Introducción a la Teoría de Redes[1]

Alvaro J. Riascos Villegas

Agosto 2023

[1] Basado en Jackson, M (2008). Social and Economic Networks. Princeton University Press y Easly, D. y J.Eilenberg. Networks Crowds and Markets.

Contenido

Ejemplos de Redes: Matrimonios Familia Medici, Florencia 1400

- Padgett, J.F y C.K. Ansell (1993). Robust action and the rise of the Medici, 1400-1434.
- Red de matrimonios entre familias (cada enlace representa un matrimonio entre miembros de dos familias).

Ejemplos de Redes: Matrimonios Familia Medici, Florencia 1400

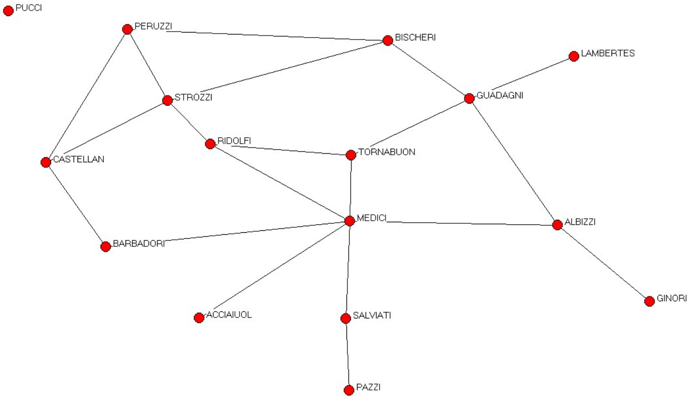


Figure 1.1: 15th Century Florentine Marriges Data from Padgett and Ansell [493] (drawn using UCINET)

Ejemplos de Redes: Matrimonios Familia Medici, Florencia 1400

- Basados en la riqueza y poder político es difícil explicar como los Medici surgieron como una familia tan importante (la familia Strozzi tenía más riqueza y poder político, sin embargo fueron opacados por los Medici).
- La estructura de relaciones (i.e., red) puede ser un determinante.
- Si comparamos con cuantas familias se encuentra una familia específica relacionada y comparamos entre ellas, los Medici sobresalen (3 a 2).
- Una relacion de importancia resulta más sugestiva.

Ejemplos de Redes: Matrimonios Familia Medici, Florencia 1400

- Sea $P(ij)$ el número de caminos más cortos que conectan una familia i con j. Sea $P_k(ij)$ el número de estos caminos que incluyen a la familia k.
- Por ejemplo si $i =$Barbadori, $j =$Guadagni, entonces $P(ij) = 2$. Si $k =$Medici entonces $P_k(ij) = 2$ mientras que si $k =$ Strozzi o Albizzi $P_k(ij)$ es cero o uno respectivamente.

Ejemplos de Redes: Matrimonios Familia Medici, Florencia 1400

- Si calculamos una medida de importancia (*betweenness* Freeman) de cada familia k como:

$$\sum_{i,j:i\neq j,k\neq i,j} \frac{\frac{P_k(ij)}{P(ij)}}{(n-1)(n-2)/2} \qquad (1)$$

donde $\frac{P_k(ij)}{P(ij)} = 0$ si no hay caminos entre i y j. El coeficiente $(n-1)(n-2)/2$ es el número máximo de pares de familias en las que la familia k podría estar estar en el camino entre ellas.

Ejemplos de Redes: Matrimonios Familia Medici, Florencia 1400

- Esta medida de poder para los Medici es 0.522. Esto significa que los Medici están en más de la mitad de los caminos más cortos entre todos los caminos más cortos entre cada par de familias.
- Este mismo cálculo para los Strozzi es 0.103. El segundo más alto es los Guadagni que es 0.255.
- En este sentido los Medici estaban mejor posicionados que cualquier otra familia.
- Esta estructura es endógena? Es estable? Es óptima?

Ejemplos de Redes: Amistades y romances en estudiantes secundaria

- Datos de $90,000$ estudiantes de la encuesta Add Health entrevistados en los años 90.
- A los estudiantes se les preguntaba con quién habian tenido relaciones románticas en los últimos seis meses.

Ejemplos de Redes: Relaciones románticas entre estudiantes de secundaria

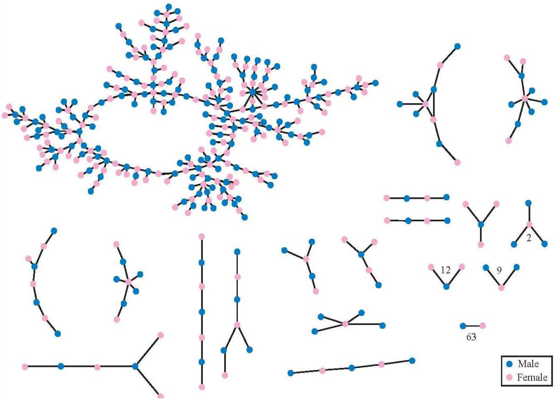


Figure 1.2: A Figure from Bearman, Moody and Stovel [47] based the Add Health Data Set. A Link Denotes a Romantic Relationship, and the Numbers by Some Components Indicate How Many Such Components Appear.

Ejemplos de Redes: Relaciones románticas entre estudiantes de secundaria

- Se le pregunta a los estudiantes si tuvieron una relación romántica en los últimos seis meses.
- Grafo (casi) bipartito.
- Una componente gigante (relevante para la difusión de enfermedades, etc.).
- Esta es una estructura similar a la que surge de una red que se forma mediante enlaces i.i.d.
- Tiene pocos cíclos (e.g., casi un árbol).

Ejemplos de Redes: Amistades entre estudiantes de secundaria

- La siguiente red contrasta en varios aspectos con la anterior.
- Se le pregunta a los estudiantes si alguno de los otros es amigo.

Ejemplos de Redes: Amistades y romances en estudiantes secundaria

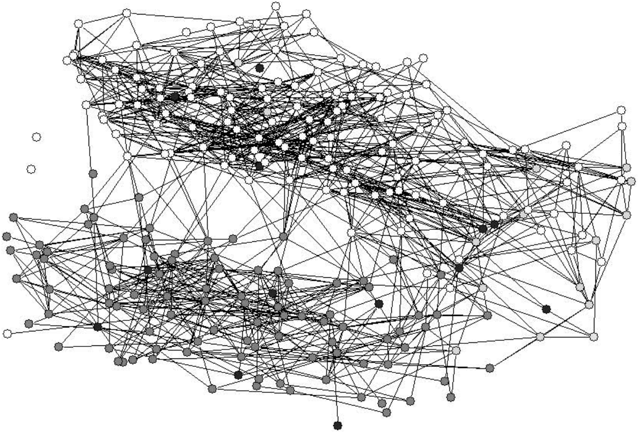


Figure 1.3: “Add Health” Friendships among High School Students Coded by Race: Hispanic=Black, White=White, Black=Grey, Asian and Other = Light Grey.

Ejemplos de Redes: Amistades entre estudiantes de secundaria

- Esta tiene muchos cíclos.
- Se oberva la presencia de homofilia: El 52 % son blancos y el 85 % de sus relaciones de amistad son con blancos.
- Si la raza no fuera relevante, los blancos tendrían aproximadamete 52 % de sus amistades con blancos.
- Los hispános están más integrados pero son muchos menos.

Ejemplos de Redes: Relaciones de prodcucción sectoriales

- El siguiente ejemplo requiere de otro tipo de redes (dirigidas y con pesos).
- Por lo menos dos preguntas saltan a la vista: el grado de desagregación y la similitud entre redes.

Ejemplos de Redes: Relaciones de prodcucción sectoriales

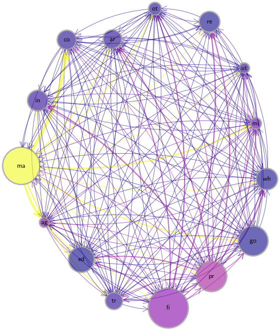


Figura: Relación entre sectores Estados Unidos: 15 sectores. El valor se representa con el grosor. El tamaño de los vertices es proporcional a la participacion del sector en las ventas de todos los sectores.

Ejemplos de Redes: Relaciones de prodcucción sectoriales

Cuadro: Códigos sectoriales para el caso de 15 sectores

Label	Sector
ag	Agriculture, forestry, fishing, and hunting
mi	Mining
ut	Utilities
co	Construction
ma	Manufacturing
wh	Wholesale trade
re	Retail trade
tr	Transportation and warehousing
in	Information
fi	Finance, insurance, real estate, rental, and leasing
pr	Professional and business services
ed	Educational services, health care, and social assistance
ar	Arts, entertainment, accommodation, and food services
ot	Other services, except government
go	Government

Ejemplos de Redes: Relaciones de prodcucción sectoriales

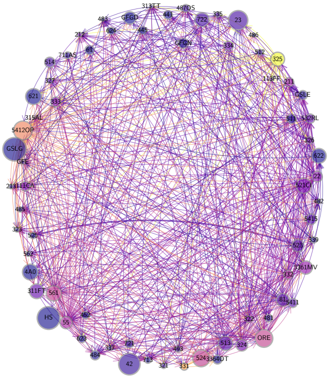


Figura: Relación entre sectores Estados Unidos: 71 sectores

Ejemplos de Redes: Relaciones de prodcucción sectoriales

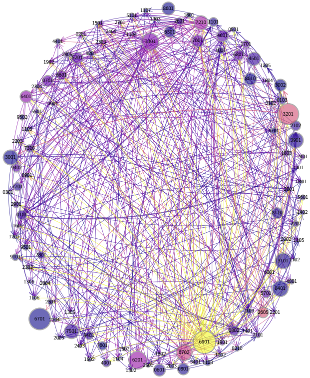
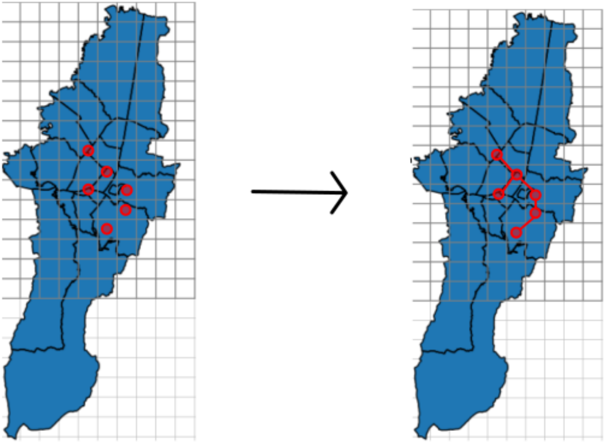


Figura: Relación entre sectores Australia: 114 sectores

Ejemplos de Redes: Crimen (relación espacial)

- Edges are set only for neighbor nodes.



Ejemplos de Redes: Crimen (centralidad)

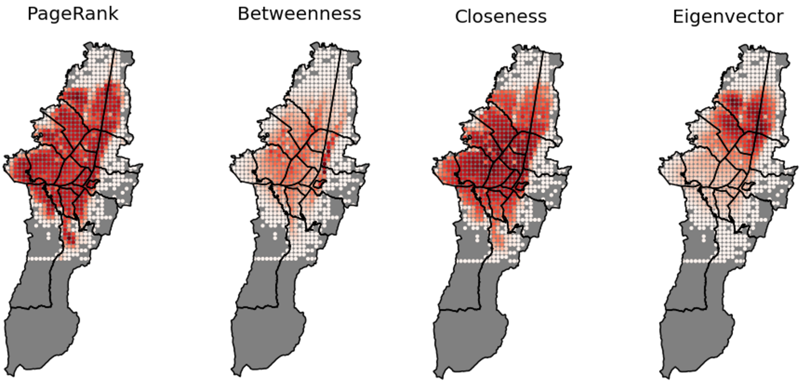


Figura: Centrality for Robberies: Average over the period.

Ejemplos de Redes: Crimen (persisitencia)

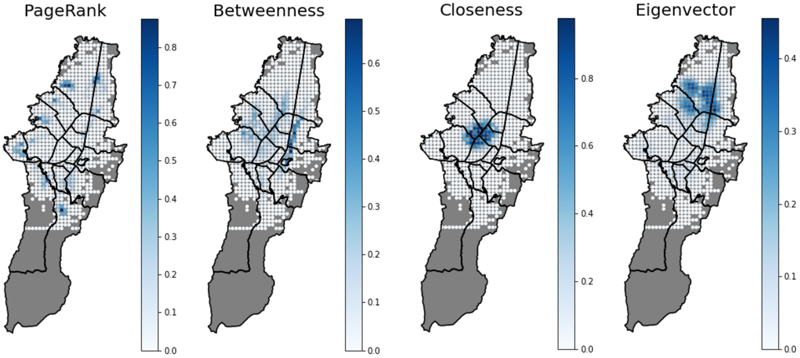


Figura: Measurement of time persistence of hot spots nodes for Robberies. Vertices with highest 5 % centrality measure in each period.

Contenido

Erdos - Renyi 1960

- Sea $N = \{1, ...n\}$ un conjunto de nodos (vertices).
- Suponga que la probabilidad de que se forme un enlace entre i, j es p y que la formación de enlaces es independiente.
- En la práctica para simular una red con este mecanismo aleatorio: enumere todas las parejas posibles (sin importar el orden) y después recorra la lista de parejas haciendo enlaces de forma independiente con probabilidad p.
- Llamamos este modelo de formación de redes el modelo $G(n, p)$.

Example

Si $n = 3$ la probabilidad de que se forme una red completa (i.e., todos los nodos enlazados con todos) es p^3 y hay una sola red completa.
La probabilidad de que se forme una red específica con dos enlaces es $p^2(1-p)$ y hay tres redes de esta forma.

Example

Con n la probabilidad de que se forme una específica de de m enlaces es:

$$p^m(1-p)^{\left(\frac{n(n-1)}{2}-m\right)} \tag{2}$$

Obsérvese que estas probabilidades son de redes donde importa la identidad de los nodos. Por ejemplo, la probabilidad de que se forme *alguna* red de tres nodos con dos enlaces es: $3p^2(1-p)$.

- Retomemos nuestro modelo de formación aleatoria de Erdos y Reny.
- Calculemos algunas estadísticas descriptivas. El grado de un nodo es el número de nodos con los cuales se tiene un enlace.
- La probabilidad de que un nodo i tenga exactamente d enlaces es:

$$\binom{n-1}{d} p^d (1-p)^{n-1-d} \tag{3}$$

- Cuando n es grande y p es pequeño esta expresión se puede aproximar por una distribución de Poisson (en ocasiones el modelo binomial independiente lleva este nombre - modelo de Poisson).

$$\frac{e^{(n-1)p}((n-1)p)^d}{d!} \tag{4}$$

- Para ver esto, cuando n es grande y p es pequeño, obsérvese que:

$$(1-p)^{n-1-d} \approx (1-p)^{n-1} \approx e^{-(n-1)p}$$

por otro lado:

$$\binom{n-1}{d} \approx \frac{(n-1)^d}{d!} \tag{5}$$

Ejemplos de Redes: Formación aleatoria de redes

- Las siguientes figuras muestran una red generada usando el modelo binomial ($n = 50, p = 0{,}02$, lo cual implica que el valor esperado del grado de un nodo es 1).
- Características sobresalientes de grafos generados de esta forma: la probabilidad de cíclos es baja y existe una componente conexa grande.

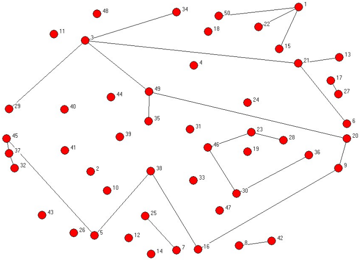


Figure 1.4: A Randomly Generated Network with Probability .02 on each Link

Ejemplos de Redes: Formación aleatoria de redes

- El siguiente gráfico compara la distribución muestral con la aproximación de Poisson para la distribución binomial.

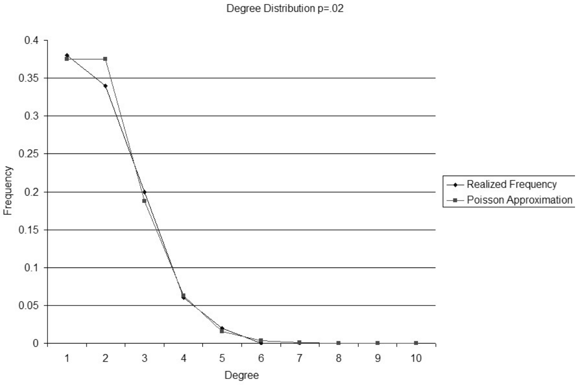


Figure 1.5: Frequency Distribution of a Randomly Generated Network and the Poisson Approximation for a Probability of .02 on each Link

Ejemplos de Redes: Formación aleatoria de redes

- Al aumentar la probabilidad de enlaces disminuyen las componentes conexas (maximales), aumenta la componente dominante y empeora la aproximación de Poisson al grado del grafo.

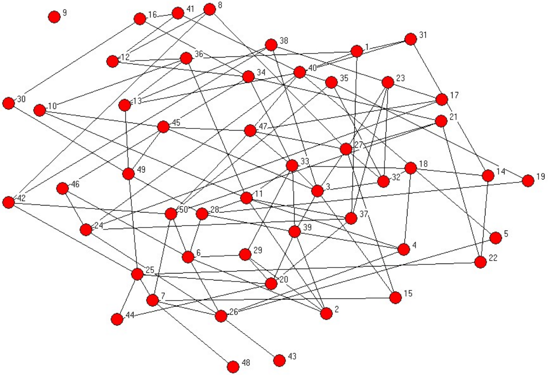


Figure 1.6: A Randomly Generated Network with Probability .08 of each Link

Ejemplos de Redes: Formación aleatoria de redes

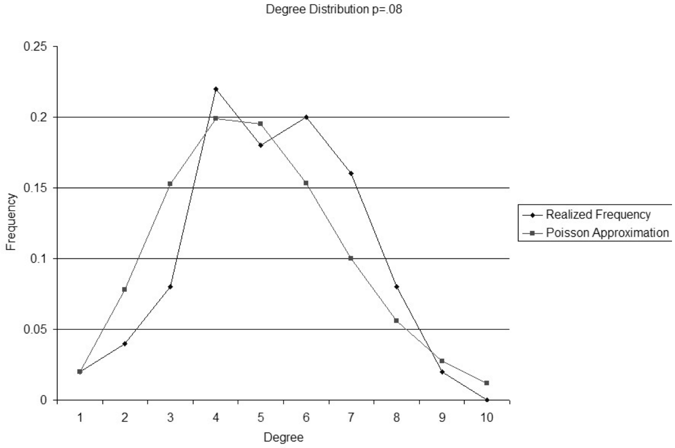


Figure 1.7: Frequency Distribution of a Randomly Generated Network and the Poisson Approximation for a Probability of .08 on each Link

Contenido

Representación de una red y utilidad

- Sea (N, g) una red (grafo) donde N es el conjunto jugadores y g es una matriz simétrica de ceros y unos que representa la red ($g_{ij} = 1$ si y solamente si existe un enlace entre el nodo i, j). g se llama la matriz de adyacencia.

Eficiencia social y de Pareto

- El concepto de eficiencia y optimalidad Pareto en redes.
- Sea $u_i(g)$ la utilidad que recibe un jugador i en una red g.
- Una red es eficiente si maximiza la suma de las utilidades de los agentes.
- Una red es eficiente en el sentido de Pareto si no existe otra red que mejore estrictamente a por lo menos uno agente sin empeorar a ninguno.
- Toda red eficiente es óptima en el sentido de Pareto.

Ejemplos de Redes: Eficiencia

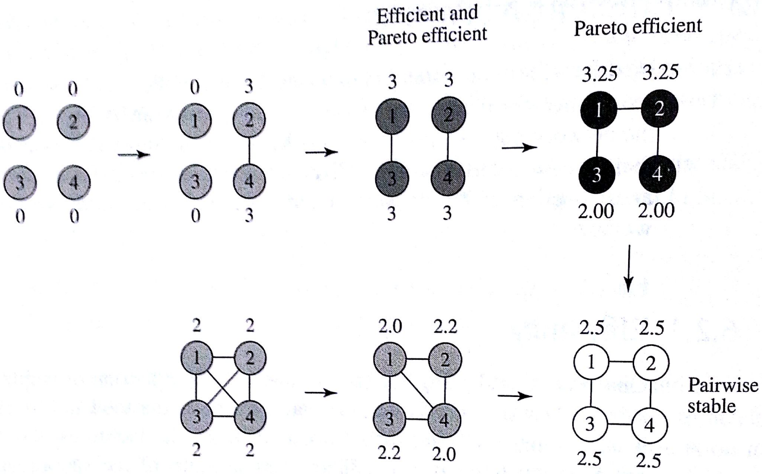


FIGURE 6.1 An example of efficient, Pareto efficient, and pairwise stable networks in a four person society.

Contenido

Estabilidad por pares

- Es la estructura de una red endógena?
- Para esto necesitamos un concepto de equilibrio (una teoría positiva del comportamiento).
- Estabilidad por pares es:
  1. Ningún agente puede beneficiarse de romper con un enlace en el que está directamente involucrado.
  2. Ningún par de agentes pueden beneficiarse ambos (por lo menos uno de ellos estrictamente) de crear un nuevo enlace.

Ejemplos de Redes: Comportamiento Estratégico

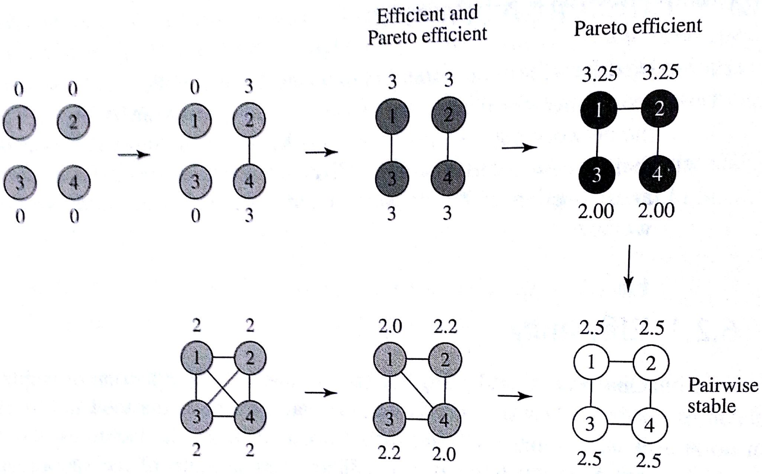


FIGURE 6.1 An example of efficient, Pareto efficient, and pairwise stable networks in a four person society.

Contenido

Eficiencia y Estabilidad

- Una pregunta importante es qué tan distante en términos de utilidad está un equilibrio de la utilidad de eficiencia.
- Puesto que existen varias redes en equilibrio, se pueden distinguir dos casos.
    1. Utilidad de eficiencia dividido por mayor utilidad en equilibrio (precio estabilidad): P_E
    2. Utilidad de eficiencia dividido por la menor utilidad en equilibrio (precio anarquía): P_A
- El precio de la estabilidad es inferior al precio de la anarquía:

$$P_E < P_A$$