Difusión en Redes

Alvaro J. Riascos Villegas

Septiembre de 2021

Contenido

Susceptibles - Infectados

- Este es el modelo más sencillo en el que podemos aprender el mecanismo fundamental detrás de los modelos de propagación de enfermedades.
- Por el momento ignoramos la estrutura en una población. Hacemos la hipótesis de la mezcla completa: cada individuo tiene la misma probabilidad β por unidad de tiempo, de entrar en contacto con cualquier otro individuo. Es decir, por unidad de tiempo, un individuo entra en contacto aleatoriamente en promedio con β individuos.

Susceptibles - Infectados

- Sea $S(t)$ el número de personas susceptible en t y $I(t)$ el número de personas infectadas.
- La enfermedad solo se transmite si una persona infectada entra en contacto con una susceptible. Una persona una vez es infectada así se queda.
- Si la población es n la probabilidad de que una persona sea con un suceptible es $\frac{S(t)}{n}$ y la probabilidad de entrar en contacto con una persona es β entonces $\beta\frac{S(t)}{n}$ es la probabiliad de que un infectado entre en contacto con un susceptible.
- Como existen en promedio $I(t)$ infectados entonces por unidad de tiempo en promedio se tiene $\beta I(t)\frac{S(t)}{n}$ nuevos infectados.

Susceptibles - Infectados

- En un periodo muy pequeño se obtiene la siguiente dinámica para los infectados:

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{S(t)I(t)}{n} \tag{1}$$

y para los suceptibles:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{S(t)I(t)}{n} \tag{2}$$

- En términos percapita y usando que: $S(t) + I(t) = n$ se obtiene:

$$\frac{di}{dt} = \beta(1-i)i \tag{3}$$

- La solución de esta ecuación es (llamada solución de crecimiento logístico).

$$i(t) = \frac{i_0 \exp \beta t}{1 - i_0 + i_0 \exp \beta t} \tag{4}$$

Susceptibles - Infectados

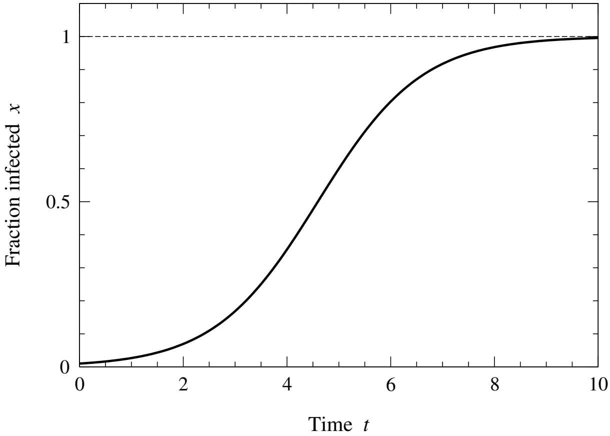


Figure 16.1: The classic logistic growth curve of the SI epidemic model. Starting from a small initial value (1% in this example) the number of infected individuals in an SI model grows exponentially at first, but growth eventually saturates as the supply of susceptible individuals is exhausted, and the curve levels off at $x = 1$ (dashed line).

Contenido

Susceptibles - Infectados - Retirados (Recuperados y Muertos)

- Ahora los infectados pueden recuperarse (o morirse).
- Los recuperados básicamente se retiran del conjunto de agentes infectados y no vuelven a ser susceptibles.
- Luego, en esta ocasión cada persona está en uno de tres estados excluyentes (compartimientos): Susceptibles, Infectado, Recuperados.
- Luego:

$$s + i + r = 1 \tag{5}$$

Susceptibles - Infectados - Retirados (Recuperados y Muertos)

- Luego las ecuaciones que caracterizan el modelo SIR son:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si \tag{6}$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i \tag{7}$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i \tag{8}$$

Susceptibles - Infectados - Retirados (Recuperados y Muertos)

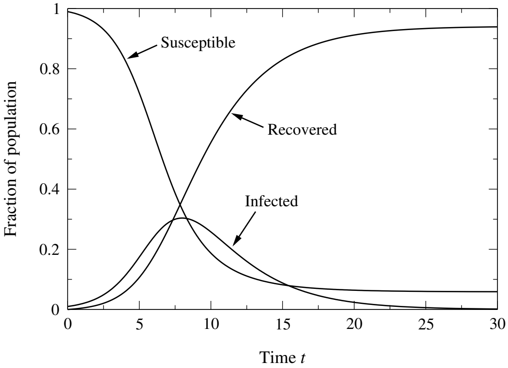


Figure 16.2: Time evolution of the SIR model. A numerical solution of the SIR equations (16.9). The three curves show the fractions of the population in the susceptible, infected, and recovered states as a function of time. The parameters are $\beta = 1$, $\gamma = 0.4$, $s_0 = 0.99$, $x_0 = 0.01$, and $r_0 = 0$.

Susceptibles - Infectados - Retirados (Recuperados y Muertos)

- Obsérvese que la fracción de susceptible no llega asintóticamente a cero. En el largo plazo los infectados disminuyen a cero y los susceptibles que sobrevivieron hasta ese momento ya no hay quien los infecte.
- La tasa de recuperfados asintótica, representa la población que en el largo plazo fue infectada (incluyendo los muertos).
- El aplanamiento de la curva de recuperados se obtiene cuando:

$$r = 1 - s_0 \exp^{-\beta r/\gamma} \tag{9}$$

donde las condiciones inciales típicamente implican que $s_0 \approx 1$ cuando n es grande e i_0 muy pequeño. Luego:

$$r = 1 - \exp^{-\beta r/\gamma} \tag{10}$$

Susceptibles - Infectados - Retirados (Recuperados y Muertos)

- Esta ecuacion:

$$r = 1 - \exp^{-\beta r/\gamma} \tag{11}$$

  es idéntica a la ecuacón que determina el tamanho de la componente gigante en el modelo de Poisson con $c = \frac{\beta}{\gamma}$ donde c es el valor esperado del grado del grafo.
- La siguiente figura muestra el comportamiento de la componente gigante como función de c.

Susceptibles - Infectados - Retirados (Recuperados y Muertos)

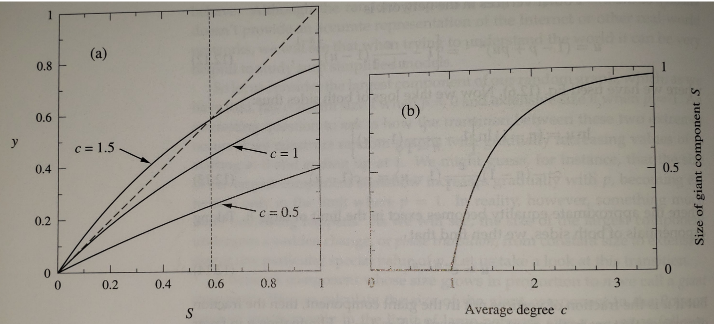


Figure 12.1: Graphical solution for the size of the giant component. (a) The three curves in the left panel show $y = 1 - e^{-cS}$ for values of c as marked, the diagonal dashed line shows $y = S$, and the intersection gives the solution to Eq. (12.15), $S = 1 - e^{-cS}$. For the bottom curve there is only one intersection, at $S = 0$, so there is no giant component, while for the top curve there is a solution at $S = 0.583\ldots$ (vertical dashed line). The middle curve is precisely at the threshold between the regime where a non-trivial solution for S exists and the regime where there is only the trivial solution $S = 0$. (b) The resulting solution for the size of the giant component as a function of c.

- Cuando $\beta \leq \gamma$ no hay epidemia: los infectados se recuperan más rápido que lo que se infectan los susceptibles.

Tiempo de Recuperación

- El tiempo promedio que una persona demora en recuperar en el modelo SIR: las personas infectadas se recupran o mueren a una tasa γ.
- Durante un periodo pequeño de tiempo δt la probabilidad de no recuperarse es: $1 - \gamma\delta t$, y que no se recupere en un periodo de tiempo t es:

$$(1 - \gamma\delta t)^{\frac{t}{\delta t}} \approx e^{-\gamma t} \tag{12}$$

Tiempo de Recuperación

- Luego la probabilidad de estar infectado hasta t y recuperarse en $(t, t + \delta t)$ es: $\gamma e^{-\gamma t} \delta t$.
- Esta es la distribución exponencial lo que sugiere que el tiempo medio de recuperación es $\frac{1}{\gamma}$.
- Sin embargo, dada la forma de la dsitribucion exponencial, implica que hay mayor probabilidad de recuperarse rápido y una probabilidad positiva de recuperarse despues de mucho tiempo (es contradicción con la evidencia de ciertas enfermedades).

Número Básico de Reproducción

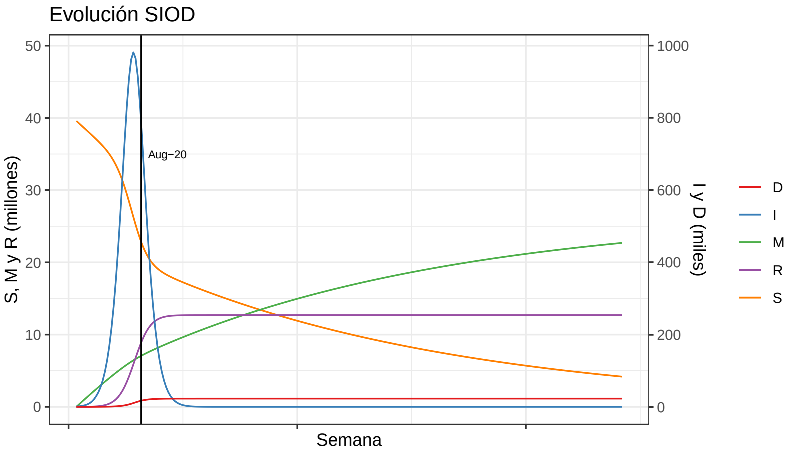
- Una de los atributos más importantes del modelo es el número básico de reproducción, R_0 que es el promedio de personas que un infectado le tranmite la enfermedad antes de recuperarse.
- Nos enfocamos en etapas iniciales de la epidemia donde toda la población es susceptible (población ingenua).
- Si un individuo permanece infectado por un periodo de tiempo τ (variable aleatoria cuya distribución es $\gamma e^{-\gamma t}$), el número de personas con las que entra en contacto es $\beta\tau$. Como consideramos el inicio del proceso de infección, $\beta\tau$ es también el número de personas que se infectan. Y el valor esperado es:

$$\beta \int_0^\infty \gamma t e^{-\gamma t} dt = \frac{\beta}{\gamma} \tag{13}$$

- Lo que da una perspectiva distinta al umbral en el que se forma una componente gigante.

Contenido

Susceptibles - Infectados - Inmunes - Retirados (Recuperados y Muertos)



Susceptibles - Infectados - Inmunes - Retirados (Recuperados y Muertos)

- En este modelo suponemos que hay un nuevo estado: Inmunes (M)
- Ahora las ecuaciones son:

$$S^i_{t+1} = S^i_t(1-\Pi_m) - \beta S^i_t \sum_j A^{ij}_t I^j_t$$

$$R^i_{t+1} = R^i_t + \gamma I^i_t$$

$$D^i_{t+1} = D^i_t + \Pi_d I^i_t$$

$$I^i_{t+1} = I^i_t(1-\Pi_d-\gamma) + \beta \sum_j A^{ij}_t I^j_t$$

$$M^i_{t+1} = M^i_t + \Pi_m S^i_t$$

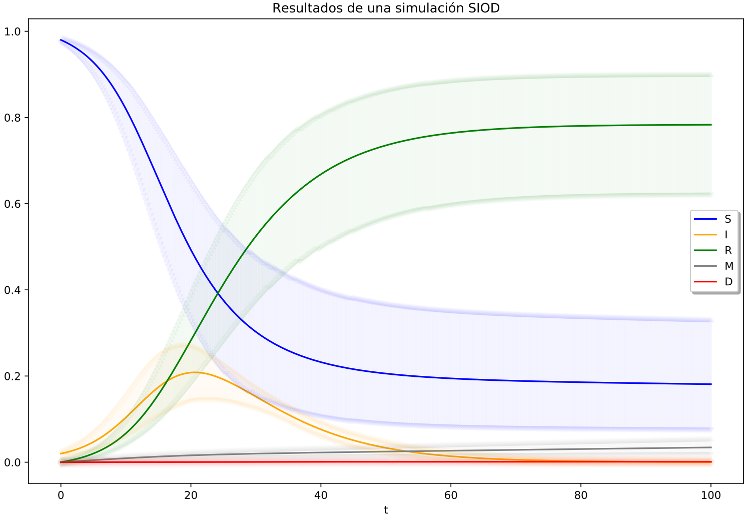
- Obsérvese que si:

$$S^i_0 + R^i_0 + I^i_0 + D^i_0 + M^i_0 = 1$$

entonces para todo t:

$$S^i_t + R^i_t + I^i_t + D^i_t + M^i_t = 1$$

Susceptibles - Infectados - Inmunes - Retirados (Recuperados y Muertos)



Susceptibles - Infectados - Inmunes - Retirados (Recuperados y Muertos)