Emparejamiento

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes y Quantil

Noviembre de 2023

Contenido

Introducción

- Mercados de dos lados: Trabajadores y empresas, médicos y hospitales, estudiantes, escuelas públicas, donantes y receptores de riñones, vendedores y compradores de acciones, plataformas digitales.
- Mercados de un lado: estudiantes y dormitorios universitarios, subastas o licitaciones.
- En la mayoría de los casos no existe un mercado organizado y usar tranferencias monetarias no es ético.
- Comenzamos estudiando los mercados en los cuales no hay una transferencia de dinero.
- Es un ejemplo exitoso de la aplicación de la teoría de juegos.

Mercado de matrimonios

- Sea $M = \{m_1, ...m_n\}$ y $W = \{w_1, ...w_p\}$ el conjunto de hombres y mujeres.
- Cada hombre (o mujer) tienen unas preferencias por el otro grupo incluyendo una preferencia por estar solo (i.e., preferecias racionales: completas y transitivas). Denotamos por $P(m) = w_{i_1}, ..., m, ..., w_{i_n}$ las preferencias de m de mayor a menor.
- Cuando hay indiferencia, por ejemplo entre w_{i_2} e w_{i_3} lo denotamos por $P(m) = w_{i_1}, [w_{i_2}, w_{i_3}]..., m, ..., w_{i_n}$.
- También usamos $>_m$ y $\geq_m$ como preferencias estrictas o débiles.
- El conjunto de preferencias se denota por $P = \{P(m_1), ..., P(m_n), P(w_1), ..., P(w_p)\}$
- Un mercado de matrimonios es (M, W, P).
- Una mujer w es aceptable para m si $w \geq_m m$.

Emparejamiento

Definition (Emparejamiento y Racionalidad Individual)

Una función 1-1 $\mu : M \cup W \to M \cup W$ tal que $\mu^2 = id$ y si $\mu(m) \neq m$, entonces $\mu(m) \in W$ (similar para las mujeres).

- Decimos que $\mu(m)$ es la pareja de m.
- Ejemplo:

$$\mu = \begin{matrix} w_4 & w_1 & w_2 & w_3 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix}$$

Definition (Racionalidad Individual)

μ es individualmente racional si cada agente es aceptable para su pareja (i.e., si ningún agente bloquea de forma unilateral el emparejamiento).

Emparejamiento

Definition (Estabilidad)

Un emparejamiento μ estable si no es bloqueado por ningún agente o pareja de agentes (i.e., μ es bloqueado por una pareja (m, w) si ambos prefieren estar emparejados a estar con la pareja que les corresponde en el emparejamiento μ: $m >_w \mu(w), w >_m \mu(m)$).

Emparejamiento

Example (Estabilidad)

Example 2.4
There are three men and three women, with the following preferences.

$$P(m_1) = w_2, w_1, w_3 \qquad P(w_1) = m_1, m_3, m_2$$
$$P(m_2) = w_1, w_3, w_2 \qquad P(w_2) = m_3, m_1, m_2$$
$$P(m_3) = w_1, w_2, w_3 \qquad P(w_3) = m_1, m_3, m_2$$

All possible matchings are individually rational (since all pairs (m, w) are mutually acceptable). The matching μ given by:

$$\mu = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{matrix}$$

is unstable, since (m_1, w_2) is a blocking pair. However the matching

$$\mu' = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{matrix}$$

is stable.

El emparejamiento estable corresponde al algortimo de aeptación diferida en el que la mujer propone.

Contenido

Variaciones simples del modelo

- El anterior modelo nos permite desarrollar una teoría (i.e., para el mercado de matrimonios) sobre emparejamientos estables.
- Pero antes veamos algunos ejemplos de lo que puede salir mal en situaciones muy similares al modelo de emparejamiento propuesto.

El poblema de los compañeros de habitación - Gale y Shapley

- Tenemos n (par) personas que hay que emparejar para que ocupen $\frac{n}{2}$ habitaciones.
- Cada persona tiene preferencias sobre los otros $n-1$.
- En este caso un resultado (i.e., emparejamiento) es estable si no existen dos personas que no estén emparejadas que ambas prefieran estar juntas a estar con las pareja que les toco.

El problema de los compañeros de habitación

- Suponga que $n = 4$ y las preferencias son de la forma:

$$p(a) = b, c, d \tag{1}$$
$$p(b) = c, a, d \tag{2}$$
$$p(c) = a, b, d \tag{3}$$
$$p(d) = \text{arbitario} \tag{4}$$

- No puede existir un emparejamiento estable porque alguien debe quedar con d y esa persona es el preferido de alguno de los otros dos. Entonces ese par bloquearían el emparejamiento.

- Existen tres tipos de personas: padres, madres e hijos.
- Cada tipo de personas tiene preferencias por el conjunto de parejas de las otras dos.
- Un emparejamiento es la conformación de una familia: padre, madre y un solo hijo.
- Un conjunto (m, w, c) bloquea un emparejamiento si cada uno de los miembros de este conjunto prefiere conformar esta familia, a la familia con la que están en el emparejados.

El poblema de conformar una familia - Alkan

- Supongamos un caso en el que tenemos tres hombres, tres mujeres y tres hijos.
- Las preferencias son de la forma:

$$P(m_1) = (w_1, c_3), (w_2, c_3), (w_1, c_1), \dots \text{(arbitrary)}$$
$$P(m_2) = (w_2, c_3), (w_2, c_2), (w_3, c_3), \dots \text{(arbitrary)}$$
$$P(m_3) = (w_3, c_3), \dots \text{(arbitrary)}$$
$$P(w_1) = (m_1, c_1), \dots \text{(arbitrary)}$$
$$P(w_2) = (m_2, c_3), (m_1, c_3), (m_2, c_2), \dots \text{(arbitrary)}$$
$$P(w_3) = (m_2, c_3), (m_3, c_3), \dots \text{(arbitrary)}$$
$$P(c_1) = (m_1, w_1), \dots \text{(arbitrary)}$$
$$P(c_2) = (m_2, w_2), \dots \text{(arbitrary)}$$
$$P(c_3) = (m_1, w_3), (m_2, w_3), (m_1, w_2), (m_3, w_3), \dots \text{(arbitrary)}.$$

There is no stable matching in this example. In fact,

1. All matchings that give m_1 (respectively m_2 and w_2) a better family than (m_1, w_1, c_1) (respectively (m_2, w_2, c_2)) are unstable.

El poblema de conformar una familia - Alkan

- Las preferencias son de la forma:

$$P(m_1) = (w_1, c_3), (w_2, c_3), (w_1, c_1), \ldots \text{ (arbitrary)}$$
$$P(m_2) = (w_2, c_3), (w_2, c_2), (w_3, c_3), \ldots \text{ (arbitrary)}$$
$$P(m_3) = (w_3, c_3), \ldots \text{ (arbitrary)}$$
$$P(w_1) = (m_1, c_1), \ldots \text{ (arbitrary)}$$
$$P(w_2) = (m_2, c_3), (m_1, c_3), (m_2, c_2), \ldots \text{ (arbitrary)}$$
$$P(w_3) = (m_2, c_3), (m_3, c_3), \ldots \text{ (arbitrary)}$$
$$P(c_1) = (m_1, w_1), \ldots \text{ (arbitrary)}$$
$$P(c_2) = (m_2, w_2), \ldots \text{ (arbitrary)}$$
$$P(c_3) = (m_1, w_3), (m_2, w_3), (m_1, w_2), (m_3, w_3), \ldots \text{ (arbitrary).}$$

There is no stable matching in this example. In fact,

1. All matchings that give m_1 (respectively m_2 and w_2) a better family than (m_1, w_1, c_1) (respectively (m_2, w_2, c_2)) are unstable.

- Obsérvese que si en un emparejamiento se conforma la familia (m_1, w_1, c_3) o (m_2, w_2, c_3) este emparejamiento es bloqueado por (m_3, w_3, c_3) y (m_1, w_2, c_3) es bloqueado por (m_2, w_3, c_3).

Muchos a uno: Trabajadores a firmas

- Un conjunto de trabajadores tiene preferencias sobre las empresas en las que pueden trabajar.
- Las empresas tiene preferencias por subconjuntos de trabajadores que desean contratar.
- Un emparejamiento en este caso es lo obvio.
- Una firma F y un conjunto de trabajadores C bloquea un emparejamiento si F prefiere el conjunto de trabajadores C al que esta emparejado y cada trabajador de C que no se encuentre empleado por F prefiere F a la firma con la que le toco.

Muchos a uno: Trabajadores a firmas

- Supongamos que tenemos dos firmas y tres trabajadores.
- Las preferencias son de la forma:

$$P(F_1) = \{w_1, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1\}, \{w_2\}$$
$$P(F_2) = \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_3\}, \{w_1\}, \{w_2\}$$
$$P(w_1) = F_2, F_1$$
$$P(w_2) = F_2, F_1$$
$$P(w_3) = F_1, F_2.$$

The only individually rational matchings without unemployment are:

$$\mu_1 = \begin{matrix} F_1 & F_2 \\ \{w_1, w_3\} & \{w_2\} \end{matrix}, \quad \text{which is blocked by } (F_2, w_1)$$

$$\mu_2 = \begin{matrix} F_1 & F_2 \\ \{w_1, w_2\} & \{w_3\} \end{matrix}, \quad \text{which is blocked by } (F_2, \{w_1, w_3\})$$

$$\mu_3 = \begin{matrix} F_1 & F_2 \\ \{w_2, w_3\} & \{w_1\} \end{matrix}, \quad \text{which is blocked by } (F_2, \{w_1, w_2\})$$

Muchos a uno: Trabajadores a firmas

$$\mu_4 = \begin{matrix} F_1 & F_2 \\ \{w_2\} & \{w_1, w_3\} \end{matrix}, \quad \text{which is blocked by } (F_1, \{w_2, w_3\})$$

$$\mu_5 = \begin{matrix} F_1 & F_2 \\ \{w_1\} & \{w_2, w_3\} \end{matrix}, \quad \text{which is blocked by } (F_2, \{w_1, w_3\}).$$

Now observe that any matching that leaves w_1 unmatched is blocked either by (F_1, w_1) or by (F_2, w_1); any matching that leaves w_2 unmatched is blocked either by (F_1, w_2), (F_2, w_2), or $(F_2, \{w_2, w_3\})$. Finally, any matching that leaves w_3 unmatched is blocked by $(F_2, \{w_1, w_3\})$.

¿Cómo identificar un emparejamiento estable?

- Una estrategia sería: como el conjunto de emparejamientos es finito, listarlos todos y uno por uno ir provando (esto pues ser muy ineficiente).
- Algo más eficiente podría ser: cada que se encuentre una pareja (m, w) que bloquea buscar en la lista un emparejamiento en el que (m, w) esten juntos (el problema es que se pueden formar cíclos y nunca terminar).
- Ver ejemplo 2.4 de Knuth en Roth y Sotomayor.
- Sin embargo, sí existe un algoritmo que siempre encuentra un emparejamiento estable en el modelo básico de emparejamiento (i.e., mercado de matrimonios). El célebre algoritmo de aceptación diferida de Gale y Shapley.

Contenido

Mercado de Matrimonios y Admisiones a la Universidad

- Vamos a estudiar dos problemas: el mercado de matrimonios y el de admisiones a la universidad.
- El algoritmo de aceptación se debe a Gale y Shapley.
- Comenzamos primero con el mercado de matrimonios que es un caso particular del problema de admisiones.
- Este mercado es uno a uno.

Teorema de emparejamiento estables

Theorem (Gale y Shapley)

Existe un emparejamiento estable para todo mercado de matrimonios.

Algoritmo de aceptación diferida

1. Cada hombre le propone matrimonio a la mujer que más prefiere entre las aceptables para el (véase las observaciones para el caso en el que hay indiferencia).
2. Las mujeres rechazan las ofertas de todos los hombre que no son aceptables o que no son los preferidos entre las ofertas que recibieron: se comprometen temporalmente con la mejor oferta.
3. Los hombres que fueron rechazados, en el anterior paso o más adelante en el proceso, hacen ofertas a la siguiente mujer más preferida entre las que no lo han rechazado anteriormente y sus aceptables.
4. Se repite hasta que ningun hombre es rechazado.
5. El resultado es un emparejamiento estable.

Demostración.

Si no fuera estable hay una pareja que bloquea. Como en esa pareja el hombre prefiere a esa mujer más que le toco, le debió ofrecer y fue rechazado por ella. Pero si ella lo rechazo debio terminar en el algoritmo coon un hombre mejor (los que reciben oferta en el algoritmo solo pueden mejorar en las rondas). Una contradcción. □

Algortimo de aceptación diferida: Observaciones

- En cualquier paso del anterior algoritmo si hay indiferencia entre alternativas usar cualquier regla predefinda para elegir.
- El algoritmo siempre termina porque ningun hombre le ofrece más de una vez matrimonio a una mujer.
- El resultado final es un emparejamiento: en cada etapa cada hombre esta emparejado máximo una mujer y cada mujer máximo con un hombre.
- Es individualmente racional. En todos los pasos, hombres y mujeres está emparejados con mujeres y hombres aceptables.

Algortimo de aceptación diferida: Ejemplo

Example

Considere un mercado con las siguientes preferencias.

To make sure the algorithm is well understood, let us follow it through an example.

Example 2.9: An example of the deferred acceptance procedure

$$P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4$$
$$P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1$$
$$P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2$$
$$P(m_4) = w_1, w_4, w_3, w_2$$
$$P(m_5) = w_1, w_2, w_4$$

$$P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5$$
$$P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4, m_5$$
$$P(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3$$
$$P(w_4) = m_1, m_4, m_5, m_2, m_3.$$

Cuando el hombre propone el emparejamiento estable es:

$$\mu_M = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix}$$

Si la mujer propone:

$$\mu_W = \begin{matrix} w_4 & w_1 & w_2 & w_3 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix}$$

Algortimo de aceptación diferida: Ejemplo

Definition

Decimos que μ estable es óptimo para los hombres si ningún hombre prefiere otro emparejamiento estable.

- Obsérvese que en este ejemplo todos los hombres prefieren débilmente el emparejamiento en el que ellos proponen y de forma análoga las mujeres.
- Este resultado es importante porque no es completamente obvio.
- Consideremos el siguiente ejemplo donde existe mucha competencia de hombres por una mujer y mujeres por un hombre.

Algortimo de aceptación diferida: Ejemplo

Example

Consideremos un mercado con las siguientes preferencias:

$$p(m_1) = w_1, w_2, w_3 \;\; p(w_1) = m_1, m_2, m_3 \tag{5}$$
$$p(m_2) = w_1, w_2, w_3 \;\; p(w_2) = m_1, m_3, m_2 \tag{6}$$
$$p(m_3) = w_1, w_3, w_2 \;\; p(w_3) = m_1, m_2, m_3 \tag{7}$$

Los dos únicos emparejamiento son aquellos en el que el hombre propone y la mujer propone.

Algortimo de aceptación diferida: Optimalidad

- Gale y Shapley demostraron que en todo mercado de emparejamiento con preferencias estrictas existe uno, y solo un emparejamiento óptimo para el hombre (y la mujer), y se obtiene usando el algoritmo de preferencias diferidas.
- La prueba es por inducción en los pasos del algoritmo de aceptacion diferida y es muy parecida a la prueba que daremos al final de optimalidad para los estudiantes del algortimo de aceptación diferida en el caso de admisiones a la universidad.

Theorem (Gale - Shapley Optimalidad)

Si las preferencias son estrictas, siempre existe un emparejamiento óptimo para los hombres (i.e., el emparejamiento en el que los hombres proponen).

Algortimo de aceptación diferida: No existencia de optimalidad

Example

Este ejemplo muestra que cuando las preferencias no son estrictas puedo no existir un emparejamiento estable óptimo para ningun lado del mercado.

$$P(m_1) = [w_2, w_3], w_1, P(w_1) = m_1, m_2, m_3 \tag{8}$$
$$P(m_2) = w_2, w_1, P(w_2) = m_1, m_2 \tag{9}$$
$$P(m_3) = w_3, w_1, P(w_3) = m_1, m_3 \tag{10}$$

Los emparejamientos estables son:

$$\mu_1 = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{matrix}$$

$$\mu_2 = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_3 & m_2 & m_1 \end{matrix}$$

que no son óptimos.

Optimalidad de Pareto

- Se puede demostrar que la asignación óptima para los hombres es óptima de Pareto en un sentido débil para los hombres (un resultados análogo para las mujeres).
- Obsérvese que el concepto de estabiliad de Pareto no esta restringido a emparejamientos estables.

Comportamiento Estratégico en el Mercado de Matrimonios

- Consideremos la revelación de preferencias como la estrategia de cada jugador.
- El resultado del juego es, dadas las preferencias reveladas el resultado de usar el algoritmo de aceptación diferida de los hombres.
- Vamos a mostrar que puede suceder que una mujer, que asume que todos los demás reportan de forma sincera sus preferencias, prefiera mentir antes de reportar sus preferencias.

Ejemplo manipulación estratégica

- Considere un mercado con estas preferencias (verdaderas):

$$\begin{array}{cccccc} m_1 & m_2 & m_3 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1 & w_3 & w_2 & m_3 & m_1 & m_3 \\ w_2 & w_1 & w_1 & m_2 & m_3 & m_2 \\ w_3 & w_2 & w_3 & m_1 & m_2 & m_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & w_1 & w_2 & w_3 \end{array}$$

- Hombres ofrecen, el resultado final del algoritmo de aceptación diferida es:

$$\mu = \begin{array}{cccccc} m_1 & m_2 & m_3 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1 & w_3 & w_2 & m_1 & m_3 & m_2 \end{array}$$

Ejemplo manipulación estratégica

- Desviación unilateral de w_1:

$$\begin{array}{cccccc} m_1 & m_2 & m_3 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1 & w_3 & w_2 & m_3 & m_1 & m_3 \\ w_2 & w_1 & w_1 & m_2 & m_3 & m_2 \\ w_3 & w_2 & w_3 & w_1 & m_2 & m_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_1 & w_2 & w_3 \end{array}$$

- Hombres ofrecen, el resultado final del algoritmo de aceptación diferida es:

$$\mu = \begin{array}{cccccc} m_1 & m_2 & m_3 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_2 & w_3 & w_1 & m_3 & m_1 & m_2 \end{array}$$

- Obsérvese que en este resultado w_1 mejora.

No manipulación estratégica

- Con preferencias estrictas, si quien oferta son lo hombres, ellos no tienen incentivos a manipular (lo mismo para las mujeres).

Admisiones a la Universidad: Muchos a uno

- Este problema es muy similar excepto que varios estudiantes (análogo a mujeres) pueden ser asignados a una misma universidad (análogo a hombres). Cada universidad tiene una cuota de estudiantes que puede ingresar.
- Formalmente tenemos un conjunto de estudiantes $S = \{s_1, ..., s_n\}$ y universidades $U = \{u_1, ..., u_p\}$. Cada universidad i tiene una cuota q_i de estudiantes que pueden ser ingresados.
- Los conceptos de estudiante (universidad) aceptable y emparejamiento estable son los naturales.
- Una diferencia importante es que este es un mercado de muchos a uno.

Algoritmo de aceptación diferida: Extensión

- El algoritmo funciona exactamente de la misma forma que el caso de los matrimonios. Excepto que la universidades (i.e., mujeres) pueden aceptar temporalmente estudiantes hasta su cuota.
- En cada ronda las universiades rechazan los estudiantes que no son aceptables y aceptan temporalmente hasta la cuota de ingresos que tienen.
- La asignación resultante es estable (la prueba es idéntica a la anterior).
- Ahora con preferencias estritas, la asignación es óptima para los estudiantes.

Optimalidad para los estudiantes

- Llamemos a una universidad posible para un estudiante si este puede ser admitido a esa universidad en algún emparejamiento estable.
- Para ningun estudiante el algoritmo de aceptación diferida rechaza una universidad posible. Si esto es verdad, la asignación final es óptima para los estudiates pues ninguna universidad mejor o igual que con la quedó emparejado sería posible.
- Para entender por qué el algoritmo no rechaza universidades posibles, supongamos por inducción que hasta cierto punto no se han rechazado universidades posibles para ningun estudiante.

Optimalidad para los estudiantes

- Consideremos una ronda adicional y supongamos que un estudiante es rechazado por una universidad u que temporalmente prefiere a $s_1, ...s_m$. Tenemos que mostrar que es imposible para el.
- Si fuera posible entonces existiría un emparejamiento estable μ en el que el estudiante va a la universidad u.
- Ahora en este emparejamiento μ, algun s_i tuvo que quedar emparejado con una universidad que le gusta menos que u. Si le gustara más quiere decir que en el algrotimo de aceptación diferida fue rechazado por una universidad que era posible en contradicción con hipótesis de inducción.
- Pero si este es el caso s_i y u bloquearían a μ y μ no sería estable.

No Optimalidad para las Universidades

- Ahora, contrario a lo que sucede en el caso del mercado de matrimonios (uno a uno), en este caso el algoritmo de aceptación diferida (Universidades propoenen) puede no ser óptimo de Pareto en un sentido débil.
- Para ver esto veamos el siguiente ejemplo.

Example

En este ejemplo supongamos que las cuotas son $q_{m_1} = 2, q_{m_2} = 1, q_{m_3} = 1$, entonces el emparejamiento estable en el que las universidades proponen es dominado estrictamente por el emparejamiento $\mu(m_1) = (w_2, w_4), \mu(m_2) = (w_1), \mu(m_3) = (w_3)$ y $\mu(w_1) = (m_2), \mu(w_2) = (m_1), \mu(w_3) = (m_3), \mu(w_4) = (m_1)$

R^{m_1}	R^{m_2}	R^{m_3}	R^{w_1}	R^{w_2}	R^{w_3}	R^{w_4}
w_1	w_1	w_3	m_3	m_2	m_1	m_1
w_2	w_2	w_1	m_1	m_1	m_3	m_2
w_3	w_3	w_2	m_2	m_3	m_2	m_3
w_4	w_4	w_4	w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	m_2	m_3				

Contenido

What, then, to raise the old question once more, is mathematics? The answer, it appears, is that any argument which is carried with sufficiente precision is mathematical.

Gale and Shapley. 1962. College Admissions and the Satability of Marriage

Contenido

Introducción

- La característica más importante es que uno de los lados no tiene preferencias (aunque si pueden existir restricciones legales, etc.)
- Vamos estudiar el caso de:
  1. Asignación de estudiantes (profesores) a dormitorios (oficinas): Dictador
  2. Estudiantes a colegios públicos: Aceptación diferida y TTC
  3. Intercambio de propiedades (sin dinero): TTC
  4. Donación de riñones: TTCC

Dictador serial aleatorio

- La asignación de estudiantes a dormitorios o profesores a escuelas es un caso de un mercado de un lado.
- Se puede resolver con el mecanismo de asignación del dictador serial.

El dictador serial aleatorio

- El dictador serial aleatorio.
- Supongamos los profesores tienen preferencias estrictas.
- **Dictador serial aleatorio**:
    - Ordenar aleatoriamente los profesores.
    - Asignarle al primero su primer opción. Al segundo su mejor opción entre las disponibles, etc.

El dictador serial aleatorio: Eficiencia de Pareto

- Este mecanismo es eficiente de Pareto.
- Suponga existe otra asignación que mejora a alguien sin empeorar a los demás. Entre los que mejoran, tome el que estaba primero en el orden de elección del dictador. Llamemoslo A. Si no eligió esa oficina es porque alguien se la habia quitado. Llamemoslo B. Ahora en la nueva asignación de oficinas, B no puede estar mejor ya que A, entre los que mejoran es el primero en el orden de elección. No es indiferente y no puede empeorar.

El dictador serial aleatorio: No manipulable en estrategias dominantes

- Este mecanismo es **strategy proof**.
- Esto es evidente porque si alguien reporta preferencias distintas, los que escogen primero no cambian y en las nuevas preferencias no se va ha elegir algo mejor que el verdadero entre los que quedaban disponibles en esa elección.

Introducción

- La asignación de estudiantes a escuelas usualmente depende de la zona de residencia.
- Esto ignora las posibilidades de elección de los padres. Solo los que tienen recursos pueden considerar escuelas privadas.
- Las escuelas tienen prioridades: zona de residencia, hermanos, necesidad de formación bilingue, etc.
- El dictador serial no puede acomodar estas restricciones.
- Si se interpretan estas prioridades como preferencias, se puede usar el algortimo de aceptación diferida.
- En este caso el concepto de estabilidad puede interpretarse como *justified envy*.

Asignacion diferida de estudiantes

- Con la interpretación anterior de las prioridades de las escuelas, el algoritmo de aceptación diferida en el que los estudiantes proponen es:
    1. Estable (elimina la envidia justficada).
    2. Óptimo para los estudiantes.
    3. Strategy proof para los estudiantes.

Asignacion diferida de estudiantes

- El problema con usar el algoritmo de aceptación diferida es que a pesar que es óptimo para los estudiantes (i.e., no existe un emparejamiento estable que algún hombre lo prefiera), puede ser Pareto dominado.

Example

Considere las preferencias (cada institución tiene un cupo): Las preferencias de las escuelas:

$s_1 : i_1, i_3, i_2;$

$\mathrm{s}_2 : i_2, i_1, i3;$

$\mathrm{s}_3 : i_2, i_1, i_3$

y los individuos:

$i_1 : s_2, s_1, s_3;$

$\mathrm{i}_2 : s_1, s_2, s_3;$

$\mathrm{i}_3 : s_1, s_2, s_3.$

Es fácil desmotrar que el único emparejamiento estable no es óptimo en el sentido de Pareto para los estudiantes (existe un emparejamiento que mejora estrictamente a dos estudiantes sin empeorar al tercero).

Top Trading Cycle

- Top Trading Cycle ee una generalización del dictador serial.
- Supongamos que las preferencias son estrictas.
- Este mecanismo no es estable pero es Pareto eficiente y es no manipulable.
- Intuitivamente se comienza con los estudiantes que tiene la prioridad mas alta. Entre ellos intercambian en la medida que se obtengan mejoras de Pareto. Se continua con los estudiantes que aún no han sido asignados a una escuela.

Top Trading Cycle

1. Asignar un contador a cada escuela con el número de cupos disponible. Se incializa con la capacidad máxima.
2. Cada estudiante apunta a colegio de su mayor preferencia, y cada escuela apunta al estudiante de mayor prioridad.
3. Como el número de estudiantes, escuelas es finito, necesariamente hay un clico de la forma: $(s_1, i_1, s_2, i_2, ..., i_{k-1}, s_k, i_1)$.
4. Cada estudiante y escuela en un ciclo se emparejan, se retiran los estudiantes (y escuelas sin cupos) y se reduce en uno el cupo disponible de las escuelas que reciben estudiantes.
5. Repetir hasta que no haya más estudiantes para asignar a escuelas.

Top Trading Cycle

- Obsérvese que este mecanismo es un caso especial de dictador serial aleatorio: cuando todas las escuelas comparten las mismas prioridades de estudiantes. Por ejemplo, si las prioridades se determinan aleatoriamente como en el dictador serial aleatorio.
- TTC es Pareto eficiente.
- TTC es strategy proof.

Top Trading Cycle

Example

Resolver el problema de asignacion usando el algoritmo de aceptacion diferida y TTC (escuelas 1 y 2 tienen 2 cupos, escuelas 3 y 4 tienen 3):

$$
\begin{aligned}
s_1 &: i_1 - i_2 - i_3 - i_4 - i_5 - i_6 - i_7 - i_8 \\
s_2 &: i_3 - i_5 - i_4 - i_8 - i_7 - i_2 - i_1 - i_6 \\
s_3 &: i_5 - i_3 - i_1 - i_7 - i_2 - i_8 - i_6 - i_4 \\
s_4 &: i_6 - i_8 - i_7 - i_4 - i_2 - i_3 - i_5 - i_1
\end{aligned}
$$

i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7	i_8
s_2	s_1	s_3	s_3	s_1	s_4	s_1	s_1
s_1	s_2	s_2	s_4	s_3	s_1	s_2	s_2
s_3	s_3	s_1	s_1	s_4	s_2	s_3	s_4
s_4	s_4	s_4	s_2	s_2	s_3	s_4	s_3

Top Trading Cycle

- TTC es Pareto eficiente. Prueba: En la primera ronda todos los asignados a una escuela quedan con su escuela preferida. Si en una ronda posterior alguien se pudiera mejorar, con preferencias estrictas sería quitandole el cupo a alguien que ya fue asignado. Ese estudiante empeoraría.
- TTC es strategy proof. Prueba: es conceptualmente similar a la prueba del dictador serial.

Contenido

Weighted Polytope Rules

- El objetivo es encontrar mecanismos que mejor aproximen una función objetivo dadas ciertas restriciones de diseño (i.e., estabilidad).
- Automated mechanism design without money via machine learning. 2016. Narasimhan, Agarwal, Parkes.

Modelo

- $N = \{1, ..., n\}$ conjunto de agentes.
- Ω conjunto de resultados.
- $\succ$ relación de preferencia estricta. El conjunto de relaciones de preferencia $\mathcal{P}$.
- Un *mecanismo* es una función $f : \mathcal{P} \to \Omega$.
- Los agentes reporta sus preferencias (posiblemente de forma manipulada) y el mecanismo determina el resultado.
- Las preferencias de los agentes salen con una distribución $\mathcal{D}$.

Modelo

- Sea $g : \mathcal{P} \to \Omega$ un objetivo (regla) que puede no satisfacer las restricciones de diseño.
- El problema a resolver es cómo encontrar un mecanismo $f : \mathcal{P} \to \Omega$ que si satisfaga las restricciones de diseño y sea lo más aproximado a g.
- La cercanía se mide con una función de distancia $D : \Omega \times \Omega \to R$.
- Sea $\mathcal{F}$ los mecanismos que satisfacen un conjunto de restricciones de diseño.

El Problema de Diseño de Mecanismos

- Dada una función objetivo g (i.e., función de elección social), diseñar un mecanismo f que arroje resultados similares al deseado socialmente y que satisfaga un conjunto de restricciones (i.e., racionalidad individual, estabilidad):

$$\min_{f \in \mathcal{F}} E_{\succ \sim \mathcal{D}}[D(g(\succ), f(\succ))] \tag{11}$$

- Ahora resolvemos la versión empírica. Generamos preferencias y valores de la función objetivo: $(\succ^i, g(\succ^i))$.

Emparejamientos

- Supongamos el mismo número de hombres y de mujeres n. Una función emparejamiento es $y : H \cup M \to H \cup M \cup \cup\{\phi\}$.
- Dado $\succ$ sea $A(\succ)$ el conjunto de parejas hombre y mujer que prefieren estar emparejadas entre ellos que quedarse solos.

- Una función de emparejamiento se puede representar como una matriz Booleana $y \in \{0,1\}^{nm}$ donde $y_{hm} = 1$ si y solo si (h, m) están emparejados y la columnas (y filas) suman menor igual a uno.
- El conjunto de funciones de emparejamiento estables $\Omega(\succ)$ son aquellas que satisfacen las restricciones:

$$y_{hm} = 0, (h, m) \notin A(\succ) \tag{12}$$

$$y_{hm} + \sum_{h' \succ_m h} y_{mh'} + \sum_{m' \succ_h m} y_{m'h} \geq 1 \tag{13}$$

- Teorem (Roth): Un emparejamiento es estable si y solo si es un punto extremo de $\Omega(\succ)$.

Emparejamientos: Weighted Polytope Rule

- Definamos una función de pesos $\lambda : \mathcal{P} \rightarrow R^{n \times n}$. $(\succ)_{mh}$ representa el peso que se le da a ese emparejamiento (m, h).

Definition (WP-Rule)

Dado λ:

$$f_{WP}(\succ;) = argmax_{y \in \hat{\Omega}(\succ)} \sum_m \sum_h \lambda_{mh}(\succ) y_{mh} \tag{14}$$

- El algorimo de aceptacion diferida es un caso particular.