13. Economías dinámicas

Lo que hicimos en la sección sobre equilibrio general con producción ciertamente añadió realismo a nuestro modelo de equilibrio general. Quedan, sin embargo, algunas otras críticas al modelo que resultan razonables. Una de ellas, la de que el modelo ignora que las decisiones económicas de los agentes incorporan elementos dinámicos y son tomadas bajo incertidumbre, es abordada aquí. Por simplicidad, consideraremos únicamente economías de intercambio. Infortunadamente, aún bajo el anterior supuesto simplificador, el problema general supera en complejidad el nivel de este curso, razón por la cual aquí vamos a hacer sólo una breve introducción al problema.

Arrow y Debreu fueron los primeros economistas modernos en cuestionar la forma en la que los modelos económicos incorporaban el tiempo y la incertidumbre. Su trabajo inicial tocó estos problemas de la manera más fundamental posible: ¡ellos cuestionaron la forma en la que en los modelos económicos se definían los bienes! Para ellos, no era suficiente decir qué tipo de bien era el que se estaba tratando (desde la perspectiva de una descripción física del mismo). Ellos propusieron que al describir un bien uno debería definir cuidadosamente cuatro aspectos:

1. Tipo de bien: es una descripción física del bien. (Obviamente, no es lo mismo una sombrilla que una papa.)

2. Lugar: ¿dónde está disponible el bien? (No da igual tener la sombrilla al lado de uno que en otra ciudad.)

3. Tiempo: ¿cuándo está disponible el bien? (No es igual tener la sombrilla disponible ahora que haberla tenido ayer o saber que se va a tener mañana.)

4. Estado de la naturaleza: ¿cuáles son las condiciones del mundo en las cuales disponemos del bien? (No da igual tener la sombrilla cuando está lloviendo que cuando no lo está.)

La incorporación del lugar en el cual el bien está disponible no es un ejercicio difícil (uno podría incorporarlo como parte de la definición del tipo de bien). Nos preocupamos ahora por la introducción a nuestro problema de las otras dos dimensiones, lo cual haremos de manera bastante simplificada. Supondremos que en la economía hay dos consumidores, $i = 1, 2$, y dos (tipos físicos de) bienes, $l = 1, 2$. Supondremos, sin embargo, que existen dos periodos de tiempo, el presente y el futuro, y que en el periodo futuro hay dos estados posibles de la naturaleza.

Específicamente, supondremos que los agentes se encuentran en el periodo presente, preocupados acerca de su bienestar en el periodo futuro. Con esta simple modificación al modelo de equilibrio general, ya estamos haciendo nuestro problema dinámico. Por supuesto, uno puede modelar problemas dinámicos en los que el futuro es perfectamente previsible. Una alternativa más interesante, sin embargo, es permitir que en periodos futuros puedan existir diferentes estados de la naturaleza en los cuales la riqueza y/o los gustos de los agentes cambien.

Aquí supondremos que en el período futuro de la economía pueden existir dos diferentes estados de la naturaleza, $s = 1, 2$. El estado incial lo denotamos por $s = 0$. La riqueza de los consumidores dependerá del estado de la naturaleza en el cual la economía se encuentre. Esto quiere decir que si el estado de la naturaleza es s, el agente i recibirá una dotación $\left(w^i_{1,s}, w^i_{2,s}\right)$ de bienes. Suponemos como antes que $\left(w^i_{1,s}, w^i_{2,s}\right) \in \mathbb{R}^2_+$ y denotamos $w^i_s = \left(w^i_{1,s}, w^i_{2,s}\right)$ y $w^i = \left(w^i_0, w^i_1, w^i_2\right) \in \mathbb{R}^6_+$.

Asímismo, si denotamos por $x^i_{l,s}$ el consumo que el agente i hace del bien l en el estado de la naturaleza s, entonces es claro que, en el periodo actual, cuando el agente i está pensando en su bienestar del periodo futuro, éste depende de su consumo de ambos bienes en todos los estados de la naturaleza:

$$\left(x^i_{1,0}, x^i_{2,0}, x^i_{1,1}, x^i_{2,1}, x^i_{1,2}, x^i_{2,2}\right)$$

Resulta entonces que las preferencias de los agentes (desde el punto de vista del presente) están representadas por una función de utilidad

$$u^i : \mathbb{R}^6_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

Con estos elementos, nuestra economía queda totalmente descrita. En otras palabras, cuando hablemos en esta sección de una economía nos estamos refiriendo a un par de funciones de utilidad u^1 y u^2 y dotaciones w^i_0, w^i_1 y w^i_2.

13.0.1. Tipos de mercados y el concepto de equilibrio

En esta seccion vamos a introduccir diferentes estructuras de mercado que, en principio, son bastante naturales.

Debreu consideró la siguiente estructura de mercado. Suponga que en el periodo presente se abren mercados en los que los agentes pueden comprar y vender derechos a consumir en el periodo futuro (i.e., mercados contingentes) así como mercados para cada uno de los bienes de consumo. Más específicamente, en el caso de los mercados contingentes, para cada bien l y cada estado de la naturaleza s existe un mercado en el que se da un precio $p_{l,s}$ y en el que los agentes pueden ir a comprar derechos a cantidades de ese bien en ese estado de la naturaleza. Así, si el agente 1 compró derechos a consumir 5 unidades del bien 2 en el estado de la naturaleza 1, entonces él tiene la certeza de que si en el futuro el estado que ocurre es 1, él va a poder consumir 5 unidades del bien 2: $x^1_{2,1} = 5$. En el caso del mercado de bienes de consumo, este opera exactamente de la misma forma que en las secciones anteriores.

El supuesto de Debreu es que cada agente i acude a estos mercados y transa derechos de consumo futuro a los precios vigentes, sujeto únicamente a que el valor de los derechos comprados no supere el valor de los derechos que él posee como riqueza: la asignación w^i. Puesto de otra forma, el agente i sabe que, por dotación, el nace con derecho a consumir $w^i_{l,s}$ unidades del bien l cuando el estado de la naturaleza es s; lo que él hace es vender y comprar derechos de consumo, sujeto a que el valor de los derechos con los que él termine no supere el valor de los derechos que él tiene como asignación. Por supuesto, las decisiones del agente en estos mercados van a determinar los consumos que él tenga en el futuro y, por tanto, el agente las tomará de una manera óptima según sus preferencias. Esto quiere decir que, dados unos precios $P = (P_{1,0}, P_{2,0}, P_{1,1}, P_{2,1}, P_{1,2}, P_{2,2})$ el agente i decidirá cuánto comprar o vender en estos mercados de forma tal que él resuelva el siguiente problema:

$$\text{máx}\, u^i\,(x_0, x_1, x_2)$$

$$\text{s.a.}\quad P_0 \cdot x_0 + P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 \leqslant P_0 \cdot w_0 + P_1 \cdot w_1 + P_2 \cdot w_2$$

Bajo esta estructura de mercados, es fácil definir el equilibrio general:

Definición 20 *Dada una economía, un equilibrio general de mercados contingentes es un par compuesto por unos precios $p = (p_0, p_1, p_2)$ y unas demandas individuales $x^1 = \left(x_0^1, x_1^1, x_2^1\right)$ y $x^2 = \left(x_0^2, x_1^2, x_2^2\right)$ tales que:*

1. *Para cada agente, su demanda maximiza su bienestar sujeto a su restricción presupuestal: para cada agente i,*

$$\begin{aligned} u^i\left(x_0^i, x_1^i, x_2^i\right) &= \text{máx}\, u^i\,(x_0, x_1, x_2) \\ p_0 \cdot x_0 + p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 &\leqslant p_0 \cdot w_0 + p_1 \cdot w_1 + p_2 \cdot w_2 \end{aligned}$$

2. *Los mercados contingentes están en equilibrio: para cada bien l y cada estado de la naturaleza s:*

$$x_{l,s}^1 + x_{l,s}^2 = w_{l,s}^1 + w_{l,s}^2$$

Es claro que la definición anterior es un análogo perfecto de la definición de las secciones anteriores. Se concluye, por tanto, que todas las propiedades positivas y normativas que estudiamos anteriormente se pueden transladar a este concepto de equilibrio.

La estructura de mercados de Debreu puede resultar inapropiada en muchos casos de la vida real: si bien en algunos países en tiempos recientes se han venido desarrollando mercados que se parecen a los que consideró Debreu, también es cierto que en la mayoría de los países ese tipo de mercados aun está lejos de desarrollarse y, aun en aquellos en los que más se ha desarrollado, lo que hoy existe dista de ser completo en el sentido de existan derechos de consumo para todos los bienes y para todos los estados de la naturaleza. Lo que sí existe en la mayoría de las economías es un mercado de activos, los cuales uno adquiere en el presente y constituyen promesas de algún retorno monetario futuro que depende del estado de la naturaleza que ocurra.

La estructura de mercados que Arrow consideró es una idealización de los mercados de activos.[14] El supuso que lo único que se transaba en el periodo

[14] Específicamente los activos que vamos a considerar son activos nominales.

presente de la economía son activos y que existía, para cada estado de la naturaleza s, un activo cuyo retorno futuro es \$1 si ese estado s de la naturaleza ocurre y \$0 si el estado no ocurre. En nuestro caso, lo que estamos suponiendo es que en el periodo presente los agentes sólo se dedican a comprar y vender activos financieros y que sólo existen dos activos financieros: el activo 1 es una promesa de pagar una unidad monetaria en el periodo futuro si el estado de la naturaleza es 1 y de no pagar nada si el estado es 2; el activo 2 es la promesa contraria, es decir la que paga \$1 si el estado es 2 y \$0 si el estado es 1. Luego, en el periodo futuro, el ingreso que cada agente será determinado, según el estado de la naturaleza, por el valor de la dotación que el agente recibe en ese estado de la naturaleza y el rendimiento, también en ese estado de la naturaleza, de los activos que el agente compró en el periodo presente.

Así, supongamos que q_1y q_2 son, respectivamente, los precios de los activos 1 y 2. Supongamos que el agente i demanda z_1^i y z_2^i unidades de dichos activos. ¿Cuál es la restricción que el agente enfrenta al momento de transar activos? Como es natural en economía, lo que suponemos es que los agentes en ningún momento gastan más que el valor de la riqueza que tienen disponible. En este caso, el ingreso disponible en el periodo presente es la diferencia entre su ingreso menos el costo del consumo inicial, luego la restricción que el agente i enfrenta en el periodo presente es:

$$q_1 z_1^i + q_2 z_2^i \leqslant p_0 \cdot w_0 - p_0 \cdot x_0$$

Ahora, supongamos que en el periodo futuro, en el estado s de la naturaleza, los precios (correctamente previstos) de los dos bienes son $p_{1,s}$ y $p_{2,s}$. Nuevamente, el valor del consumo del agente en el estado s a estos precios no puede superar el ingreso del cual el agente dispone. En este caso, si en el periodo presente el agente ha adquirido z_s^i unidades del activo s, la riqueza total del agente es

$$p_{1,s} w_{1,s}^i + p_{2,s} w_{2,s}^i + z_s^i$$

con lo cual la restricción presupuestal del agente en s es

$$p_{1,s} x_{1,s}^i + p_{2,s} x_{2,s}^i \leqslant p_{1,s} w_{1,s}^i + p_{2,s} w_{2,s}^i + z_s^i$$

Así, el problema que el agente resuelve en el periodo presente es

$$\max_{x,z} u^i (x_0, x_1, x_2)$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} q_1 z_1^i + q_2 z_2^i \leqslant p_0 \cdot w_0 - p_0 \cdot x_0 \\ p_{1,1} x_{1,1} + p_{2,1} x_{2,1} \leqslant p_{1,1} w_{1,1}^i + p_{2,1} w_{2,1}^i + z_1^i \\ p_{1,2} x_{1,2} + p_{2,2} x_{2,2} \leqslant p_{1,2} w_{1,2}^i + p_{2,2} w_{2,2}^i + z_2^i \end{cases}$$

(debe notarse que, aunque mantenemos el supuesto de que los agentes no pueden consumir cantidades negativas de bienes, sí es posible que las variables z tomen valores negativos: los agentes pueden vender activos, lo cual quiere decir que ellos se comprometen a transferir dinero si el respectivo estado de la naturaleza ocurre.)

Con esto en mente, es fácil definir el equilibrio general: los agentes deben resolver óptimamente sus problemas y los mercados, tanto de bienes como de activos, deben ajustarse. En el mercado de bienes, la oferta esta dada por las dotaciones de bienes. En el mercado de activos la oferta agregada es cero. Así,

Definición 21 *Dada una economía, un equilibrio general en activos de Arrow es un vector de precios de activos, $q = (q_1, q_2)$, vectores de precios de los bienes en cada estado de la naturaleza, $p = (p_0, p_1, p_2)$, demandas de bienes para cada uno de los agentes, $x^1 = \left(x_0^1, x_1^1, x_2^1\right)$ y $x^2 = \left(x_0^2, x_1^2, x_2^2\right)$, y demandas de activos para cada uno de los agentes, $z^1 = \left(z_1^1, z_2^1\right)$ y $z^2 = \left(z_1^2, z_2^2\right)$ tales que:*

1. *Cada agente maximiza su utlilidad bajo la restricción presupuestal implicada por los precios: para cada i,*

$$u^i\left(x_0^i, x_1^i, x_2^i\right) = \max_{x,z} u^i\left(x_0, x_1, x_2\right)$$
$$s.a. \begin{cases} q_1 z_1^i + q_2 z_2^i \leqslant p_0 \cdot w_0 - p_0 \cdot x_0 \\ p_{1,1}x_{1,1} + p_{2,1}x_{2,1} \leqslant p_{1,1}w_{1,1}^i + p_{2,1}w_{2,1}^i + z_1^i \\ p_{1,2}x_{1,2} + p_{2,2}x_{2,2} \leqslant p_{1,2}w_{1,2}^i + p_{2,2}w_{2,2}^i + z_2^i \end{cases}$$

2. *Los mercados de bienes se equilibran: para cada l y cada s,*

$$x_{l,s}^1 + x_{l,s}^2 = w_{l,s}^1 + w_{l,s}^2$$

3. *Los mercados de activos se equilibran:*

$$\begin{aligned} z_1^1 + z_1^2 &= 0 \\ z_2^1 + z_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Puede que esto no sea obvio, pero la definición de equilibrio que acabamos de dar es, bajo ciertas condiciones, equivalente a la de equilibrio con mercados contingentes. Esto es dada una economía, unos precios y una asignación son un equilibrio en mercados contingentes si y sólo si ellos tambien hacen parte de un equilibrio con activos de Arrow de la misma economía. La razón por la que esto es así está plenamente estudiada: en una economía de mercados contingentes, los agentes enfrentan una sola restricción presupuestal, lo cual quiere decir que ellos pueden tranferir riqueza libremente entre estados de la naturaleza; con activos de Arrow, los agentes enfrentan varias restricciones, ¡pero la estructura de activos es tal que ellos aún pueden transferir riqueza libremente!

Esta equivalencia implica que todas las propiedades, positivas y normativas, del concepto de equilibrio en mercados contingentes son compartidas con los mercados en con activos de Arrow.

Formalmente sea $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y supongamos que existe $\pi \in R_{++}^2$ tal que $\pi R = q$. Por ejemplo, esto sucede cuando $q >> 0$. Entonces es fácil ver que si

(x, p, q) es un equilibrio con mercados financieros de Arrow, entonces (x, P) es un equilibrio con mercados contingentes donde $P = (p_0, \pi_1 p_1, \pi_1 p_1)$ y viceversa.

Las condiciones bajos las cuales existe $\pi \in R^2_{++}$ tal que $\pi R = q$ son equivalentes a lo que se conoce como condiciones de no arbitraje que básicamente caracterizan las situaciones bajos las cuales el problema del consumidor con activos de Arrow, tiene una demanda bien definida de bienes y activos.

Si bien la estructura de mercados introducida por Arrow parece más realista que la de Debreu, aún no resulta una descripción plenamente real de los mercados. Radner hizo este punto y generalizó el análisis de Arrow. Lo que Radner observó es que en la vida real uno no tiene, en general, la oportunidad de transar en activos de Arrow. En cambio, lo que uno puede transar en el presente son activos financieros, cuyo retorno en el periodo futuro dependerá del estado de la naturaleza que ocurra, pero que no necesariamente será \$1 en un cierto estado y \$0 en el otro.

En nuestro caso, supondremos que hay 2 activos, $a = 1, 2$. El retorno de cada activo es la cantidad de dinero que el poseedor del activo recibirá, por unidad de él, en el periodo futuro, lo cual dependerá del estado de la naturaleza. Así, si el estado de la naturaleza es s, denotaremos por $r_s^a \in \mathbb{R}$ el retorno que el activo a pagará por unidad. Ahora, denotaremos por z_a^i la cantidad de activo i demandada por el agente a.

Como antes, si los precios de los activos son q_1 y q_2, la restricción que el agente i enfrentará en el periodo presente es

$$q_1 z_1^i + q_2 z_2^i \leqslant p_0 \cdot w_0 - p_0 \cdot x_0$$

Nota técnica 12 *Nótese que esta restricción luce igual que que bajo activos de Arrow. No se debe olvidar, sin embargo, que ya no es cierto que los nombres de los activos correspondan a estados de la naturaleza.*

Nuevamente, los precios futuros (correctamente previstos) de los dos bienes son $p_{1,s}$ y $p_{2,s}$ en el estado s de la naturaleza y el valor del consumo del agente en el estado s a estos precios no puede superar el ingreso del cual el agente dispone. En este caso, si en el periodo presente el agente ha adquirido z_a^i unidades del activo a, el retorno total que él recibe por concepto de este activo es $r_s^a z_a^i$, con lo cual su riqueza total es

$$p_{1,s} w_{1,s}^i + p_{2,s} w_{2,s}^i + r_s^1 z_1^i + r_s^2 z_2^i$$

y su restricción presupuestal en s es

$$p_{1,s} x_{1,s}^i + p_{2,s} x_{2,s}^i \leqslant p_{1,s} w_{1,s}^i + p_{2,s} w_{2,s}^i + r_s^1 z_1^i + r_s^2 z_2^i$$

Así, el problema que el agente resuelve en el periodo presente es

$$\max_{x,z} u^i (x_0, x_1, x_2)$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} q_1 z_1^i + q_2 z_2^i \leqslant p_0 \cdot w_0 - p_0 \cdot x_0 \\ p_{1,1} x_{1,1} + p_{2,1} x_{2,1} \leqslant p_{1,1} w_{1,1}^i + p_{2,1} w_{2,1}^i + r_1^1 z_1^i + r_1^2 z_2^i \\ p_{1,2} x_{1,2} + p_{2,2} x_{2,2} \leqslant p_{1,2} w_{1,2}^i + p_{2,2} w_{2,2}^i + r_2^1 z_1^i + r_2^2 z_2^i \end{cases}$$

Con esto, el concepto de equilibrio que surge es:

Definición 22 *Dada una economía, supongamos que los retornos de los activos son r_1^1, r_2^1, r_1^2 y r_2^2. Un equilibrio general en activos financieros es un vector de precios de activos, $q = (q_1, q_2)$, vectores de precios de los bienes en cada estado de la naturaleza, $p_1 = (p_{1,1}, p_{2,1})$ y $p_2 = (p_{1,2}, p_{2,2})$, demandas de bienes para cada uno de los agentes, $x^1 = \left(x_{1,1}^1, x_{2,1}^1, x_{1,2}^1, x_{2,2}^1\right)$ y $x^2 = \left(x_{1,1}^2, x_{2,1}^2, x_{1,2}^2, x_{2,2}^2\right)$, y demandas de activos para cada uno de los agentes, $z^1 = \left(z_1^1, z_2^1\right)$ y $z^2 = \left(z_1^2, z_2^2\right)$ tales que:*

1. *Cada agente maximiza su utlilidad bajo la restricción presupuestal implicada por los precios: para cada i,*

$$\begin{aligned} u^i\left(x_0^i, x_1^i, x_2^i\right) &= \max_{x,z} u^i\left(x_0, x_1, x_2\right) \\ & s.a. \begin{cases} q_1 z_1 + q_2 z_2 \leqslant p_0 \cdot w_0 - p_0 \cdot x_0 \\ p_{1,1}x_{1,1} + p_{2,1}x_{2,1} \leqslant p_{1,1}w_{1,1}^i + p_{2,1}w_{2,1}^i + r_1^1 z_1^i + r_1^2 z_2^i \\ p_{1,2}x_{1,2} + p_{2,2}x_{2,2} \leqslant p_{1,2}w_{1,2}^i + p_{2,2}w_{2,2}^i + r_2^1 z_1^i + r_2^2 z_2^i \end{cases} \end{aligned}$$

2. *Los mercados de bienes se equilibran: para cada l y cada s,*

$$x_{l,s}^1 + x_{l,s}^2 = w_{l,s}^1 + w_{l,s}^2$$

3. *Los mercados de activos financieros se equilibran:*

$$\begin{aligned} z_1^1 + z_1^2 &= 0 \\ z_2^1 + z_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Debe ser claro que esta definición generaliza la de Arrow, pero que, las definiciones no son equivalentes. El punto es que en Arrow (como en Debreu) cualquier transferencia de riqueza entre estados futuros de la naturaleza es posible, gracias a los mercados que existen en el presente. De nuestro conocimiento de algebra lineal debe ser claro que pueden existir retornos de los activos (r_1^1, r_2^1, r_1^2 y r_2^2) tales que no toda transferencia de riqueza entre estados de la naturaleza es posible. Este es el caso cuando los retornos de un activos no son más que un multiplo de los retornos del otro activo.

Cuando los retornos de los activos son tales que cualquier transferencia de riqueza es posible por medio de un portafolio de activos, se dice que la economía tiene mercados completos. En este caso, la definición anterior es equivalente a la de Arrow (y por tanto a la de Debreu), razón por la cual es obvio que todas las propiedades, positivas y normativas, del modelo de las secciones anteriores las cumple este nuevo concepto de equilibrio.

Las cosas son mucho más complicadas cuando la estructura de activos es tal que no todas las transferencias de riqueza pueden realizarse. En este caso se dice que la economía tiene mercados incompletos y esta nueva definición de equilibrio no es equivalente a las anteriores. Es más, las propiedades, positivas y normativas, más importantes de las conceptos de equilibrio anteriores no están garantizadas para nuestro nuevo concepto cuando los mercados son incompletos. En efecto, es posible construir economías para las que no existe equilibrio aunque se ha demostrado que éstas economías son una gran minoría (es decir, en casi todas las economías el equilbrio existe). Aún más importante es el hecho de que con mercados incompletos no tenemos garantía de que la conclusión del primer teorema de economía del bienestar se cumpla y, de hecho, se ha demostrado que cuando los mercados son incompletos, en casi todas las economías los equilibrios de mercados de activos no son eficientes en el sentido de Pareto.

Este último resultado aparece como un primer llamado a que la autoridad de política económica tome acciones de intervención en el resultado arrojado por los mercados. Situaciones de este tipo suelen conocerse como *fallas de mercado*. En efecto, la incompletitud de los mercados es un primer ejemplo de una falla de mercado; otros ejemplos de fallas del mercado son las economías con externalidades, economías con bienes públicos, asimetrías de información, etc. Todas estas las estudiaremos más adelante.

13.0.2. No arbitrage y valoración de activos

El modelo con activos financieros de la sección anterior nos permite explorar varios aspectos importantes que los agentes económicos enfrentan debido a la dimensión temporal de la decisiones económicas o a la incertidumbre con la que estos se enfrentan. Primero consideremos el caso de valorar una activo financiero replicable mediante los instrumentos existentes en el mercado. Más precisamente, supongamos que estamos en el mundo de la sección anterior. Decimos que un activo financiero $(\overline{r}_1, \overline{r}_2)$ es replicable mediante la estructura de activos existentes (r_1^1, r_2^1, r_1^2 y r_2^2), si existe un portafolio (z_1, z_2) tal que:

$$\begin{bmatrix} \overline{r}_1 \\ \overline{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^1 & r_1^2 \\ r_2^1 & r_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, si existe un equilibrio con los activos financieros (r_1^1, r_2^1, r_1^2 y r_2^2), existe un equilibrio en la economía que se obtiene de aumentar un nuevo activo $(\overline{r}_1, \overline{r}_2)$. Más aún, las asignaciones y precios de equilibrio de los bienes son las mismas y si q_1, q_2 y $\overline{q}$ son los precios de equilibrio de los activos, entonces:

$$\overline{q} = q_1 z_1 + q_2 z_2$$

La anterior relación entre el precio del activo $(\overline{r}_1, \overline{r}_2)$ y el de los dos activos que lo replican ilustra un principio basico de finanzas. En equilibrio, el precio de un activo debe ser igual al precio del portafolio de activos que lo replica de lo contrario, exitiría una *oportunidad de arbitrage*. Una oportunidad de arbitrage es una situación en la cual a los precios vigentes de los activos sería posible obtener un beneficio con probabilidad positiva, sin asumir ningún riesgo y sin incurrir en ningún costo. Supongamos por ejemplo que $\overline{q} > q_1 z_1 + q_2 z_2$. Enotonces, un agente podría vender a descubierta una unidad del activo $(\overline{r}_1, \overline{r}_2)$ y utilizar este dinero para comprar z_1 y z_2 unidades de los activos 1 y 2 En esta operación el obtendría un beneficio estrictamentte positivo. Ahora, en el siguiente periodo, puesto que el portafolio de activos que el compro replica perfectamente aquel que vendio a descubierta el periodo pasado entonces el puede cumplir sin ningun riesgo con las obligaciones que adquirio al vender en el primer periodo el activo $(\overline{r}_1, \overline{r}_2)$. En conclusión, a estos precios, un agente podría aumentar su ingreso de forma ilimitada en el primer periodo. Por lo tanto, el problema del agente no tendría solución. Un argumento similar muestra que $\overline{q} < q_1 z_1 + q_2 z_2$ no es posible.

Ejercicio 40 *Considere la misma economía de la sección anterior.*

1. *Defina un bono libre de riesgo. Establecer las condiciones bajo las cuales el bono es replicacable utilizando los otros dos activos. Calcular el precio al cual se compra el bono en función del precio de los otros dos activos.*

2. *Defina un contrato futuro sobre el bien de la economía. Establecer las condiciones bajo las cuales el futuro es replicacable utilizando los otros dos activos. Calcular el precio de ejercicio del futuro en función del precio de los otros dos activos de tal forma que no existan oportunidades de arbitrage. Obsérvese que este precio de ejercicio no depende la distribución de probabilidad con la que se realizan los estados futuros de la naturaleza. Calcular el precio de ejercicio en función del precio del bono del numeral anterior.*

3. *Defina una opción de compra Europea sobre el bien de la economía. Establcer las condiciones bajo las cuales la opción es replicacable utilizando los otros dos activos. Calcular el valor de opción en función del precio de los otros dos activos. Escribir el valor de la opción como un valor esperado descontado por la tasa de descuento implícita del bono del primer numeral.*

13.0.3. Precios intertemporales e ineficiencia del equilibrio

- Supongamos el caso más sencillo posible de una economía de Radner.

- Existe un único bien de consumo en cada estado.

- Existe un único activo financiero, un bono libre de riesgo cuyo precio en $t = 0$ lo denotamos por:
$$q = \frac{1}{1+r}$$
y que promete pagar una unidad independientemente del estado de la naturaleza que en el siguiente periodo se realize. Obsérvese que r es la rentabilidad del activo.

- Supongamos que cada agente i tiene una probabilidad "subjetiva"sobre la realización de los estados en el periodo siguiente. Denotamos la probabilidad subjetiva del agente i por el estado $s = 1$ como $\pi^i \in (0, 1)$ luego la probabilidad del segundo estado es $1 - \pi^i$. Adicionalmente, supongamos que la preferencias de los agentes se pueden expresar (representación de von-Neumann y Morgenstern) de la siguiente forma:

$$U^i\left(c_0, c_1, c_2\right) = u^i(c_0) + \beta(\pi u^i\left(c_1\right) + (1-\pi)u^i\left(c_2\right)),$$

donde $\beta \in (0,1)$ y u^i es una función que llamamos la utilidad instantánea. Nótese la siguiente interpretación de la representación anterior de la función de utilidad de los agentes. El término en paréntesis es la utilidad esperada del consumo en el periodo $t = 1$. Al multiplicar por β (un número menor que uno) nos da el valor presente del valor esperado de la utilidad del consumo en $t = 1$. Es decir, el factor β descuenta la utilidad futura a valor presente y refleja el hecho de que los agentes valoran más el presente que el futuro. Luego, otra forma de escribir a función de utilidad anterior es:

$$U^i\left(c_0, c_1, c_2\right) = u^i(c_0) + \beta E^i\left[u^i\left(c\right)\right]$$

donde E^i denota el valor esperado del consumo en $t = 1$ con base en la probabilidad subjetiva de cada agente.

- El problema del consumidor es (obsérvese que hemos normalizado el precio del bien a uno):

$$\begin{aligned} & \max U^i\left(c_0, c_1, c_2\right) \\ c_0 + \frac{1}{1+r} z &= w_0 \\ c_s &= w_s + z,\ s = 1, 2. \end{aligned}$$

  Las condiciones de prmer orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i(c_0)}{\partial c} &= \lambda_0^i \\ \beta \pi^i \frac{\partial u^i(c_1)}{\partial c} &= \lambda_1^i \\ \beta\left(1-\pi^i\right) \frac{\partial u^i(c_2)}{\partial c} &= \lambda_2^i \\ \lambda_0^i \frac{1}{1+r} &= \lambda_1^i + \lambda_2^i \end{aligned}$$

- Dos implicaciones nos interesan de las anteriores ecuaciones.

  1. (Ecuación de Euler)

$$\frac{\partial u^i(c_0)}{\partial c} = E^i\left[\beta \frac{\partial u^i(c)}{\partial c}(1+r)\right]$$

     La anterior ecuación pone de manifiesto el papel de la variable r. Ésta es, intuitivamente, la tasa de interés real de la economía. Obsérvese que con esta interpretación la ecuación de Euler refleja la condición de optimalidad estándar de un problema de optimización con reestricciones: en el óptimo los agentes igualan el beneficio marginal al costo marginal. En este caso intertemporal y bajo incertidumbre, la ecución de Euler dice que, el costo marginal de dejar de consumir una unidad de consumo hoy $\frac{\partial u^i(c_0)}{\partial c}$, en el óptimo, debe ser igual al valor presente del valor esperado del beneficio marginal que esa unidad nos puede brindar mañana, $E^i\left[\beta\frac{\partial u^i(c)}{\partial c}(1+r)\right]$. La forma de pensar esto es la siguiente. Hoy dejamos de consumir una unidad de consumo. El costo de esta decisión es $\frac{\partial u^i(c_0)}{\partial c}$. Esta unidad la invertimos en el bono libre de riesgo para obtener una retabilidad bruta $(1+r)$ el día de mañana independientemente del estado de la naturaleza realizado. Ahora, $(1+r)$ unidades del bien de consumo mañana representa una utilidad marginal de $\frac{\partial u^i(c_s)}{\partial c}(1+r)$ mañana en cada estado de la naturaleza $s=1,2$. Luego el valor esperado de la utilidad mañana es $E^i\left[\frac{\partial u^i(c)}{\partial c}(1+r)\right]$ y como la forma de descontar los utiles mañana es con el factor de descuento β, entonces el valor presente del valor eperado de la utilidad marginal mañana es $E^i\left[\beta\frac{\partial u^i(c)}{\partial c}(1+r)\right]$. Por lo tanto, la escogencia óptima de consumo para el agente lo que hace es igualar el costo marginal al beneficio marginal.

2. (No optimalidad del equilibrio). En un equilibrio competitivo, los agentes deben estar maximizando sus utilidades. El siguiente es un argumento informal que sugiere que, en presencia de mercados financieros incompletos, las tasas marginales de sustiución entre agentes no se igualan y por lo tanto, un equilibrio con mercados incompletos no es un óptimo de Pareto. Por ejemplo, supongamos que tenemos dos agentes y calculemos las tasas marginales de sustitución para cada agente entre consumo hoy y consumo en $s=1$.

$$TMS^1_{0,1} = \frac{\frac{\partial U^1(c_0,c_1,c_2)}{\partial c_0}}{\frac{\partial U^1(c_0,c_1,c_2)}{\partial c_1}} = \frac{\lambda^1_0}{\lambda^1_1}(1+r)$$

y

$$TMS^2_{0,1} = \frac{\frac{\partial U^2(c_0,c_1,c_2)}{\partial c_0}}{\frac{\partial U^2(c_0,c_1,c_2)}{\partial c_1}} = \frac{\lambda^2_0}{\lambda^2_1}(1+r)$$

Las tasas marginales de sustitución son iguales si $\frac{\lambda^1_0}{\lambda^1_1} = \frac{\lambda^2_0}{\lambda^2_1}$. Sin embargo, se puede demostrar que esta última igualdad no siempre se cumple.

Ejercicio 41 *Considere una economía idéntica a la descrita en esta sección pero suponiendo que no existe incetidumbre en $t=1$. Esto es, una economía dinámica pero de previsión perfecta.*

1. *Escribir el problema de optimización de cada agente.*

2. *Deducir la ecuación de Euler y dar una interpretación de ésta.*

3. *Mostrar que en este caso las tasas marginaes de sustitución sí se igualan, por lo tanto, se cumple el primer teorema del bienestar.*

4. *¿Es esta economía una economía con mercados financieros completos?*