múltiplo escalar** de las de otro (columna de  $x = 1.5 \times$  columna de  $y$ ).
- **Resultado clave**: la asignación óptima da el slot de mayor clickthrough al anunciante de mayor revenue-per-click, y así sucesivamente —  $a \rightarrow x$ ,  $b \rightarrow y$ ,  $c \rightarrow z$ .

## 15.2 — Precios de equilibrio (Fig. 15.3b)



**Cómo se obtienen** — nadie debe querer cambiarse de slot:

**Ancla:**  $c$  es el menos deseado  $\Rightarrow p_c = 0$

$z$  indiferente entre  $b$  y  $c$ :

$$5 - p_b = 2 - 0 \Rightarrow p_b = 3$$

$y$  indiferente entre  $a$  y  $b$ :

$$20 - p_a = 10 - 3 \Rightarrow p_a = 13$$

Pago neto:  $x$ :  $30 - 13 = 17$      $y$ :  $10 - 3 = 7$      $z$ :  $2 - 0 = 2$

Nadie preferiría cambiarse — el mercado está en equilibrio, y coincide con la asignación que maximiza el bienestar total.

## Contexto: mercados de emparejamiento

- Recordemos los **mercados de emparejamiento** (Cap. 10): un conjunto de compradores y un conjunto de vendedores (objetos), conectados por un grafo bipartito de valoraciones.
- Cada comprador  $i$  tiene una valoración  $v_{ij}$  por el objeto  $j$ .
- El objetivo del mercado es encontrar una **asignación óptima**: aquella que maximiza el **bienestar social** (suma total de valoraciones de los objetos asignados).
- Problema: si los compradores reportan sus valoraciones, ¿tienen incentivos para **mentir**?
- Necesitamos un mecanismo de pagos que induzca a los participantes a revelar sus valoraciones **verdaderas**.

# La idea central: cobrar por la externalidad causada

## Principio VCG (Vickrey–Clarke–Groves)

Cada comprador ganador debe pagar exactamente el **daño (externalidad)** que su presencia genera sobre el bienestar del resto de los participantes.

- Si un comprador no afecta a nadie más al participar, no debería pagar nada extra.
- Si su presencia le “quita” valor a otros (por ejemplo, gana un objeto que otro hubiera querido), debe compensar esa pérdida.
- Esta idea generaliza la subasta de **segundo precio** de un solo objeto a mercados con múltiples compradores y vendedores.

## Definición formal del pago VCG

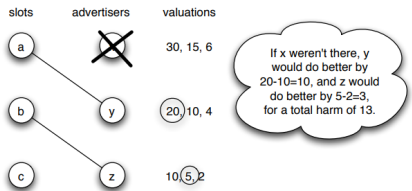
Sea  $S$  el conjunto de vendedores y  $B$  el conjunto de compradores. Por lo que,  $V_B^S$  sería la máxima valoración total sobre todas las posibles asignaciones perfectas entre  $S$  y  $B$ . Es decir, el óptimo social con todos los compradores y vendedores presentes.

Pago VCG del comprador  $j$  por el objeto  $i$

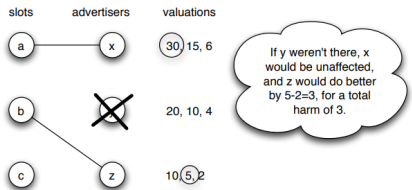
$$p_{ij} = V_{B-j}^S - V_{B-j}^{S-i}$$

- $V_{B-j}^S$  : Si el comprador  $j$  se remueve, es la mejor valoración total que el resto de compradores podría alcanzar.
- $V_{B-j}^{S-i}$  : Si damos item  $i$  a vendedor  $j$ , es la mejor valoración total que el resto de compradores podría alcanzar.
- El daño total causado por comprador  $j$  sería la diferencia entre la valoración sin  $j$  presente y cuando  $j$  está presente.

# Ejemplo ilustrativo



(a) Determining how much better off y and z would be if x were not present



(b) Determining how much better off x and z would be if y were not present

Figura: 15.4



## ¿Por qué conviene reportar la valoración verdadera?

### Premisa que se desea probar

Si los ítems se asignan y los precios se calculan según el procedimiento VCG, anunciar con veracidad las valoraciones constituye una estrategia dominante para cada comprador, y la asignación resultante maximiza la valoración total de cualquier emparejamiento perfecto entre compradores y vendedores.

La segunda parte de la premisa resulta ser tautológica: **que la valoración total se maximiza.**

## Argumento de la estrategia dominante

Suponga que el comprador  $j$  anuncia su valoración diciendo la verdad y que en el emparejamiento se le asigna el ítem  $i$ . Entonces, su pago debe ser  $v_{ij} - p_{ij}$ .

El objetivo es demostrar que el comprador  $j$  no tiene incentivos a desviarse. Si lo hace, existen dos posibilidades:

- Miente, pero sigue obteniendo el mismo ítem  $i$ .
- Miente y el ítem que recibe ahora es  $h$  en lugar de  $i$ .

### Primer caso

Su pago se mantiene igual. No sería estratégico mentir. Para que mentir resulte beneficioso, tiene que afectar al artículo que recibe.

### Segundo caso

En este caso su pago sería  $v_{hj} - p_{hj}$ . Si realmente es beneficioso, entonces  $v_{ij} - p_{ij} < v_{hj} - p_{hj}$

## Demostración segundo caso

Para mostrar que no tiene incentivos a mentir, se debe cumplir que:  $v_{ij} - p_{ij} \geq v_{hj} - p_{hj}$

- $v_{ij} - [V_{B-j}^S - V_{B-j}^{S-i}] \geq v_{hj} - [V_{B-j}^S - V_{B-j}^{S-h}]$
- $v_{ij} + V_{B-j}^{S-i} \geq v_{hj} + V_{B-j}^{S-h}$
- El lado izquierdo de la ecuación se puede reescribir como:  $v_{ij} + V_{B-j}^{S-i} = V_B^S$
- El lado derecho de la ecuación se puede reescribir como:  $v_{hj} + V_{B-j}^{S-h} \leq V_B^S$

### Resultado

El lado izquierdo, la valoración máxima, sin restricciones sobre quién obtiene cada ítem, debe ser al menos igual que el lado derecho. Es decir, el máximo con una restricción.

**Y esto es precisamente lo que queríamos demostrar**

# Definición de la subasta GSP

## Mecanismo de la Subasta de Segundo Precio Generalizada

- 1 Cada anunciante  $i$  envía una oferta (bid)  $b_i$  por clic.
- 2 Los anunciantes se ordenan de mayor a menor oferta y se asignan a los slots en ese orden: la oferta más alta obtiene el slot 1, la segunda más alta el slot 2, etc.
- 3 El anunciante en el slot  $j$  **paga, por cada clic**, la oferta del anunciante inmediatamente **debajo** de él (en el slot  $j + 1$ ).

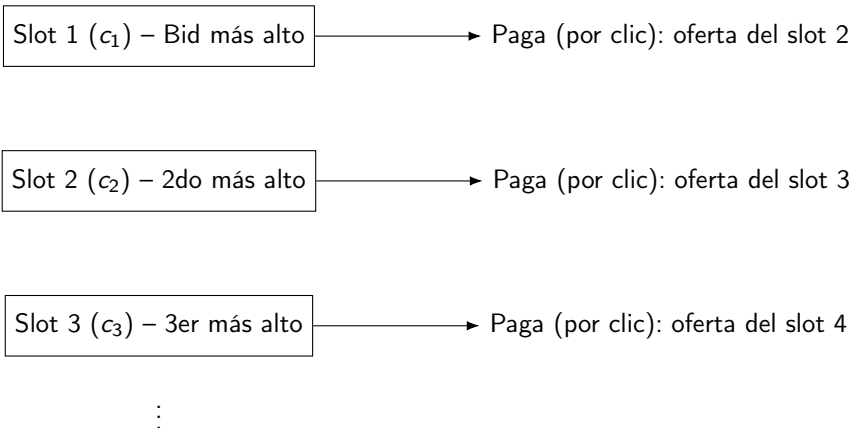
## Precio cobrado

Si los bids por clic ordenados en forma decreciente son  $b_1, b_2, b_3, \dots$ , entonces el precio *total* por el slot  $i$  es

$$r_i b_{i+1}$$

donde  $r_i$  es el clickthrough rate del slot  $i$ .

# Diagrama del mecanismo



- Ambos piden valoraciones anunciadas y determinan asignación + precios.
- Con un solo slot, **ambos coinciden** con el second-price auction clásico.
- Con múltiples slots, **difieren**:
  - VCG:  $p_{ij} = V_{B-j}^S - V_{B-j}^{S-i}$  (Ecuación 15.1)
  - GSP: precio del slot  $i$  es  $r_i b_{i+1}$
- GSP fue desarrollado originalmente en Google; su análisis formal se debe a Varian, y a Edelman, Ostrovsky y Schwarz.

## Ejemplo: la veracidad puede fallar (Fig. 15.6)

- Dos slots reales:  $r_a = 10$ ,  $r_b = 4$ .
- Slot ficticio  $c$ :  $r_c = 0$ .
- Anunciantes  $x, y, z$  con valores por clic 7, 6, 1.

| CTR | slot | valor/clic |
|-----|------|------------|
| 10  | $a$  | $x : 7$    |
| 4   | $b$  | $y : 6$    |
| 0   | $c$  | $z : 1$    |

# La veracidad no es un equilibrio

Si todos anuncian su valor real:

- $x$  gana el slot  $a$  a precio por clic 6 (bid de  $y$ )  $\Rightarrow$  pago total  $6 \cdot 10 = 60$ .
- Valoración de  $x$  por el slot  $a$ :  $7 \cdot 10 = 70$ .
- **Payoff de  $x$** :  $70 - 60 = 10$ .

## Desviación rentable

Si  $x$  baja su bid a 5, obtiene el slot  $b$  a precio por clic 1 (bid de  $z$ )  $\Rightarrow$  pago total  $1 \cdot 4 = 4$ .

$$\text{Valoración de } x \text{ por } b = 7 \cdot 4 = 28 \quad \Rightarrow \quad \text{Payoff} = 28 - 4 = 24 > 10$$

$\Rightarrow$  Anunciar el valor verdadero **no** es óptimo para  $x$ .



# Múltiples equilibrios

Con el mismo ejemplo, existen **varios** conjuntos de bids en equilibrio de Nash:

## Equilibrio socialmente óptimo

x ofrece 5, y ofrece 4, z ofrece 2.

$$x \rightarrow a, \quad y \rightarrow b, \quad z \rightarrow c$$

(Coincide con el orden de los valores reales:  $7 > 6 > 1$ .)

## Equilibrio socialmente **no** óptimo

x ofrece 3, y ofrece 5, z ofrece 1.

$$y \rightarrow a, \quad x \rightarrow b, \quad z \rightarrow c$$

Aquí y (con menor valor) queda en el slot superior.

## Ingresos del buscador GSP vs. VCG

Usando las valoraciones totales por slot (Figura 15.7):  $x : 70, 28, 0$ ;  $y : 60, 24, 0$ ;  $z : 10, 4, 0$ .

- **Equilibrio 1 de GSP** (bids 5, 4, 2):

$$10 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 48$$

- **Equilibrio 2 de GSP** (bids 3, 5, 1):

$$10 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 34$$

- **VCG** (asignación óptima  $x \rightarrow a, y \rightarrow b, z \rightarrow c$ ):

$$p_a = (60 - 24) + (4 - 0) = 40, \quad p_b = 4, \quad p_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Total} = 44$$

### Conclusión

El ingreso de GSP puede ser **mayor** (48) o **menor** (34) que el de VCG (44), dependiendo del equilibrio elegido.

## Construcción del equilibrio: idea general

- A pesar de sus patologías, GSP tiene una conexión natural con los **market-clearing prices**
- Anunciantes  $1, \dots, n$  ordenados en orden decreciente de valor por clic  $v_j$ .
- Slots  $1, \dots, n$  ordenados en orden decreciente de  $r_i$  (agregando slots ficticios de valor 0 si es necesario).
- Sea  $p_1, \dots, p_n$  un conjunto de **market-clearing prices** (totales, por todos los clics del slot).
- Se define el precio por clic:

$$p_j^* = \frac{p_j}{r_j}$$

# Los precios por clic son decrecientes

## Afirmación

$$p_1^* \geq p_2^* \geq \dots \geq p_n^*$$

**Idea de la prueba:** si  $j < k$ , como los precios vacian el mercado, el anunciante  $k$  prefiere (débilmente) el slot  $k$  al slot  $j$ :

$$(v_k - p_k^*) r_k \geq (v_k - p_j^*) r_j$$

Como  $r_j \geq r_k$  pero  $k$  aun así prefiere su slot, se concluye que el payoff por clic en  $j$  debe ser menor, es decir  $p_j^* \geq p_k^*$ .

# Construcción de los bids

Dado que  $p_1^* \geq p_2^* \geq \dots \geq p_n^*$ , se definen los bids:

$$b_j = p_{j-1}^* \quad \text{para } j > 1, \quad b_1 > p_1^* \text{ (cualquier valor mayor)}$$

Con estos bids:

- El anunciante  $j$  queda asignado al slot  $j$ .
- Paga un precio por clic de  $p_j^*$ .
- Esto reproduce exactamente los market-clearing prices y la asignación socialmente óptima.

## ¿Por qué es un equilibrio de Nash? (I) — Bajar el bid

**Ningún anunciante quiere bajar su bid.**

Si el anunciante  $j$  baja su bid para obtener un slot inferior  $k$ :

- Lo mejor que puede lograr es el slot  $k$  al precio que *actualmente* paga el anunciante  $k$ .
- Como los precios vacían el mercado,  $j$  ya prefiere (débilmente) su slot actual a esa alternativa.

⇒ No hay incentivo a bajar el bid.

## ¿Por qué es un equilibrio de Nash? (II) — Subir el bid

**Ningún anunciante quiere subir su bid.**

Si el anunciante  $j$  sube su bid para obtener un slot superior  $i$ :

- Desplaza al anunciante  $i$  un lugar hacia abajo.
- Debe pagar el bid *actual* del anunciante  $i$ , que es **mayor** al precio que  $i$  paga actualmente por ese slot.
- Como  $j$  ya prefiere su slot actual al slot  $i$  *al market-clearing price*, con mayor razón lo prefiere frente a un precio más alto.

⇒ No hay incentivo a subir el bid.

**Conclusión:** el conjunto de bids construido es un equilibrio de Nash.

## Teorema

Para todo mercado de anunciantes y slots, existe al menos un conjunto de bids en equilibrio de Nash para GSP que:

- Reproduce los precios que vacian el mercado.
- Produce la asignación que **maximiza la valoración social total**.



## El supuesto de la tasa de clics fija

- Hasta ahora asumimos que cada posición  $j$  tiene una tasa de clics fija  $r_j$ , sin importar qué anuncio se coloque ahí.
- En la práctica, el usuario decide si hace clic según el propio anuncio (texto, reconocimiento de marca, relevancia).
- Riesgo para el buscador: un anunciante de **baja calidad** puede ganar la primera posición con una puja alta, pero generar pocos clics.
  - El buscador cobra por clic, no por impresión  $\Rightarrow$  pierde ingresos.
- Este era, esencialmente, el modelo puro de GSP usado por Overture / Yahoo!.

## El factor de calidad $q_j$

- Google introduce un **factor de calidad estimado**  $q_j$  para cada anunciante  $j$ .
- Si  $j$  ocupa la posición  $i$ , la tasa de clics real se estima como

$$q_j r_i \quad (\text{en vez de } r_i)$$

- Generalización natural del modelo: si  $q_j = 1$  para todos, recuperamos el modelo original.
- En el mercado de emparejamiento, la valoración cambia de

$$v_{ij} = r_i v_j \quad \longrightarrow \quad v_{ij} = q_j r_i v_j$$

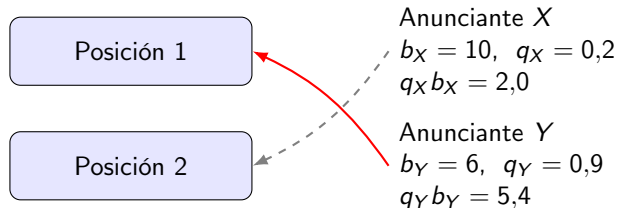
- El resto del análisis (precios de equilibrio, VCG, etc.) se mantiene igual usando estas nuevas valoraciones.

- Los anunciantes ya **no** se ordenan por su puja  $b_j$ , sino por el producto

$$q_j b_j$$

- Tiene sentido: este producto refleja el **ingreso esperado** para el buscador.
- Regla de pago generalizada: cada anunciante paga **el mínimo necesario para conservar su posición actual**, ahora medido según  $q_j b_j$ .
- Los resultados y el análisis previo de GSP se extienden (con más complejidad) a esta versión generalizada.

## Ejemplo: la calidad del anuncio cambia el orden



- X puja más alto ( $b_X = 10$ ), pero tiene baja calidad ( $q_X = 0,2$ ).
- Y puja menos ( $b_Y = 6$ ), pero tiene alta calidad ( $q_Y = 0,9$ ).
- Con GSP puro, X ganaría la Posición 1.
- Con calidad, se ordena por  $q_j b_j$ : Y (5,4) supera a X (2,0).
- Resultado: Y pasa a la Posición 1 y X a la Posición 2.

# La naturaleza misteriosa de la calidad del anuncio

- ¿Cómo se calcula  $q_j$ ?
  - Principalmente observando la tasa de clics real del anuncio.
  - También: relevancia del texto del anuncio y de la *landing page*.
- Los buscadores mantienen esta fórmula **en secreto**, igual que el algoritmo de resultados orgánicos.
- Consecuencia: el mercado se vuelve **opaco** para los anunciantes.
  - Con GSP puro, el orden final era predecible a partir de las pujas.
  - Con  $q_j$  controlado por el buscador, este tiene un poder casi ilimitado para influir en el orden.
- Pregunta abierta de investigación: ¿cómo cambia el comportamiento del mercado cuando las reglas de asignación no son públicas?

# El problema del anunciante

- En la realidad hay millones de mercados simultáneos (uno por cada palabra o frase).
- Ejemplo: una agencia de viajes de esquí a Suiza podría pujar por:
  - “Switzerland”, “Swiss vacation”, “Swiss hotels”, “Alps”, “ski vacation”...
- Con un presupuesto fijo, ¿cómo repartirlo entre todas estas palabras clave relacionadas?
- Problema difícil y aún en investigación activa.

# El problema del buscador

- Ejemplo: un usuario busca *“Zurich ski vacation trip December”*.
- Es probable que:
  - nadie haya buscado exactamente esa frase antes, y
  - ningún anunciante haya pujado exactamente por ella.
- Si el buscador solo pudiera mostrar anuncios para frases exactamente pujadas  $\Rightarrow$  pérdida de ingresos para ambas partes.
- Una regla simple (mostrar al mayor postor de *cualquier* palabra de la consulta) **falla**: mezclaría anunciantes de “vacation” genérico con los de “ski” sin relación real con la consulta específica.

# Extrapolar pujas a consultas complejas

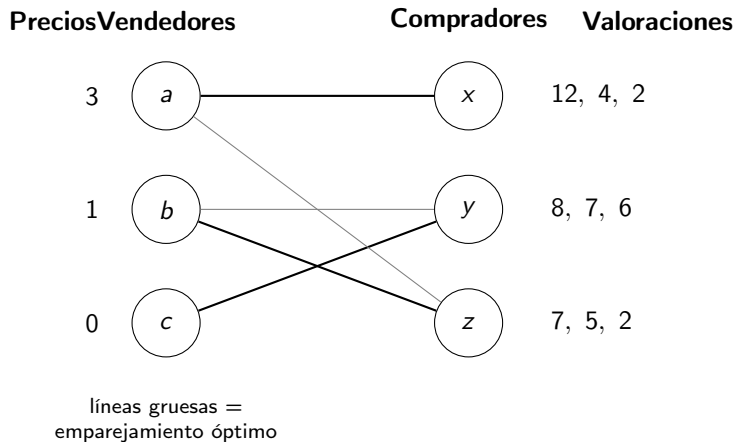
- Incluso si se identifican los anunciantes relevantes: ¿cuánto cobrarles si nunca pujaron exactamente por esa consulta?
- Los buscadores suelen pactar con los anunciantes **extrapolar** sus pujas de palabras conocidas a consultas más complejas.
- La forma óptima de hacer esta extrapolación **no está completamente resuelta**.
- Tema activo de investigación, tanto en la industria como en la academia.



## Dos formas de asignar precios

- **Precios VCG:** se calculan *después* de fijar el emparejamiento óptimo; son **personalizados** (dependen de quién compra qué).
- **Precios de vaciado de mercado:** se fijan *primero*, son **precios públicos** iguales para cualquier comprador interesado.
- Pregunta central de esta sección:  
*¿Qué relación hay entre estos dos enfoques, aparentemente tan distintos?*
- Los ejemplos sugieren algo sorprendente: ¡a veces coinciden!

# Un ejemplo



Precio VCG de  $a$ :  $14 - 11 = 3 \Rightarrow$  coincide con el precio de vaciado del mercado.

## Un ejemplo

- Mercado con vendedores  $a, b, c$  y compradores  $x, y, z$ , con un emparejamiento óptimo indicado.
- Precio VCG para el artículo  $a$ :
  - Sin  $a$  ni  $x$ : valoración total máxima = 11.
  - Con  $a$  presente (sin  $x$ ): valoración total máxima = 14.
  - Precio VCG de  $a$ :  $14 - 11 = 3$ .
- Haciendo lo mismo para  $b$  y  $c$  se obtienen 1 y 0.
- Resultado: estos precios VCG **coinciden exactamente** con los precios de vaciado de mercado del Capítulo 10.

## Afirmación (Leonard; Demange)

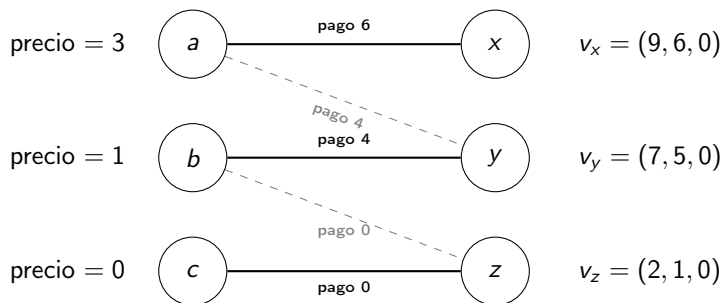
En cualquier mercado de emparejamiento, los precios VCG forman el **único conjunto de precios de vaciado de mercado de suma total mínima**.

- Es decir: entre todos los posibles precios de vaciado de mercado, los VCG son los “más bajos posibles” en conjunto.
- La demostración descansa en **dos hechos clave** sobre la estructura del grafo de vendedor preferido.

## Antes del Hecho 1: ¿qué es un camino alternante?

- **Arista de emparejamiento (matching edge):** conecta a un vendedor con el comprador que efectivamente recibe su artículo en el emparejamiento óptimo actual.
- **Arista de no-emparejamiento (non-matching edge):** cualquier otra arista del *grafo de vendedor preferido* (es decir, el comprador está empatado en su pago máximo con ese artículo, pero no fue el que se le asignó).
- **Camino alternante:** una secuencia de aristas que va alternando estrictamente entre arista de no-emparejamiento y arista de emparejamiento.
- Ejemplo de referencia:
  - Vendedores  $a, b, c$ ; compradores  $x, y, z$ .
  - Valoraciones:  $x = (9, 6, 0)$ ,  $y = (7, 5, 0)$ ,  $z = (2, 1, 0)$  para  $(a, b, c)$ .
  - Emparejamiento óptimo:  $x \rightarrow a$ ,  $y \rightarrow b$ ,  $z \rightarrow c$  (valoración total =  $9 + 5 + 0 = 14$ ).
  - Precios de vaciado de mercado mínimos:  $p_a = 3$ ,  $p_b = 1$ ,  $p_c = 0$ .

## Ejemplo gráfico: los dos tipos de arista



- Arista de **emparejamiento** (asignación óptima actual)
- - - Arista de **no-emparejamiento** (empate en pago, sin recibir el ítem)

Nota:  $y$  está empatada entre  $a$  y  $b$  (pago = 4 en ambos);  $z$  está empatada entre  $b$  y  $c$  (pago = 0 en ambos). Estos empates son justamente los que generan las aristas de no-emparejamiento.

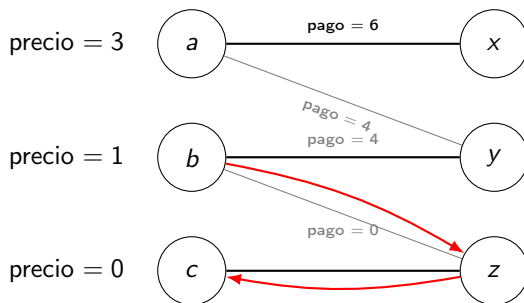
## Idea clave: Hecho 1 (anclaje a precio cero)

### Hecho 1 (idea intuitiva)

En el grafo de vendedor preferido de precios de vaciado de mercado *mínimos*, todo artículo con precio  $> 0$  tiene un **camino alternante** que lo conecta con algún artículo de precio 0.

- Intuición: si un artículo estuviera “flotando libre” sin conexión a precios cero, se podría bajar aún más su precio y seguir teniendo un emparejamiento perfecto.
- Esto contradiría que los precios ya eran de **suma mínima**.
- Estas conexiones “anclan” los precios altos a los precios más bajos posibles.

## Ejemplo: aplicando el Hecho 1



Camino alternante desde  $b$  (precio 1) hasta  $c$  (precio 0):

$$b \xrightarrow{\text{no-emp.}} z \xrightarrow{\text{emp.}} c$$

$z$  está empatada entre  $b$  y  $c$  (pago = 0 en ambos)  $\Rightarrow$  existe la arista no-emparejadora  $b$ - $z$ .



## Idea clave: Hecho 2 (anular a un comprador)

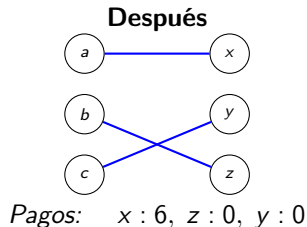
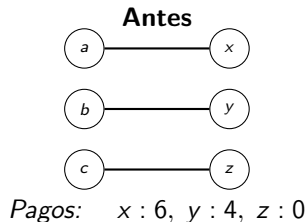
### Hecho 2 (idea intuitiva)

Si se “anula” (*zero out*) a un comprador  $j$  —haciendo que valore todo en 0— los mismos precios de vaciado de mercado **siguen siendo válidos** para este nuevo mercado.

- Además:  $j$  termina recibiendo un artículo de precio 0.
- Y el resto de los compradores mantienen exactamente el mismo *payoff* que antes.
- Este hecho se apoya directamente en el Hecho 1 (siguiendo el camino alternante hasta el artículo de precio cero).

## Ejemplo visual: aplicando el Hecho 2

Anulamos al comprador  $y$ , originalmente asignado a  $b$ .



### Aplicación del Hecho 2

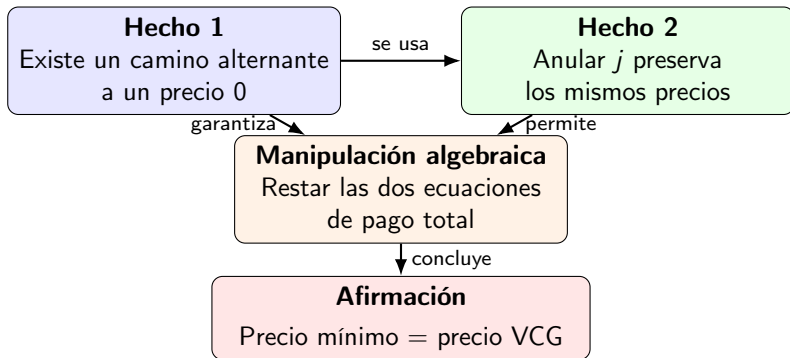
Los compradores **no anulados** conservan sus precios:

$$p_x = 6, \quad p_z = 0.$$

El comprador  $y$  queda anulado y paga 0.

El reacomodo sigue el camino alternante  $b - z - c - y$ , permitiendo construir el nuevo emparejamiento.

## Mapa de la demostración: ¿cómo se conecta todo?



### Idea central

Existencia del camino  $\longrightarrow$  validez del nuevo emparejamiento  $\longrightarrow$  igualdad de precios

# De los hechos al resultado

- Usando el Hecho 2, se compara:
  - el pago total en el mercado original, y
  - el pago total en el mercado con  $j$  anulado.
- Combinando esto con la fórmula VCG original:

$$p_i = V_{B-j}^S - V_{B-j}^{S-i}$$

- se llega, tras manipulación algebraica, a que estos precios de suma mínima son **exactamente** los precios VCG.
- Conclusión: dos ideas de precios muy distintas en su definición terminan siendo, en el fondo, **la misma cosa**.

## ¿Qué pasa? Paso a paso

Sea  $Z$  el pago total (suma de payoffs) de todos los compradores,  $P$  la suma de todos los precios, y  $V_B^S$  la valoración total óptima. Si  $j$  recibe el ítem  $i$  con payoff  $z_j = v_{ij} - p_i$ :

**Paso 1 — mercado original:**

$$Z = V_B^S - P$$

**Paso 2 — mismo mercado, pero con  $j$  anulado (Hecho 2):** mismos precios  $P$ ;  $j$  ahora paga payoff 0; el resto no cambia.

$$Z - z_j = V_{B-j}^S - P$$

**Paso 3 — restar ambas ecuaciones:**

$$z_j = V_B^S - V_{B-j}^S$$

**Paso 4 — usar que  $V_B^S = v_{ij} + V_{B-j}^{S-i}$**  (emparejar  $i$  con  $j$  y optimizar el resto):

$$\underbrace{v_{ij} - p_i}_{z_j} = v_{ij} + V_{B-j}^{S-i} - V_{B-j}^S$$

**Paso 5 — cancelar  $v_{ij}$  y despejar  $p_i$ :**

$$p_i = V_B^S - V_{B-j}^{S-i}$$

## Recordando la afirmación

Los precios VCG forman el **único conjunto de precios de vaciado de mercado de suma total mínima**.

- Partimos de precios de vaciado de mercado **de suma mínima** (por definición, no elegidos al azar).
- El Hecho 1 nos dio la estructura (camino alternantes) necesaria para manipular el mercado sin romper el equilibrio.
- El Hecho 2 nos permitió comparar el mercado original con uno donde  $j$  no compite.
- El álgebra mostró que el precio resultante de esa comparación es **exactamente**  $p_i = V_{B-j}^S - V_{B-j}^{S-i}$ : la fórmula VCG.

⇒ **Precios de vaciado de mercado mínimos  $\equiv$  Precios VCG.**

Dos definiciones muy distintas, un mismo objeto matemático.

# ¡Gracias!

Referencia: Easley, D. y J. Kleinberg (2010). *Networks, Crowds and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*. Cap. 15.