Formación Estratégica de Redes

Alvaro J. Riascos Villegas

Septiembre de 2019

Contenido

Representación de una red y utilidad

- Sea (N, g) una red (grafo) donde N es el conjunto jugadores y g es una matriz simétrica de ceros y unos que representa la red ($g_{ij} = 1$ si y solamente si existe un enlace entre el nodo i, j). g se llama la matriz de adyacencia.

Eficiencia social y de Pareto

- El concepto de eficiencia y optimalidad Pareto en redes.
- Sea $u_i(g)$ la utilidad que recibe un jugador i en una red g.
- Una red es eficiente si maximiza la suma de las utilidades de los agentes.
- Una red es eficiente en el sentido de Pareto si no existe otra red que mejore estrictamente a por lo menos un agentes sin empeorar a ninguno.
- Toda red eficiente es óptima en el sentido de Pareto.

Ejemplos de Redes: Eficiencia

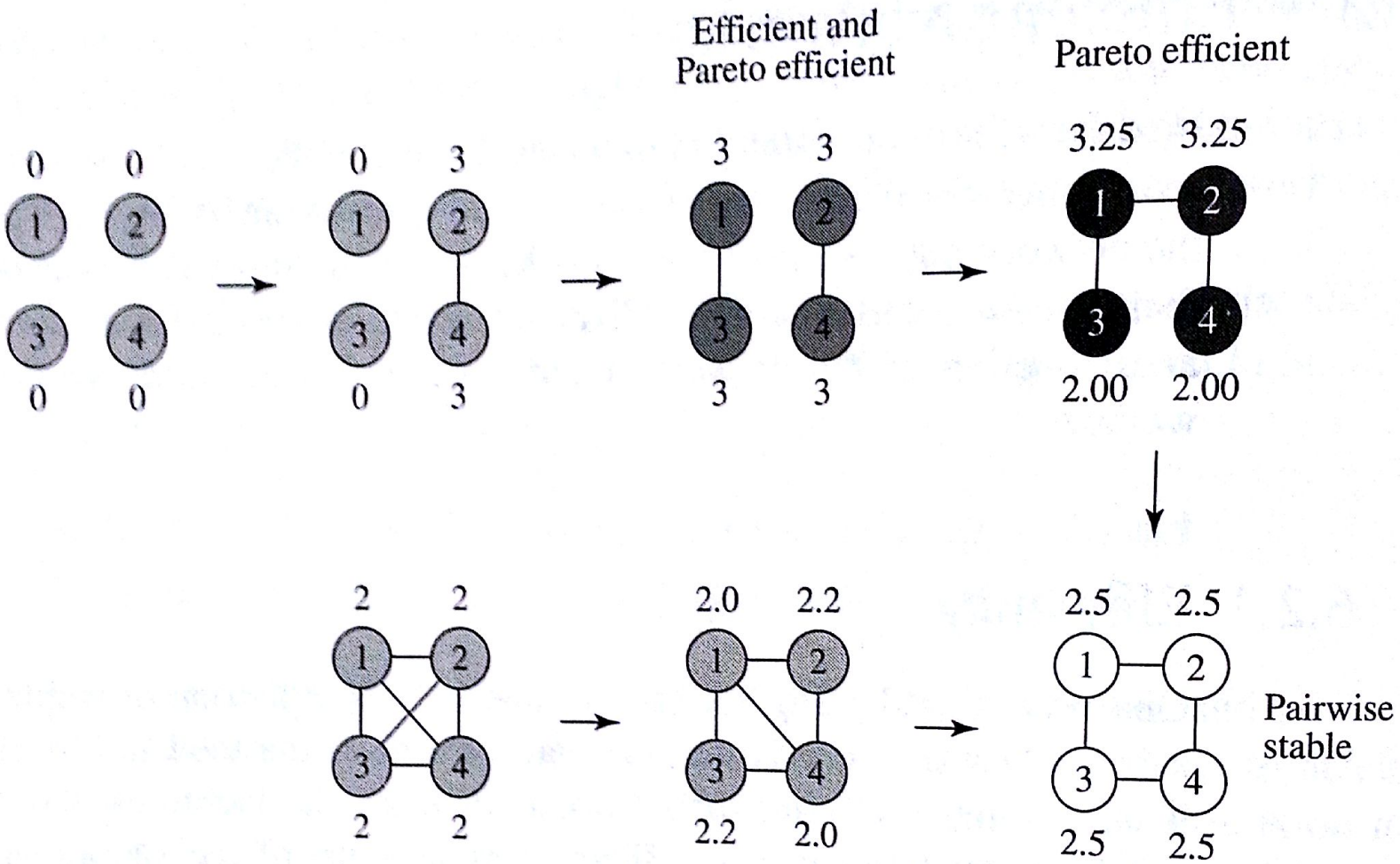


FIGURE 6.1 An example of efficient, Pareto efficient, and pairwise stable networks in a four person society.

Contenido

Estabilidad por pares

- Es la estructura de una red endógena?
- Para esto necesitamos un concepto de equilibrio (una teoría positiva del comportamiento).
- Estabilidad por pares es:
  1. Ningún agente puede beneficiarse de romper con un enlace en el que está directamente involucrado.
  2. Ningún par de agentes pueden beneficiarse ambos (por lo menos uno de ellos estrictamente) de crear un nuevo enlace.

Ejemplos de Redes: Comportamiento Estratégico

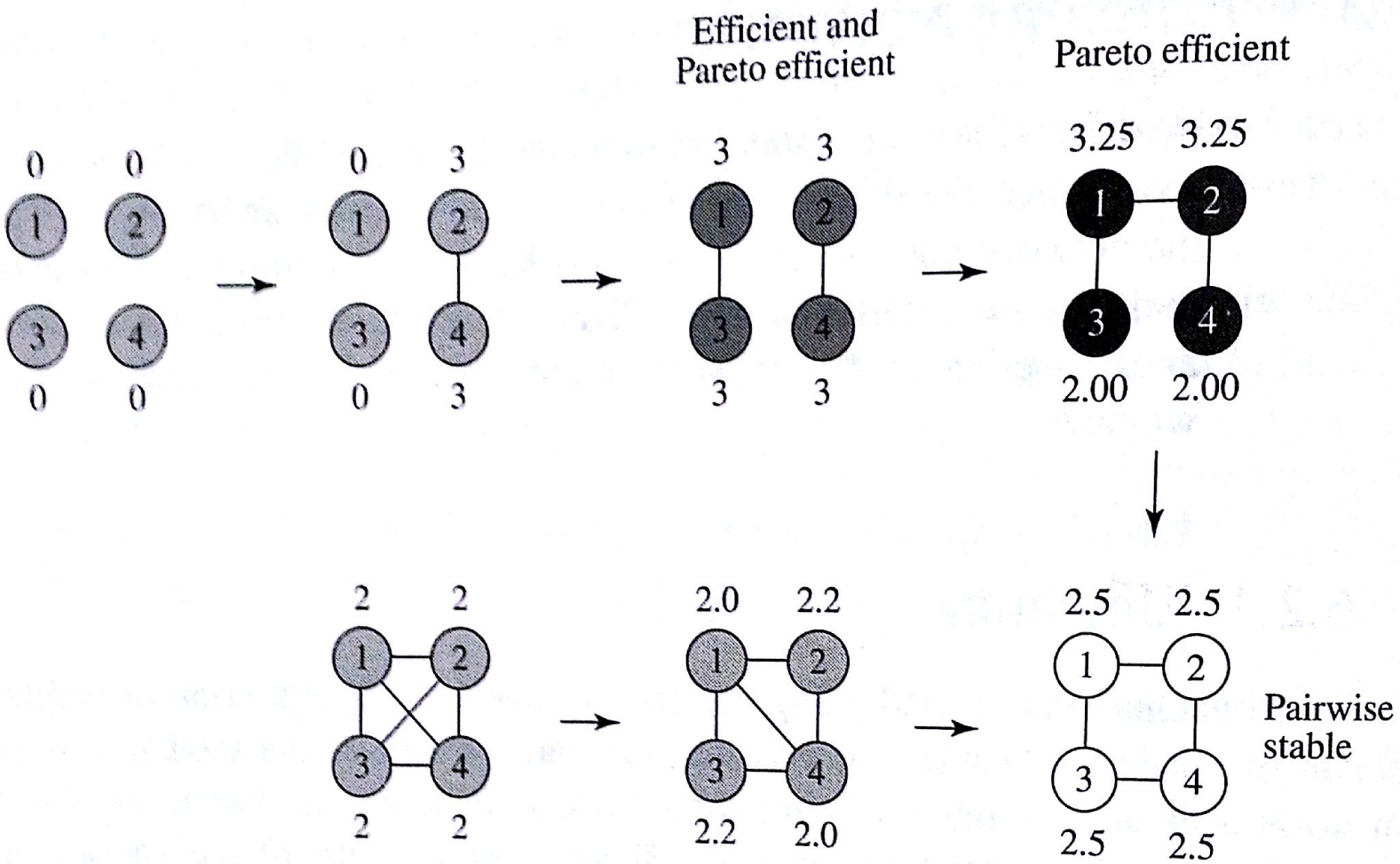


FIGURE 6.1 An example of efficient, Pareto efficient, and pairwise stable networks in a four person society.

Contenido

Block y Jackson (1996)

- Sea $b : \{1, 2, ..., n-1\} \to \mathbf{R}$ una función de la distancia posible entre dos nodos, en los números reales.
- La utilidad (neta) $u_i(g)$ que recibe un jugador i de una red g es:

$$u_i(g) = \sum_{j \neq i, i\ j \text{ con un camino que los conecta en } g} b(l_{ij}(g)) - d_{i(g)}c$$

  asumimos $b(k) > b(k+1)$ y $c0$.
- El modelo de conexiones simémetircas es un caso particular donde $b(l_{ij}(g)) = \delta^{l_{ij}(g)}$ donde $\delta \in (0, 1)$.

Utilidad basada en la distancia

- La característica fundamental de este modelo es que el beneficio solo depende de la distacia más corta, es decreciente en la distancia y todos los individuos tienen la misma función de utilidad.
- Las características de modelo son similares al modelo de conexiones simétricas.
- Si el costo no es muy alto, la red completa es la única red eficiente, si los costos son muy altos, la única red eficiente es la que todos los nodos son aislados y cuando el costso es intermedio, la única red eficiente es la estrella.
- Resultados similares se obtienen cuando la red se forma de forma estratégica.
- Existen valores de los parámetros para los que toda red estable es ineficente en el sentido de Pareto y parámetros para los cuales todas las redes estables son eficientes.

Modelo de conexiones simétricas: Eficiencia

- Observaciones:
  1. Si el costo es muy bajo (inferior a $\delta - \delta^2$) el grafo óptimo es tener el máximo número de enlaces: Sea g una red eficiente y supon-
     ga que existen dos nodos i, j entre los cuales no existe un enlace. AÃ±$dirunenlaceentreelloslecuestacacadaunoyelbeneficio(neto)paracad$ δ^2.
  2. Si el costo es mayor que ese umbral pero no muy grande, el grafo óptimo es una estrella (en la figura los beneficios y enlaces directos no cambian pero mejoran los beneficios agregados indirectos):

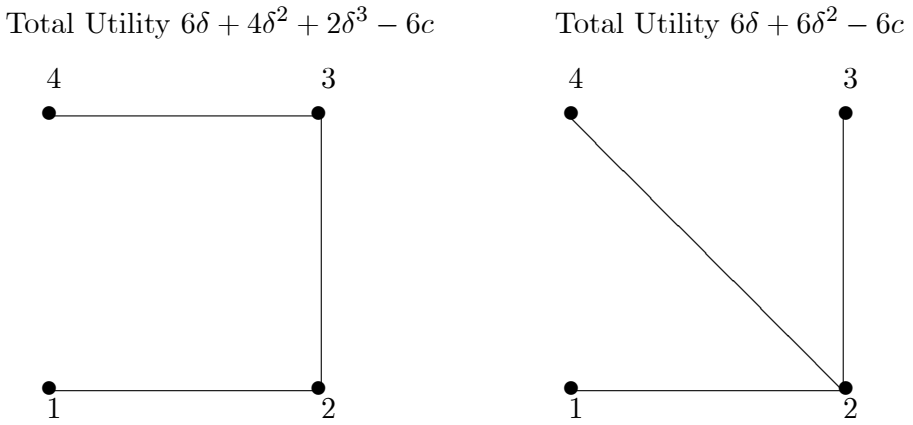


Figure 1.2.4 *The Gain in Total Utility from Changing a "Line" into a "Star".*

  3. Si el costo es muy grande el grafo óptimo no tiene enlaces.

Modelo de conexiones simétricas: Equilibrio

- Teniendo esta caracterización como referente ahora podemos preguntarnos cuál es el resultado de la interacción estratégica de un conjunto de jugadores en una red.
  1. Cuando el costo es bajo (inferior a $\delta - \delta^2$) la red eficiente es la red completa y además es la única red estable por pares: aÃ±*adirunenlacedirectosiempretraebeneficiosnetospositivos*.

2. Cuando el costo satisface $\delta > c > \delta - \delta^2$ la estrella es estable por pares (verificar el no hay incentivos a aÃ±*adiroeiminarenlaces*).
3. Pero hay muchas más estructuras de redes que son estables. Por ejemplo, cuatro jugadores conectados en un círculo puede ser estable en el rango de costos en el que la estrella es estable y eficiente (esto ocurre cuando $\delta - \delta^3 > c > \delta - \delta^2$). Esto pone de manifiesto la posibilidad de que en equilibrio, las redes no necesariamente son eficientes.
4. Con costos aún mayores, $c > \delta$ la estrella es eficiente pero no estable por pares: el centro de la estrella tiene incentivos a eliminar enlaces. Esto pone de manifiesto que pueden existir redes eficientes que no son estables.

Contenido

Externalidades

- Externalidades: decimos que existen externalidades no negativas para el perfil $(u_1, ..., u_n)$ cuando para cualquier función de utilidad añadir un vertice entre cualquier par de nodos mejora débilmente la utilidad.
- Externalidades no positivas se definen de forma similar.

Modelo Coautores

- Un modelo de coautores con externalidades (Jackson y Wolinsky): asumamos que la función de utilidad:

$$u_i(g) = \sum_{j:ij \in g} \left(\frac{1}{d_i(g)} + \frac{1}{d_j(g)} + \frac{1}{d_i(g) d_j(g)} \right)$$

  cuando un enlace ij signifia que i y j son coautores, $d_i(g) > 0$ y $u_i(g) = 0$ caso contrario.
- $d_i(g)$ representa el número de coautores (proyectos).
- Los primeros dos términos sugieren que entre más coautores tenga cada autor, menos tiempo tiene para dedicarle a los proyectos.
- El último término sugiere cierta sinérgia entre los coautores: si ambos aumetan el tiempo dedicado a cada proyecto su utilidad aumenta proporcionalmente más que si solo uno de ellos aumenta.
- Es es un ejemplo de externalidades negativas.

Modelo Coautores

- Jackson y Wolinsky muestran que n es par, la red eficiente tiene $\frac{n}{2}$ autores separados. Si $n \geq 4$, una red en equilibrio es ineficiente y puede ser particionada en componentes completamente conectadas cda una con un número diferente de autores. Además si $m, \hat{m}$ son los miembos de dos compoenentes, $m > \hat{m}$ entonces $m > \hat{m}^2$.
- Este resultado sugiere restricciones testeables del modelo.

Modelo Coautores

- Probemos la primera parte de la afirmación anterior: Sea n par y obsérvese que:

$$u_i(g) \leq 1 + \sum_{j:ij \in g} \frac{1}{d_i(g)d_j(g)}$$

Por lo tanto:

$$\sum_i u_i(g) \leq 2n + \sum_i \sum_{j:ij \in g} \frac{1}{d_i(g)d_j(g)}$$

Ahora obsérvese que si para algún i, $d_i(g) = 0$ entonces $u_i(g) = 1$ y la anterior relación no podría darse con igualdad (ningun coautor da utilidad 1 pero un solo coautor da utilidad mayor que 1.).

Modelo Coautores

- Ahora:

$$\sum_i \sum_{j:ij\in g} \frac{1}{d_i(g)d_j(g)} \leq n$$

  y la igualdad solo podria darse con $d_i(g) = d_j(g) = 1$.

- En conclusión:

$$\sum_i u_i(g) \leq 3n$$

  y es una es una condición necesaria para la igualdad que $d_i(g) = d_j(g) = 1$. Pero estas condiciones las cumple una red en la que hay $\frac{n}{2}$ parejas aisladas.

Contenido

Fenómeno de Mundos Pequeños

- Mundos pequeños quiere decir:
  1. Diámetro pequeño.
  2. Distancia promedio de caminos pequenã.
  3. Aglomeración alta.
- Estas características se pueden racionalizar en un modelo de formación estratégica de redes.

Modelo de Islas Conectadas

- Es igual al modelo anterior pero existe una segmentación de los nodos en islas.
- El costo de hacer relaciones entre agentes en la misma isla es menor que entre agentes en diferentes islas.
- Esta es una forma de introducir heterogeneidad entre los agentes y en equilibrio se pueden obtener redes con características similares a las del fenómeno de pequeños mundos.

Modelo de Islas Conectadas

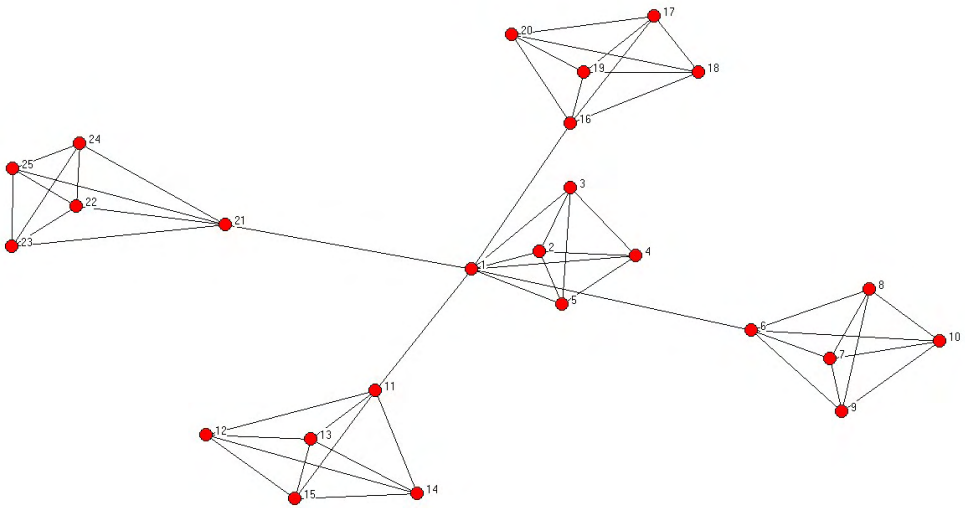


Figure 6.5.1. A Pairwise Stable "Small World" in an Islands Version of the Connections Model

Contenido

Paradoja de Braess

- Equilibrio de Nash es la mitad de carros por cada ruta de A a B. Tiempo de desplazamiento 65 minutos.

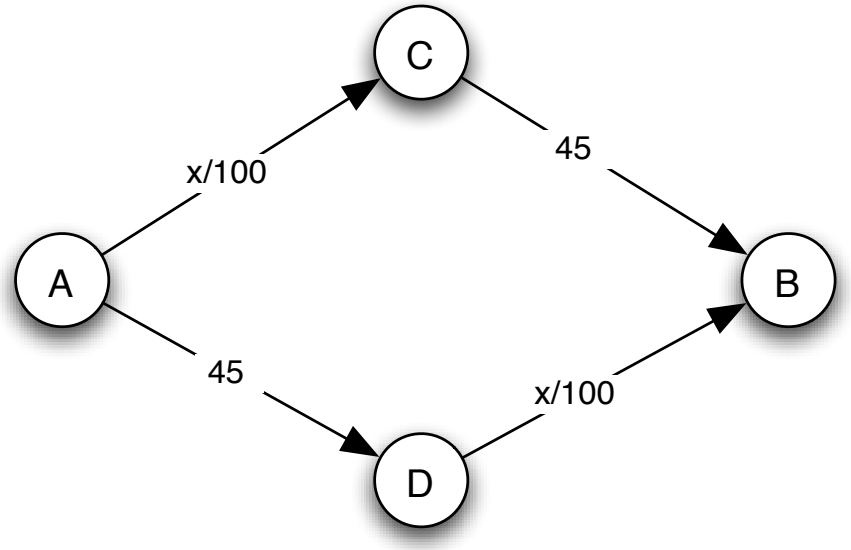


Figure 8.1: A highway network, with each edge labeled by its travel time (in minutes) when there are x cars using it. When 4000 cars need to get from A to B, they divide evenly over the two routes at equilibrium, and the travel time is 65 minutes.

Paradoja de Braess

- Hacer carreteras que, en principio, solo debería de mejorar el tráfico en realidad lo empeora! En el nuevo equilibrio, todos los carros usan C a D que es una autopista super rápida. El tiempo de desplazamiento es 80 minutos.

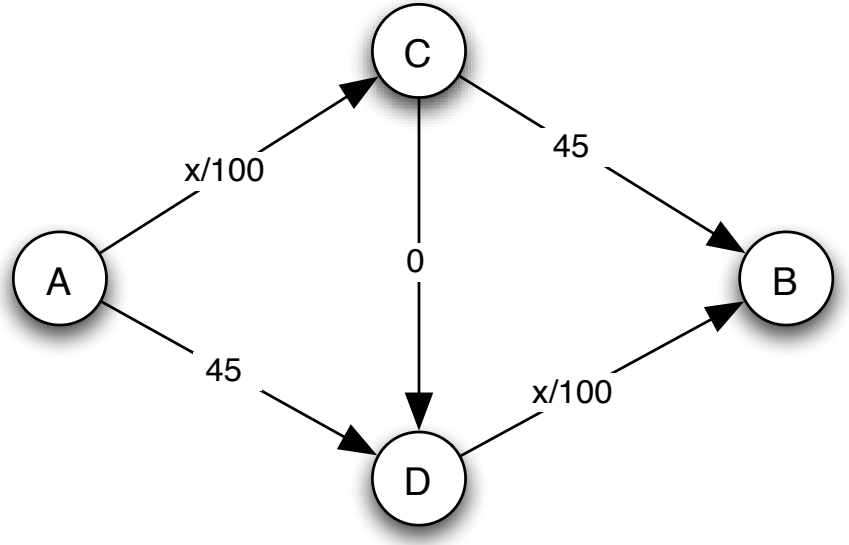


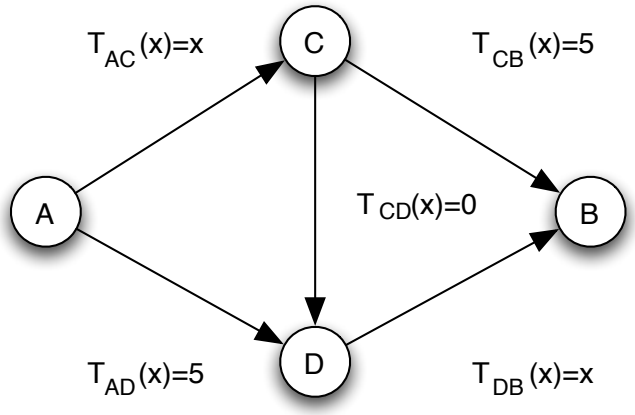
Figure 8.2: The highway network from the previous figure, after a very fast edge has been added from C to D. Although the highway system has been "upgraded," the travel time at equilibrium is now 80 minutes, since all cars use the route through C and D.

Paradoja de Braess

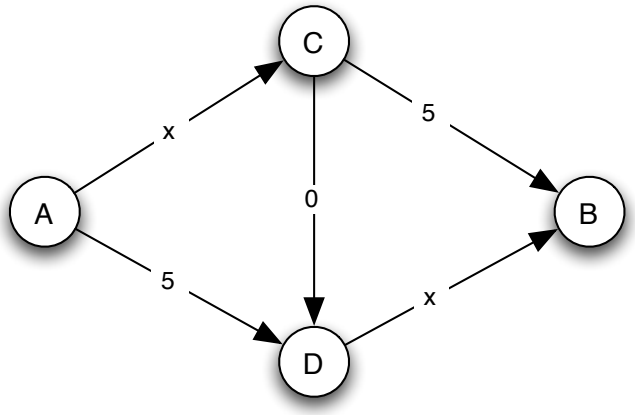
- Una pregunta natural es qué tan grave puede llegar a ser la paradoja de Braess.
- Un resultado de Roughgarden y Tardos muestra que si los tiempos de desplazamiento son lineales en el tráfico, dado un equilibrio inicial, si añadimos nueva rutas existe un equilibrio tal que el tiempo de desplazmiento es a lo sumo $\frac{4}{3}$ que el tiempo de desplazamiento del primer equilibrio. Este muestra qué tan grave puede ser la paradoja de Braess.
- Obsérvese que si cambiamos los tiempos de desplazamiento del anterior ejemplo de 45 a 40, la contrucción de C a D sería el peor de los casos posibles de acuerdo al anterior teorema.
- De hecho se puede demostrar que existe un equilibrio tal que el precio de la anarquía es a lo sumo $\frac{4}{3}$: el equilibrio con mayor costo relativo al costo social (mostrar que el precio es menor a 2 es relativamente fácil como se muestra más adelante).

Modelo: Costos de Desplazamiento lineales

- Supongamos los tiempos de desplazamiento a lo largo del enlace e, cuando el número de carros es x es de la forma $T_e(x)$.



(a) *Travel times written as explicit functions of x.*

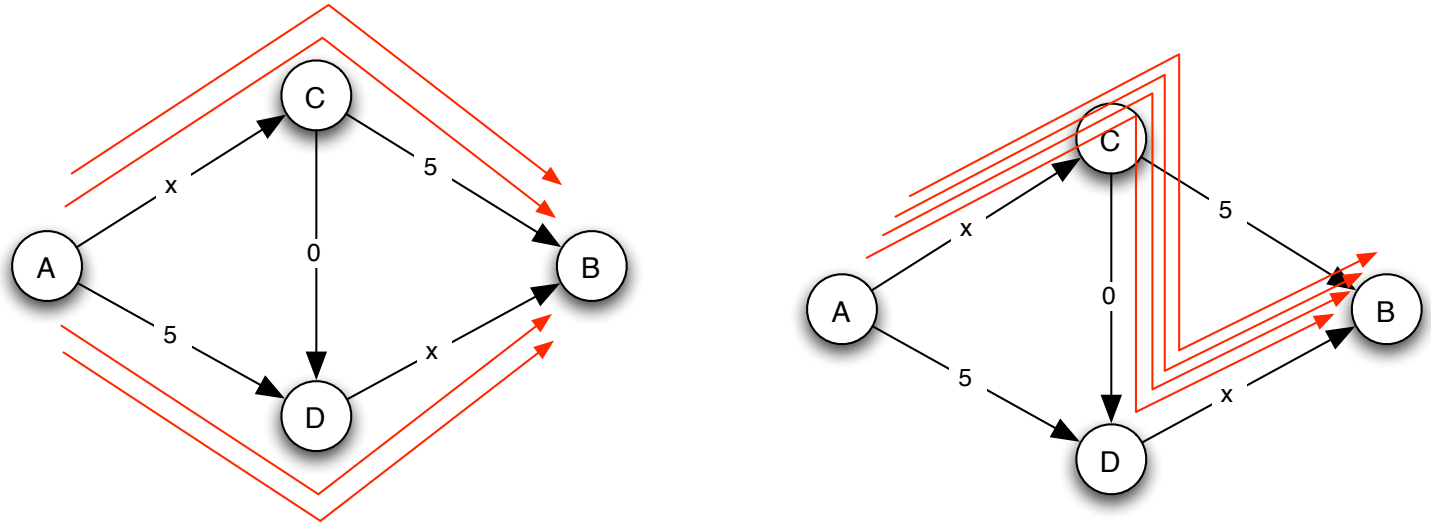


(b) *Travel times written as annotations on the edges.*

Figure 8.3: A network annotated with the travel-time function on each edge.

Modelo: Costos de Desplazamiento lineales

- Cuatro agentes tratandose de desplazar de A a B. El óptimo social es: 28. En el único equilibrio el tiempo de desplazamiento es: 32. El precio de la anarquía y la estabilidad son iguales.



(a) *The social optimum.* (b) *The Nash equilibrium.*

Figure 8.4: A version of Braess's Paradox: In the socially optimal traffic pattern (on the left), the social cost is 28, while in the unique Nash equilibrium (on the right), the social cost is 32.

Cómo encontrar un equilibrio?

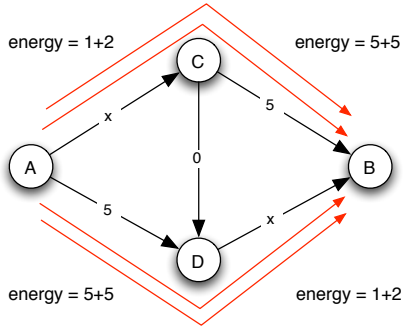
- El siguiente algortimo permite, partiendo de cualquier distribución de tráfico, alcanzar un equilibrio (*best response dynamics*): partir de cualquier distribución. Si no es un equilibrio alguien puede mejorar de forma unilateral. Elegir este agente y asignarle la ruta que es mejor respuesta. Si no es un equilibrio, continuar con el mismo procedimiento.
- Por qué este procedimiento se puede garantizar que termina (considere ese mismo procedimiento en en juego cara y sello)?
- Para ver esto es necesario definir alguna medidad de progreso.
- Definimos la energía potencial $E_e(x)$ de un enlace e con tráfico x como:

$$E_e(x) = T_e(1) + T_e(2) ... + T_e(x-1) + T_e(x)$$

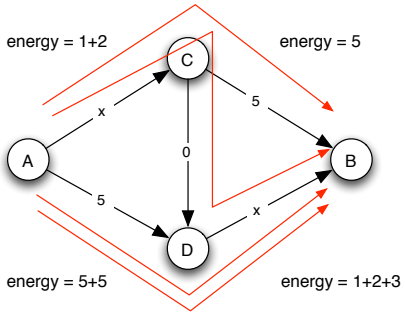
Cómo encontrar un equilibrio?

- Definimos $E_e(0) = 0$ y la energía potencial de cualquier configuración como la suma de la energía potencial de cada enlace.
- La energía potencial no es el tiempo de desplazamiento social.
- La siguiente gráfica muestra la evolución de la energía potencial cuando se utiliza el algoritmo dinámico de mejor respuesta en el ejemplo anterior.

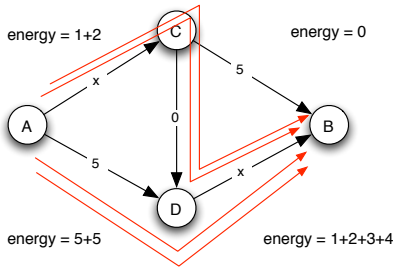
Cómo encontrar un equilibrio?



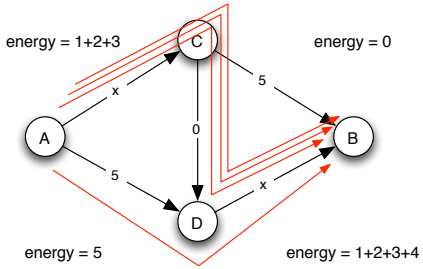
(a) *The initial traffic pattern. (Potential energy is 26.)*



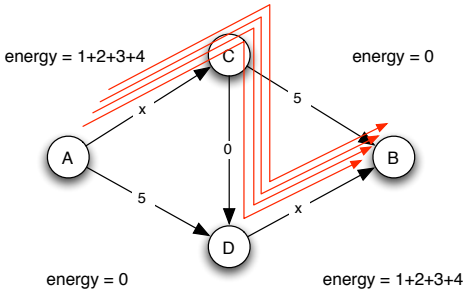
(b) *After one step of best-response dynamics. (Potential energy is 24.)*



(c) *After two steps. (Potential energy is 23.)*



(d) *After three steps. (Potential energy is 21.)*



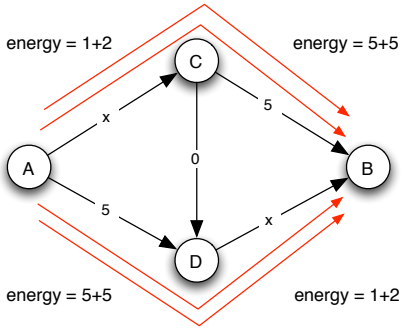
(e) *After four steps: Equilibrium is reached. (Potential energy is 20.)*

Figure 8.5: We can track the progress of best-response dynamics in the traffic game by watching how the potential energy changes.

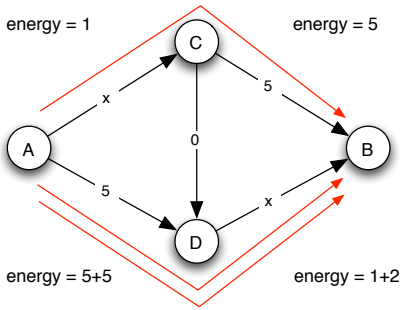
Cómo encontrar un equilibrio?

- Obsérvese que un agente que no esta optimiznado y elige una mejor ruta: al retirarse de una ruta, disminuye la energía potencial. Cuando elige una nueva ruta que disminuye su tiempo, aumenta la energía potenial pero en una cantidad menor que la que la que libero (de lo contrario no hubiera tenido incentivos a cambiar de ruta).
- Por lo tanto cada iteración del algorítmo disminuye estríctamente la energía potencial y como los cambios son discretos y acotados por cero, el algorítmo tiene que parar en un número finito de iteraciones (véase la siguiente figura).

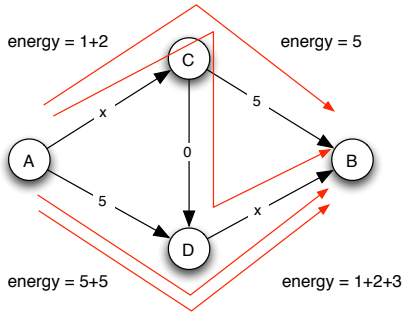
Cómo encontrar un equilibrio?



(a) *The potential energy of a traffic pattern not in equilibrium.*



(b) *Potential energy is released when a driver abandons their current path.*



(c) *Potential energy is put back into the system when the driver chooses a new path.*

Figure 8.6: When a driver abandons one path in favor of another, the change in potential energy is exactly the improvement in the driver's travel time.

Relación entre energía potencial y tiempo de desplazamiento

- El tiempo de desplazamiento en cada enlace es: $xT_e(x)$. Si los tiempos de desplazamiento en cada enlace son lineales entonces es fácil de ver que:

$$E_e(x) \geq \frac{xT_e(x)}{2}$$

que se traduce en la misma relación entre la energía total y el tiempo de desplazamiento total.

Relación entre energía potencial y tiempo de desplazamiento

- Ahora, por definición:

$$xT_e(x) \geq E_e(x)$$

por lo tanto, si los tiempos son lineales:

$$xT_e(x) \geq E_e(x) \geq \frac{xT_e(x)}{2}$$

que se traduce en la misma relación entre la energía total y el tiempo de desplazamiento total:

$$\frac{T(G)}{2} \leq E(G) \leq T(G)$$

Relación entre tiempo de desplazamiento en equilibro y el optimo social

- Suponga que G es la configuración socialmente óptima, entonces sabemos que (para cualquier configuración no necesariamnete la óptima):

$$\frac{T(G)}{2} \leq E(G) \leq T(G)$$

- Ahora si usamos el algoritmo de mejor respuesta, cada que lo hagamos obtenemos una G' y sabemos que:

$$E(G') \leq E(G)$$

- Entonces:

$$T(G') \leq 2E(G') \leq 2E(G) \leq 2T(G)$$

Precio de la anarquía

- El precio del anarquía cuando la función objetivo es el costo social se define como el costo social del peor equiibrio dividio por el costos social óptimo.
- En este caso:

$$\frac{T(G')}{T(G)} \leq 2$$