9. Teoría de la firma

- Un plan de producción (neto) de L bienes es un vector $y \in R^L$. Valores positivos denotan productos y valores negativos denotan insumos.
- Una firma la caracterizan los planes de producción que son tecnológicamente posibles. Denotamos este conjunto de producción o conjunto de capacidades tecnológicas por $Y \subset R^L$.
- Es importante resaltar que el conjunto de capacidades tecnológicas no hace referencia a la disponibilidad de recursos, sólo a las posibilidades tecnológicas.
- Comúnmente este conjunto se describe mediante una función de transformación $F : R^L \to R$ tal que:

  1. $Y = \{y \in R^L : F(y) \leq 0\}$.
  2. $F(y) = 0$ si y sólo si y está en el borde de Y.

  El conjunto $\partial Y = \{y \in R^L : F(y) = 0\}$ se conoce como la frontera de transformación o la frontera de posibilidades de producción.
- Si F es diferenciable y y es un plan de producción en ∂Y definimos la tasa marginal de transformación entre los commodities l y k, $MRT_{l,k}(y)$ como:

$$MRT_{l,k}(y) = \frac{\partial F/\partial y_l}{\partial F/\partial y_k}$$

  Esto corresponde al valor absoluto de la pendiente de la recta tangente a la frontera de transformación en y.

  - Las siguientes son las propiedades más importantes que se suelen suponer del conjunto de capacidades de producción. No todas ellas son compatibles.

  1. No vacio.
  2. Es un conjunto cerrado en R^L.
  3. No hay arbitrage: $Y \cap R^L_+ \subset \{0\}$.
  4. Posibilidad de parar: $0 \in Y$.
  5. Libre disposición: Si $y \in Y$, $y' \leq y$ entonces $y' \in Y$.
  6. Retornos de escala no crecientes: Si $y \in Y$ entonces para todo $\alpha \in [0,1]$, $\alpha y \in Y$.
  7. Retornos de escala no decrecientes: Si $y \in Y$ entonces para todo $\alpha \geq 1$, $\alpha y \in Y$.
  8. Retornos constantes de escala: si se cumplen (6) y (7). Geométricamente Y es un cono.

9. Aditividad o entrada libre: Si $y \in Y$ y $y' \in Y$ entonces $y + y' \in Y$. La interpretación como entrada libre se refiere al caso en el que Y es el conjunto de posibilidades de producción agregado de la economía. Si una firma incumbente puede producir $y \in Y$ y una firma entrante $y' \in Y$, entonces se debe poder producir $y + y' \in Y$ (no hay interferencia).
10. Convexidad: Y es convexo. Si la tecnología permite parar entonces la convexidad implica retornos no crecientes de escala.
11. Cono convexo: Retornos constantes de escala y convexidad.

Proposición 9 *El conjunto de posibilidades de producción es aditivo y satisface la propiedad de retornos no crecientes de escala si y sólo si es es un cono convexo.*

- Cuando la firma produce un único bien es común describir su tecnología utilizando una función de producción $f : R_{+}^{L-1} \to R$ tal que si $(x_1, ..., x_{L-1}) \in R_{+}^{L-1}$ denota los insumos de producción, entonces $f(x_1, ..., x_{L-1})$ denota la máxima cantidad que se puede producir con esos insumos. Luego el conjunto de capacidades tecnológicas de la firma se puede describir mediante la siguiente función de transformación:

$$Y = \{(-x_1, ..., -x_{L-1}, y) \in R^L : x_l \geq 0,\ y \leq f\left(x_1, ..., x_{L-1}\right)\} \tag{1}$$

Obsérvece que la función de transformación se puede definir como $F(x_1, ..., x_L) = x_L - f\left(-x_1, ..., -x_{L-1}\right)$.

La tasa marginal de sustitución técnica se define como:

$$MRTS_{l,k}(x) = \frac{\partial f / \partial x_l}{\partial f / \partial x_k}$$

- Para el caso de un solo producto, las propiedades sobre el conjunto de posibilidades tecnológicas se traducen fácilmente en propiedades sobre la función de producción que lo define. Por ejemplo, la tecnología es convexa si sólo si la función de producción es cóncava.

Ejemplo 25 *La función de producción CES homogénea de grado uno para el caso de dos insumos se define como:*

$$y = (\alpha x_1^{\rho} + (1 - \alpha) x_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$$

donde $\rho < 1,\ \rho \neq 0$.

Ejercicio 24 *Este ejercicio muestra que la función de producción CES generaliza las funciones de producción lineal* $(\rho = 1)$*, Leontieff* $(\rho \to -\infty)$ *y Cobb - Douglas* $(\rho = 0)$.

1. *Calcular el límite cuando $\rho \to -\infty$ y mostrar que converge a la función de producción de Leontieff:*

$$y = \min\{x_1, x_2\}$$

2. *Calcular el límite cuando $\rho \to 0$ y mostrar que la función converge a la función de producción Cobb - Douglas:*

$$y = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

   Obsérvese que cuando $\rho \to 0$ el término $\alpha x_1^{\rho} + (1-\alpha)x_2^{\rho}$ tiende a 1 y $\frac{1}{\rho}$ tiende a infinito luego la convergencia no está bien definida. Esto sugiere utilizar algún tipo de transformación que lleve a las formas indefinidas de calcular límites donde se puede aplicar la regla de L´Hopital. Ayuda: calcular el logarítmo en ambos lados.

Ejercicio 25 *De forma más general podemos definir la función de producción CES homogénea de grado uno para el caso de dos insumos como:*

$$y = \left(\alpha\left(\beta x_1\right)^{\rho} + (1-\alpha)\left((1-\beta)x_2\right)^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

donde $\rho < 1$, $\rho \neq 0$.

1. *Calcular el límite cuando $\rho \to -\infty$ y mostrar que converge a la función de producción de Leontieff:*

$$y = \min\{\beta x_1, (1-\beta)x_2\}$$

2. *Calcular el límite cuando $\rho \to 0$ y mostrar que la función converge a la función de producción Cobb - Douglas:*

$$y = Bx_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

   donde B es una constante.

Ejercicio 26 *Dada una función de producción f, definimos la elasticidad de sustitución $\sigma_{i,j}$ entre los insumos i, j como:*

$$\sigma_{i,j} = \frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\frac{x_j}{x_i}} \frac{\frac{f_i(x)}{f_j(x)}}{d\left(\frac{f_i(x)}{f_j(x)}\right)}$$

donde f_i y f_j son los productos marginales de cada insumo.

Un caso fácil de calcular la esta elasticidad es cuando $\frac{f_i(x)}{f_j(x)}$ se puede expresar como una función de $\frac{x_j}{x_i}$. En este caso:

$$\sigma_{i,j} = \frac{\frac{f_i(x)}{f_j(x)}}{\frac{x_j}{x_i}} \left(\frac{d\left(\frac{f_i(x)}{f_j(x)}\right)}{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}\right)^{-1}$$

Demostrar que la elasticidad de sustitución la función de producción CES es constante e igual a $\frac{1}{1-\rho}$. *Luego la elasticidad de sustitución de la la función de producción lineal es* ∞, *la de la función de producción Leontieff es* 0 *y la elasticidad de sustitución de la función de producción Cobb-Douglas es* 1.

Definición 13 (Retornos de escala) *Una función de producción:*

1. *Tiene retornos constantes de escala si* $f(tx) = tf(x)$ *para todo* $t > 0$.
2. *Tiene retornos crecientes de escala si* $f(tx) > tf(x)$ *para todo* $t > 1$.
3. *Tiene retornos decrecientes de escala si* $f(tx) < tf(x)$ *para todo* $t < 1$.

Ejercicio 27 *Muestre que con las modificaciones obvias a las definiciones dadas anteriormente de tecnologías no decrecientes, no crecientes y con retornos constantes de escala la función de producción tiene las propiedades de la definición anterior.*

- Un resultado interesante para varificar si una función es cóncava (tecnología convexa) es el siguiente lema de Shephard.

Lema 1 (Shephard) *Si una función de producción es continua, estrictamente creciente, estrcitamente cuasicóncava,* $f(0) = 0$ *y es homegénea de grado* 1 *entonces es cóncava.*

9.1. Maximización del beneficio

- En esta seción vamos a suponer que las firmas tienen como objetivo maximizar su beneficio (esta hipótesis no es completamente obvia ya que debería de deducirse de los objetivos de los dueños de firma). Bajo ciertas circunstancias es posible mostrar que este es el caso en una firma de propiedad privada.
- Sea $p \in R^L_{++}$ el vector de precios de los L commodities.
- Suponemos que el conjunto de posibilidades de producción de la firma es no vacio, cerrado y satisface la propiedad de libre disposición.
- El problema de maximización de beneficios es:

$$\begin{array}{rcl} & & \max p \cdot y \\ & & s.a \\ y & \in & Y \end{array}$$

- Definimos la función valor de este problema como la función de beneficio $\pi(p)$ y la correspondencia de oferta $y(p)$ como el conjunto de vectores que resuelven el problema de maximización del beneficio.

- Obsérvese que el conjunto de posibilidades de producción satisface la propiedad de retornos no crecientes de escala entonces $\pi(p) \leq 0$ o $\pi(p) = \infty$.

Proposición 10 *Algunas propiedades de la función de beneficios. Con las hipótesis anteriores sobre Y (conjunto no vacio, cerrado y satisface la propiedad de libre disposición):*

1. *π es homogénea de grado uno.*
2. *π convexa.*
3. *y es homogénea de grado cero.*
4. *Si Y es convexo entonces y es una correspondencia convexa. Si Y es estrictamente convexo entonces y es una función (cuando no es vacia).*
5. *Lema de Hotelling: Si $y(p)$ es un solo punto entonces π es diferenciable y $\nabla \pi(p) = y(p)$.*
6. *Ley de la oferta: Si y es una función diferenciable en p entonces:*

$$\nabla y(p) = \nabla^2 \pi(p)$$

es simétrica y positiva semidefinida. Además, $\nabla y(p) \cdot p = 0$

- Obsérvese que la ley de la oferta se cumple para insumos y productos. Además, la ley de la oferta es independiente del nivel de precios, siempre se cumple, pues en este caso no existe un efecto ingreso (no hay reestricción presupuestal).

- Agregación: Supongamos que existen un número finito de firmas cada una con una tecnología no vacia, cerrada y que satisface la propiedad de libre disposición. Es obvio como definir un conjunto de posibilidades agregado. Ahora, el resultado importante que podemos interpretar como un resultado de descentralización del proceso productivo bajo competencia perfecta es, para todo $p >> 0$:

  1. La función de beneficio de la tecnología agregada es la sumas de las funciones de beneficio.
  2. La correspondencia de planes de producción óptimos agregada es la suma de las correspondencias de planes de producción óptimos.

- Eficiencia: El concepto de eficiencia será un tema central y recurrente en la teoría del equilibrio general. Un concepto básico es el siguiente.

Definición 14 (Eficiencia productiva) *Un plan de producción $y \in Y$ es eficiente si no existe $y' \in Y$, $y' \neq y$ tal que $y' \geq y$.*

- Obsérvese que este concepto de eficiencia asociado una tecnología específica. Por eso podríamos decir que es un concepto de eficiencia a nivel privado.

- Un resultado importante que sirve como antesala a uno de los resultados más importantes de la teoría económica, el primer teorema de la economía del bienestar, es la siguiente proposición que puede interpretarse como una versión de éste.

Proposición 11 (Maximización del beneficio y eficiencia productiva) *Si $y \in Y$ es un plan de producción óptimo para algún $p >> 0$ entonces y es eficiente.*

Prueba. Por contradicción. ■

- El converso de este resultado es parcialmente cierto cuando la tecnología es convexa (afirma la existencia de un $p \geq 0$). El converso es cierto en el caso de la tecnología del modelo de actividad lineal). Estos resultados son versiones del segundo teorema fundamental de la economía del bienestar.

- Objetivos de la firma: mencionamos al comienzo que los objetivos de la firma no son completamente claros en algunas circunstancias. Sin embargo, en una economía de propiedad privada es fácil mostrar que, bajo ciertas circunstancias, el objetivo de maximización de beneficios está alineado con el de maximizar la utilidad de los agentes. Resaltamos algunos de los supuesto necesarios: competencia perfecta, los beneficios no son inciertos y el gerente de la firma puede ser controlado por los dueños de la misma.

9.2. Minimización de costos

- En lo que resta de esa sección vamos a concentrarnos en el caso de un solo bien de producción.

- Sea w el precio de los insumos y y el nivel de producción.

- El problema de minimización de costos (cuando sólo hay un bien de producción) es:

$$\begin{aligned} c(w,y) &= \min_{x \geq 0} w \cdot x \\ & \quad s.a \\ f(x) &\geq y \end{aligned}$$

- La función $c(w,y)$ se conoce como la función de costos condicionales.

- Los insumos que resuelven el problema se llaman la correspondencia de demanda de insumos óptimos.

- Obsérvese la analogía con el problema de minimización del gasto en la teoría del consumidor.

- Si suponemos que la solución al problema de minimización de costos es interior ($x >> 0$), las condiciones de primer orden implican que las tasa marginal de sustitución técnica es igual a los precios relativos de los insumos.

Proposición 12 *Bajo las mismas hipótesis del conjunto de posibilidades de producción de la proposición anterior, la función de costos satisface:*

1. *c es homogénea de grado uno en w y no decreciente en y.*
2. *c es cóncava en w.*
3. *Lema de Shephard: Cuando la correspondencia de demanda es una función, $\nabla_w c(w, y) = x(w, y)$.*
4. *Si f es cóncava entonces c es convexa en y (en particular, los costos marginales son no decrecientes en y).*

Prueba. Vamos a demostrar únicamente la cuarta afirmación. Sea z y z' tales que $c(w, q) = w \cdot z$ y $c(w, q') = w \cdot z'$. Ahora, como z y z' son planes de producción que permiten producir como mínimo q y q' respectivamente se sigue de la concavidad de f que $tz + (1-t)z'$ es un plan de producción que premite producir como mínimo $tq + (1-t)q'$. Por lo tanto $c(w, tq + (1-t)q') \leq w \cdot (tq + (1-t)q') = tw \cdot z + (1-t)w \cdot z' = tc(w, q) + (1-t)c(w, q')$. ■

El problema de la firma que hemos planteado en el curso supone que existe competencia perfecta en el mercado de insumos y el bien final. Adicionalmente, cuando resolvemos el problema de la firma encontramos el nivel óptimo de insumos y producción (escala de operación). En contraste, el problema de minimización de costos que hemos estudiado supone únicamente que hay competencia perfecta en el mercado de insumos y cuando lo resolvemos el resultado final es una demanda condicional de insumos. En efecto, la solución del problema es condicional al nivel de producción seleccionado. Nótese que el problema de minimización de costos hace sentido aún cuando existe competencia imperfecta en el mercado del bien final. Esto sugiere que si minimizamos costos, si suponemos competencia perfecta en el mercado del bien final y si escogemos la escala de forma óptima entonces la solución puede ser equivalente a la que resulta de resolver el problema de la firma y viceversa. De esta forma, el problema de la firma podría considerarse equivalente a un problema en dos estapas: primero minimizar costos y depués seleccionar la escala óptima de operación. En lo que resta de esta sección probamos informalmente las afirmaciones anteriores.

Proposición 13 *Supongamos que existe competencia perfecta en los mercados de insumos y en el mercado del bien final. Sea $x(p, w)$ y $y(p, w)$ la demanda de insumos y la oferta del bien final que resuelven el problema de la firma. Entonces:*

1. $x(p,w)$ resuleve el problema de minimización de costos:

$$c(w, y(p,w)) = \min_{\substack{x \geq 0 \\ f(x) \geq y(p,w)}} w \cdot x$$

2. $y(p,w)$ resuelve el problema de optimización de escala:

$$\max_{y \geq 0} py - c(w,y)$$

y viceversa, si $x(p,w)$ y $y(p,w)$ resuelven los problemas de minimización de costos y el problema de optimización de escala, entonces resuelven el problema de la firma.

Prueba. Primero demostramos que maximizar beneficios implica 1 y 2. Como

$$py(p,w) - w \cdot x(p,w) \geq py - w \cdot x$$

para todo (y,x) tal que $f(x) \geq y$ con igualdad cuando $y = y(p,w)$ y $x = x(p,w)$; se sigue que,

$$p \cdot y(p,w) - w \cdot x(p,w) \geq \max_{x \geq 0, f(x) \geq y} py - w \cdot x$$

para todo y con igualdad cuando $y = y(p,w)$ y $x = x(p,w)$. Por lo tanto

$$py(p,w) - w \cdot x(p,w) \geq py - \min_{x \geq 0, f(x) \geq y} w \cdot x$$

para todo y. En particular cuando $y = y(p,w)$ tenemos una igualdad luego:

$$\min_{x \geq 0, f(x) \geq y(p,w)} w \cdot x \geq w \cdot x(p,w)$$

para todo x con igualdad cuando $x = x(p,w)$. Esto demuestra la primera parte. Para la segunda parte recordemos que

$$c(w,y) = \min_{x \geq 0, f(x) \geq y} w \cdot x$$

luego,

$$py(p,w) - w \cdot x(p,w) \geq py - c(w,y)$$

para todo (y,x) tal que $f(x) \geq y$ con igualdad cuando $y = y(p,w)$. Esto demuestra que cuando $y = y(p,w)$ la escala de operación de la firma es óptima.

De otra parte, sea $x(p,y)$ la demanda condicional de insumos (la solución al problema de minimización de costos) luego $f(x(p,y)) = y$ y $c(w,y) = w \cdot x(p,y)$. Ahora si y resuleve el problema de optimización de escala entonces:

$$\begin{aligned} pf(x(p,y)) - w \cdot x(p,y) &= py - c(w,y) \\ &\geq py' - c(w,y') \text{ para todo } y' \geq 0 \end{aligned}$$

luego:
$$py - c(w, y) \geq pf(x') - c(w, f(x')) \text{ para todo } x' \geq 0$$
y por definición de la demanda condicional de insumos y la función de minimización de costos:

$$pf(x(p, y)) - w \cdot x(p, y) \geq pf(x') - w \cdot x' \text{ para todo } x' \geq 0$$

y esto demuestra que $x(p, y)$ resuelve el problema de la firma cuando $x(p, y)$ es la demanda condicional y $y(p, w)$ resuelve el problema de optimización de escala. ■

9.3. Corto y largo plazo

- En esta sección nos limitamos a hacer una aclaración sobre la geometría de los costos de largo y corto plazo teniendo como referencia el libro de [JR].

- La demostración de la ecuación 3.5 del texto no es completamente trivial y el argumento que se da para la demostración de la ecuación 3.4 es como mínimo, engañoso (la razón es que las función de costo de corto plazo se define a través de una optimización con reestricciones). El argumento formal consiste en aplicar con cuidado las condiciones de primer orden a un problema de optimización sin reestriciones. Por simplicidad, supongamos que tenemos sólo un insumo (el argumento es fácil de extender). Fijemos $w, \overline{w}$:

  1. $c(w, \overline{w}, y) \leq c(w, \overline{w}, y, \overline{x})$ para todo $\overline{x}$ (esto es por definición de ambos problemas).
  2. Además $c(w, \overline{w}, y) = c(w, \overline{w}, y, \overline{x}(w, \overline{w}, y))$
  3. Luego,
  $$c(w, \overline{w}, y) = \min_{x \geq 0} c(w, \overline{w}, y, x)$$
  4. Si suponemos que $\overline{x}(w, \overline{w}, y) > 0$ (que por el numeral 2 es el nivel de insumos que resuleve este problema de optimización) entonces:
  $$\frac{\partial c(w, \overline{w}, y, x)}{\partial x} \Big|_{x = \overline{x}(w, \overline{w}, y)} = 0$$
  que era lo que queríamos demostrar.