Métodos matemáticos y computacionales en macroeconomía

Colección Cede
50 Años

Métodos matemáticos y computacionales en macroeconomía

Álvaro J. Riascos Villegas

Universidad de los Andes
Facultad de Economía

50 años
CEDE · Economía

Riascos Villegas, Alvaro José
Métodos matemáticos y computacionales en macroeconomía / Alvaro J. Riascos Villegas. -- Bogotá: Universidad de los Andes, Facultad de Economía, Ediciones Uniandes, 2009.
168 p.; 16,8 x 23,8 cm.

Incluye referencias bibliográficas.

ISBN 978-958-695-423-5

1. Macroeconomía -- Modelos matemáticos 2. Macroeconomía -- Problemas, ejercicios, etc. 3. Economía matemática 4. Macroeconomía -- Simulación por computadores I. Universidad de los Andes (Colombia). Facultad de Economía II. Tít.

CDD. 339.015118 SBUA

Primera edición: septiembre de 2009

Facultad de Economía, Centro de Estudios sobre Desarrollo Económico - Cede
Carrera 1 No. 18A – 12. Bloque C
Teléfono: 3394949 – 3394999. Ext: 2400
Bogotá, D. C., Colombia
infocede@uniandes.edu.co

Ediciones Uniandes
Carrera 1 No 19 – 27. Edificio AU 6
Teléfono: 3394949 – 3394999. Ext: 2133. Fax: ext. 2158
Bogotá, D. C., Colombia
infeduni@uniandes.edu.co

ISBN 978-958-695-423-5

Edición, corrección de estilo, diseño gráfico editorial,
y armada electrónica:
Proceditor ltda.
Calle 1 C No. 27 A – 01
Teléfonos: 2204275 – 2204276
Bogotá, D. C., Colombia
proceditor@etb.net.co

Impresión:
Editorial Kimpres Ltda.
Calle 19 sur No. 69C - 17, Bogotá, D. C.
Teléfono: 4136884
www.kimpres.com

Impreso en Colombia – Printed in Colombia

Contenido

Prefacio

> "...nothing at all takes place in the universe in which some rule of maximum or minimum does not appear"
>
> Leonhard Euler[1]

Este libro es una introducción a los métodos matemáticos y computacionales más utilizados para estudiar una economía a lo largo del tiempo. Se enfoca, específicamente, en los métodos y algoritmos derivados del método de programación dinámica y del método de Lagrange.

En términos generales, la exposición es tal que toda persona con una formación sólida en matemáticas se sentirá a gusto con el grado de formalismo presentado en él. Para los lectores más formales matemáticamente, los capítulos 2 y 3 son un esfuerzo por plantear formalmente el problema, el lenguaje y el alcance de los métodos presentados en los capítulos posteriores. En todo caso, el nivel y los conocimientos de matemáticas exigidos son aquellos que tradicionalmente se enseñan en una buena carrera de economía, a saber: cálculo diferencial con múltiples variables, cálculo integral, probabilidad básica y los conceptos o teoremas propios que aparecen en los cursos de microeconomía avanzada, como son, por ejemplo, el de correspondencias y el teorema del punto fijo. En resumen, el nivel de formalización utilizado es suficiente para no generar dudas o imprecisiones, permitiendo, a su vez, que el libro pueda ser utilizado por personas con un interés más aplicado.

Como texto de enseñanza, puede ser la base para un curso de programación dinámica con diferentes niveles de intensidad; también puede ser usado dentro de un curso de métodos matemáticos y computacionales para economistas, o en un curso corto de métodos computacionales. Por ejemplo, los capítulos primero y cuarto sirven como introducción al método de programación dinámica en un curso de matemáticas para economistas. Los capítulos 1 al 4 son una introducción más completa y formal desde un punto de vista puramente teórico, y los capítulos 1, 4, 5, 6 y 7 sirven como una introducción práctica a los métodos matemáticos y computacionales. Finalmente, la totalidad del libro serviría de base para un curso, de un semestre, sobre métodos

[1]Citado en Weitzman, M. 2003. Income, Wealth and the Maximum Principle. Página 18. Harvard University Press.

matemáticos y computacionales en macroeconomía. En la página web del libro: www.webpondo.org/ariascos/mmcm.html, el lector encontrará códigos de computador, la mayoría de ellos en Matlab, que implementan una gran cantidad de los algoritmos propuestos. Así mismo, hallará soluciones a algunos ejercicios, complementos bibliográficos y errores tipográficos que detecten los lectores.

Al ser un libro introductorio a nivel de posgrado, su contenido no es original. La mayor contribución radica en el esfuerzo realizado para tender un puente entre el tratamiento básico de estos métodos, usualmente relegados a los apéndices de los libros de macroeconomía utilizados en un curso del pregrado, y el tratamiento avanzado del tema, encontrado en los libros de doctorado. Gran parte del contenido del mismo puede encontrarse en libros y revistas especializados que abordan algunos de los temas aquí expuestos. Mi deuda con aquellos es evidente en muchos de los capítulos y, si no se encuentran referenciados oportunamente, ofrezco disculpas a los autores y prometo corregir este descuido en futuras ediciones.

Muchas personas me han ayudado, directa o indirectamente, a mejorar el libro durante los casi diez años que, en medio de innumerables interrupciones, me ha tomado escribirlo. Agradezco a Katherine Aguirre, Andrés Felipe Arias, Olga Lucía Bríñez, Marcela Eslava, Juanita González, Franz Hamann, Nini Johanna Serna, Luisa Estefanía Valdez y Mauricio Villamizar. Igualmente, agradezco a los numerosos alumnos que padecieron las primeras ediciones de este libro en diferentes cursos de macroeconomía avanzada, métodos computacionales o métodos matemáticos en macroeconomía. Me refiero a alumnos de la Universidad Javeriana de Bogotá, la Universidad de los Andes, la Universidad del Valle, el Instituto de Matemáticas Puras y Aplicadas de Río de Janeiro y los estudiantes del programa de estudios superiores del Banco Central de Guatemala. Agradezco especialmente a Jean Pietro Bonaldi, Miguel Espinosa y Juan David Prada por su excelente labor de revisión de las primeras ediciones. Por supuesto, cualquier error es mi responsabilidad.

Por último, quiero agradecer al Banco de la República por el ambiente propicio durante el tiempo que estuve en el Departamento de Investigaciones de la Subgerencia de Estudios Económicos, lugar donde escribí gran parte de él. De la misma manera, mis más sinceros agradecimientos a la Facultad de Economía de la Universidad de los Andes, pues no deja de sorprender su apoyo casi incondicional a la investigación económica en Colombia.

Para Antonio, Mariana y Martha con la esperanza de que todo lo que hagamos sea para querernos más.

I

Economía dinámica

En términos generales, la actividad económica no puede modelarse como un proceso estático en el tiempo y en condiciones de certidumbre. En la vida real este proceso es dinámico e incierto y, por lo tanto, es natural preguntarse hasta qué punto la teoría del equilibrio general, como la formularon Arrow y Debreu, permite describir la toma de decisiones económicas más realistas.

Es bien sabido que el modelo básico de equilibrio general (Arrow-Debreu en infinitas dimensiones) es suficientemente general para abarcar en términos ideales esta situación. En este modelo el espacio de consumo puede tomarse de tal forma que incluya decisiones intertemporales o contingentes a la realización de eventos aleatorios. Basta indexar los diferentes bienes al momento o evento en el cual son consumidos como cualquier otra característica que los define. De hecho, desde el punto de vista teórico, este abordaje es muy importante. Sin embargo, también es evidente que este modelo no explota de manera explícita la dimensión temporal del problema como tampoco reconoce la imposibilidad, bastante común en la práctica, de diversificación del riesgo que resulta de la realización de los eventos aleatorios.[1] El objetivo de este libro es, en gran parte, introducir al lector en aquellos métodos para modelar la realidad económica que reconocen explícitamente la forma como los agentes en una economía toman decisiones intertemporales y bajo un ambiente de incertidumbre. Concretamente, el énfasis es en cómo resolver estos modelos.

En este capítulo introduciremos de manera informal los métodos matemáticos que se utilizarán en el resto del libro. En la sección A estudiaremos el prototipo de modelo que aparece en el estudio de economías dinámicas, el modelo básico de crecimiento económico, que utilizaremos para introducir las dos técnicas principales para resolver modelos dinámicos. El primero pertenece a los métodos de la programación dinámica, sección B, y el segundo a los de control óptimo (i.e. el método de Lagrange o, más generalmente, el método del Hamiltoniano), sección C. La característica fundamental del

[1] Existen principalmente dos modelos para el estudio de las economías a lo largo del tiempo, con o sin incertidumbre: El modelo de agentes con vidas infinitamente largas y el modelo de generaciones traslapadas. En este libro nos dedicaremos únicamente al primero.

primer método, como quedará claro más adelante, es que explota la naturaleza recursiva del problema; es decir, el hecho de que la estructura del problema de decisión es la misma en todos los períodos. El segundo método explota la geometría del problema.

El modelo básico de crecimiento sin incertidumbre es un problema en el cual las decisiones no dependen de eventos aleatorios y en el cual éstas son tomadas por un agente representativo (o planificador central) sujeto a una sucesión de restricciones de recursos. Más adelante permitiremos que las decisiones dependan de eventos aleatorios y explicaremos cómo extender los métodos de la programación dinámica y control óptimo al caso estocástico.

A. Modelo básico de crecimiento

El problema que queremos estudiar es el del crecimiento de una economía cuando sus agentes deben determinar de manera óptima cuánto consumen y cuánto ahorran en cada instante del tiempo. La parte ahorrada en cada momento se puede invertir en acumulación de capital para el período siguiente, permitiéndole aumentar su producción y, por lo tanto, sus posibilidades de consumo. Un modelo sencillo de crecimiento en un ambiente determinístico, el *modelo básico de crecimiento*, pero que a la vez ilustra plenamente los métodos de la programación dinámica, podría especificarse de la siguiente manera (Ramsey [1928], Cass [1965] y Koopmans [1965]):

Supongamos que existe una gran cantidad de agentes idénticos, con vidas infinitamente largas, y que en cada período del tiempo deben decidir cómo utilizar el único bien de consumo que se produce en esta economía. Denominamos a cualquiera de estos agentes como el agente representativo de la economía. Sea y_t la cantidad producida de este bien durante el período t, utilizando como único insumo la cantidad de cápital k_t. Suponemos que todas las variables son per capita y que la población no crece.

Las posibilidades de producción de esta economía las representamos mediante una función de producción neoclásica f, de tal forma que $y_t = f(k_t)$. Hacemos las hipótesis habituales sobre f : f es una función continua, estrictamente creciente, estrictamente cóncava y $f(0) = 0$. Además, supondremos que $\lim\limits_{k\to 0} f'(k) \to \infty$ y $\lim\limits_{k\to\infty} f'(k) \to 0$ (condiciones de Inada[2]).

En el período t el producto se divide entre el consumo en ese período c_t, y la inversión bruta i_t. Es decir, para todo t,

$$
\begin{aligned}
c_t + i_t &= f(k_t), && \text{(I.1)}\\
c_t, k_t &\geq 0. && \text{(I.2)}
\end{aligned}
$$

[2]El significado económico de estas dos condiciones es claro. Ahora, desde un punto de vista formal, las condiciones implican la existencia de un capital de estado estacionario. Esto se podrá apreciar en el libro más adelante.

Asumimos que el capital se deprecia a una tasa constante $\delta \in [0,1]$; luego la dinámica del capital es:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t. \tag{I.3}$$

Además, suponemos que cada agente tiene la misma cantidad de capital inicial $k_0 \geq 0$.

Finalmente, los agentes tienen preferencias U sobre todas las sucesiones de consumo; suponemos que dichas preferencias son de la siguiente forma:

$$U(c_0, c_1, ...) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \tag{I.4}$$

donde $u(c_t)$ representa la utilidad instantánea del consumo en el período t, y $\beta \in (0,1)$ es un factor que descuenta la utilidad de consumo en el futuro. Implícitamente, hemos supuesto que los agentes le dan más importancia al presente. Otra posible interpretación de β es que representa la probabilidad de no morir de un período a otro.

La pregunta que queremos responder en esta economía es: dado un $k_0 \geq 0$, ¿cómo deben consumir los agentes a través del tiempo $(c_0, c_1, ...)$ de tal forma que maximicen su utilidad I.4, sujeto a la restricción de recursos I.1, no negatividad del consumo y el capital I.2 y a la ecuación I.3 que describe la evolución de la única variable de estado de esta economía, k_t? Esta terminología, relacionada con variables de estado, se aclarará más adelante. Suponemos que u satisface las mismas propiedades que f y que, además, es acotada; esta última garantiza que I.4 tiene sentido para toda sucesión $(c_0, c_1, ...)$. Formalmente, el modelo básico de crecimiento consiste en el siguiente problema: encontrar una sucesión de consumo, inversión y capital, donde el capital inicial es dado; de modo que resuelvan el siguiente problema:

$$\max_{\{k_{t+1}, c_t\}_{t=0,\ldots}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sujeto a,[3]

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + i_t, \\ c_t + i_t &= f(k_t), \\ c_t, k_t &\geq 0 \text{ para todo } t. \end{aligned}$$

Este problema lo llamamos el *Problema Secuencial* con capital inicial k_0.[4] Por simplicidad, mientras no haya riesgo de confusión, omitiremos la expresión para todo t cada que escribamos un problema secuencial.

[3] En adelante, utilizaremos la abreviación $s.a$ para significar que un problema de optimización está sujeto a ciertas restricciones.

[4] Obsérvese que en este problema permitimos que la inversión sea, eventualmente, ne-

B. Programación dinámica

Supongamos que dado k_0 conseguimos resolver el problema anterior y el valor máximo de la función objetivo lo denotamos $v(k_0)$, donde v se llama la *función valor*[5]. Imaginemos ahora el problema del agente representativo un período más tarde. Dada una cantidad de capital inicial k_1, el agente representativo debe resolver un problema con la misma estructura del anterior y su valor máximo debe ser $v(k_1)$. Obsérvese que el hecho de ser el horizonte de optimización infinito es fundamental para poder hacer la afirmación anterior. De lo contrario, claramente la función valor en el período inicial no tendría por qué ser idéntica a la función valor el siguiente período (cuando el problema de optimización tiene un período menos). En la sección E abordaremos este caso. De esta manera, si interpretamos el coeficiente β como un factor que trae a valor presente las utilidades futuras del agente, entonces $\beta v(k_1)$ es el valor presente de la utilidad máxima que puede conseguir el agente representativo desde el período uno en adelante, dado que en el período uno tenía una cantidad inicial de capital k_1. Si k_0 es el capital inicial en el primer período, entonces:

$$u(f(k_0) + (1-\delta)k_0 - k_1) + \beta v(k_1)$$

es la utilidad presente dados k_1 y k_0, y el objetivo del agente representativo es entonces escoger k_1. Luego, intuitivamente, su problema se reduce a:

$$\begin{aligned} & \max_{k_1} \{u(f(k_0) + (1-\delta)k_0 - k_1) + \beta v(k_1)\} \\ s.a \quad : \quad & 0 \leq k_1 \leq f(k_0) + (1-\delta)k_0 \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} & \max_{c_0} \{u(c_0) + \beta v((1-\delta)k_0 + f(k_0) - c_0)\} \\ s.a \quad : \quad & 0 \leq c_0 \leq f(k_0) + (1-\delta)k_0. \end{aligned}$$

Luego, v debe satisfacer:

$$\begin{aligned} v(k_0) \quad &= \quad \max_{c_0} \{u(c_0) + \beta v((1-\delta)k_0 + f(k_0) - c_0)\} \\ s.a \quad &: \quad 0 \leq c_0 \leq f(k_0) + (1-\delta)k_0 \end{aligned}$$

Obsérvese que en la derivación anterior no hay nada especial con el argumento en los períodos 0 y 1 que no pueda ser usado en los períodos t y $t+1$ para

gativa. Más adelante consideraremos el caso en que la inversión es siempre no-negativa. Este último lo llamaremos el caso con inversión irreversible y, como veremos, conlleva varias dificultades técnicas asociadas a la no-negatividad de la inversión.

[5] En el próximo capítulo utilizaremos $\widetilde{v}$ para la función valor y v denotará otra función relacionada. Sin embargo, como veremos, bajo ciertas condiciones que asumiremos a lo largo del libro, estas dos funciones son iguales.

cualquier t. Luego, debe ser que para todo período t se cumple la ecuación funcional:

$$\begin{aligned} v(k_t) &= \max_{c_t} \ \{u(c_t) + \beta v((1-\delta)k_t + f(k_t) - c_t)\} \\ s.a &: \ 0 \leq c_t \leq f(k_t) + (1-\delta)k_t \end{aligned} \tag{I.5}$$

Así, si conociéramos la función v, entonces la sucesión óptima $\{c_t\}_{t=0,...}$ quedaría caracterizada como las soluciones al último problema para cada uno de los períodos. La formulación anterior, en términos de una ecuación funcional, pone en evidencia el carácter recursivo del problema. La ecuación I.5 la llamaremos *ecuación de Bellman.* Olvidándonos de los subíndices, vemos que si k es el monto de capital en un cierto período, la ecuación de Bellman la podemos escribir como:

$$\begin{aligned} v(k) &= \max_{c} \ \{u(c) + \beta v((1-\delta)k + f(k) - c))\} \\ s.a &: \ 0 \leq c \leq f(k) + (1-\delta)k. \end{aligned} \tag{I.6}$$

A este problema lo llamamos el *Problema Funcional* del modelo básico de crecimiento asociado al problema secuencial con el que iniciamos esta sección. Visto de esta forma, el problema se reduce a encontrar una función real v que satisfaga el problema I.6. Una forma de ver este problema es la siguiente: sea T una aplicación del conjunto de funciones continuas y acotadas sobre R, los números reales, definida por la siguiente regla. Dada una función g continua y acotada en los números reales definimos $T[g]$ como la función que evaluada en k satisface,

$$\begin{aligned} T\left[g\right](k) &= \max_{c}\{u(c) + \beta g((1-\delta)k + f(k) - c)\} \\ s.a &: \ 0 \leq c \leq f(k) + (1-\delta)k. \end{aligned}$$

Más adelante veremos que el operador T está bien definido (ésta es una aplicación sencilla del teorema del máximo para lo cual el lector puede consultar el Apéndice del libro). Ahora, el problema I.6 es equivalente a encontrar un punto fijo del operador T; luego, debemos demostrar la existencia del punto fijo y, en lo posible, dar un método para encontrarlo.[6] Para esto la idea consiste en dar una estructura especial al conjunto de las funciones continuas y acotadas (una métrica que lo haga un espacio métrico completo[7]), y probar que el operador T es una *contracción.*[8]

[6]Una función v es punto fijo de T si $T\left[v\right] = v$.

[7]Una métrica es una función d del espacio $X \times X$ en los números reales. La función toma dos elementos de dicho espacio y les asigna un valor real llamado distancia. Toda métrica debe cumplir tres condiciones: $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$ y la desigualdad del triángulo: $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$. Un espacio métrico es aquel al que se le ha asignado una métrica.

Por otra parte, un espacio métrico completo es aquel en el que toda sucesión de Cauchy converge (Véase Apéndice).

[8]Un operador $T : X \to R$ de un espacio métrico $\langle X, d \rangle$ en los reales R, se dice que es una *contracción* si existe $\beta \in (0, 1)$ tal que: $d(T(x), T(y)) \leqslant \beta d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

De esta manera podemos aplicar el teorema del punto fijo para contracciones y así obtener tanto la existencia de una función v que resuelva el problema I.6, como un método para encontrarla dado por este mismo teorema.

Sin entrar en mayores detalles por ahora, utilizaremos el teorema del punto fijo para contracciones (véase Apéndice) para resolver el ejemplo siguiente. Informalmente, este teorema nos dice que si T es una contracción, entonces existe una única v, punto fijo de T; además, dado cualquier v_0 en el dominio de T se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} T^n(v_0) = v$$

El método de programación dinámica afirma que, bajo ciertas condiciones, $v(k)$ es el valor máximo del problema secuencial cuando el capital inicial es k. Adicionalmente, si h es la función del capital k tal que $c = h(k)$ es el consumo que resuelve el problema de maximización:

$$\begin{aligned} &\max_c \ \{u(c) + \beta v((1-\delta)k + f(k) - c))\} \\ s.a \quad : \quad & 0 \leq c \leq f(k) + (1-\delta)k \end{aligned}$$

para todo k, entonces la sucesión $\{k_t, c_t\}$ definida por $k_{t+1} = f(k_t) - h(k_t) + (1-\delta)k_t$, $c_t = h(k_t)$ y k_0 dado, es una sucesión que resuelve el problema secuencial con capital inicial k_0. La función h la llamamos *función de política*. En este problema el capital es lo que llamamos una variable de estado, pues en cada período determina todas las posibilidades futuras de consumo. Por su parte, el consumo es la variable de control de este problema ya que es la variable que el agente representativo, dado el capital en un período, escoge de forma óptima para ese período. El concepto de variable de estado es fundamental y lo discutiremos varias veces a lo largo del libro. Por el momento, una buena forma para identificar las variables de estado de un problema es mirar aquellas que son dadas para el planteamiento del mismo.

El siguiente caso particular del modelo básico de crecimiento ilustra las ideas principales.

Ejemplo 1. (Brock y Mirman [1972]). Sea $u(c_t) = \log(c_t)$, $f(k_t) = k_t^\alpha$ donde $\alpha \in (0,1)$, $\delta = 1$ y k_0 es dado. Entonces, el problema de crecimiento discutido hasta ahora se reduce a:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t) \\ s.a \quad : \quad & k_{t+1} = k_t^\alpha - c_t, \\ c_t, k_t \quad \geq \quad & 0. \end{aligned}$$

El problema funcional asociado es:

$$\begin{aligned} v(k) \quad &= \quad \max_c \{\log(c) + \beta v(k^\alpha - c)\} \\ s.a \quad &: \quad 0 \leq c \leq k^\alpha \end{aligned}$$

Para resolver este problema utilizaremos el método dado por el teorema del punto fijo para contracciones. Puesto que podemos iniciar el proceso de iteración a partir de cualquier función, iniciamos con la función más sencilla posible. Sea $v_0 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} v_1(k) &= \max_c \{\log(c)\} \\ s.a &: 0 \leq c \leq k^\alpha \end{aligned}$$

este problema tiene la solución de esquina $c = k^\alpha$, luego $v_1(k) = \alpha \log(k)$. Para calcular v_2 resolvemos el problema:

$$\begin{aligned} v_2(k) &= \max_c \{\log(c) + \beta\alpha \log(k^\alpha - c)\} \\ s.a &: 0 \leq c \leq k^\alpha \end{aligned}$$

que lo resuelve $c = \frac{k^\alpha}{1+\beta\alpha}$, luego

$$v_2(k) = \alpha(1+\beta\alpha)\log(k) + \beta\alpha \log\left(\frac{\beta\alpha}{1+\beta\alpha}\right) - \log(1+\beta\alpha).$$

Ahora, de igual forma podemos deducir que:

$$\begin{aligned} v_3(k) &= \alpha(1+\beta\alpha+\beta^2\alpha^2)\log(k) + \beta^2\alpha \log\left(\frac{\beta\alpha}{1+\beta\alpha}\right) + \\ &\quad (\beta\alpha+\beta^2\alpha^2)\log\left(\frac{\beta\alpha+\beta^2\alpha^2}{1+\beta\alpha+\beta^2\alpha^2}\right) \\ &\quad -\log(1+\beta\alpha+\beta^2\alpha^2) - \beta\log(1+\beta\alpha) \end{aligned}$$

luego en general vemos que $v_n(k) = A_n + \left(\alpha \sum_{i=0}^{n-1} (\beta\alpha)^i\right) \log(k)$, donde A_n es una constante que debemos determinar. Se sigue que $v(k) = A + \frac{\alpha}{1-\beta\alpha}\log(k)$, donde A es una constante que podemos encontrar simplemente observando que v debe satisfacer:

$$\begin{aligned} v(k) &= \max_c \{\log(c) + \beta v(k^\alpha - c)\} \\ s.a &: 0 \leq c \leq k^\alpha \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} A + \frac{\alpha}{1-\beta\alpha}\log(k) &= \max_c \{\log(c) + \beta(A + \frac{\alpha}{1-\beta\alpha}\log(k^\alpha - c))\} \\ s.a &: 0 \leq c \leq k^\alpha \end{aligned}$$

Con un poco de álgebra se puede mostrar que la solución a este problema es $c = (1-\beta\alpha)k^\alpha$ y $v(k) = \frac{1}{1-\beta}(\log(1-\beta\alpha) + \frac{\beta\alpha}{1-\beta\alpha}\log(\beta\alpha)) + \frac{\alpha}{1-\beta\alpha}\log(k)$. De esta forma tenemos que la dinámica de la variable de estado satisface: $k_{t+1} = \beta\alpha k_t^\alpha$ y la escogencia óptima para la variable de control, dada la variable de estado, es: $c_t = (1-\beta\alpha)k_t^{\alpha}$. La función que expresa la escogencia óptima de las variables de control en términos de las variables de estado se llama *función de política*. Por tanto, en este caso, la función de política es $c_t = (1-\beta\alpha)k_t^{a}$.

Una vez resuelto el problema de la existencia, el siguiente paso es describir de la manera más precisa posible las propiedades de la función valor v y de la sucesión o trayectoria óptima $\{(k_t, c_t)\}_{t=0,...}$. Si bien algunas características de la solución van a depender de la forma particular de las funciones de producción y utilidad, otras características muy importantes se cumplen de manera más general como, la *unicidad* de la solución óptima y la *estabilidad de las trayectorias* asociadas a un capital inicial.

Supongamos que el problema secuencial tiene una solución de estado estacionario. Esto es, una solución en la que si el capital inicial es un cierto valor, $k_0 = k^*$, la dinámica óptima de la sucesión que resuelve el problema de optimización es tal que todas las variables crecen a una tasa constante. Por lo general, nos concentramos en el caso en el que esa tasa de crecimiento es cero.[9] En este caso, una solución de estado estacionario es tal que $k_t = k^*$ para todo t. El problema de estabilidad consiste en saber si, comenzando con un valor inicial de capital k_0 diferente al valor k^*, la solución óptima al problema secuencial converge con el tiempo a la solución de estado estacionario. Es decir, si $k_t \to k^*$ cuando $t \to \infty$.

En el ejemplo anterior tenemos que existen dos soluciones de estado estacionario. Una corresponde a $k^* = 0$ y la otra a $k^* = (\beta\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. En el primer caso es fácil ver que no se cumple la propiedad de estabilidad, mientras que en el segundo, como $\alpha \in (0,1)$ sí se cumple. Posteriormente estudiaremos esta propiedad para un problema más general.

Ejemplo 2. (Long y Plosser [1983]) Consideremos el modelo básico de crecimiento con oferta laboral. Sea $n_t \in (0,1)$ la cantidad de trabajo que ofrece el agente representativo y l_t la cantidad de tiempo que dedica al ocio. Supongamos que $l_t + n_t = 1$. Sea $u(c_t, l_t) = \gamma \log(c_t) + (1-\gamma)\log(l_t)$; $f(k_t, n_t) = k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$, $\delta = 1$ y k_0 dado. El problema secuencial es:

$$\begin{aligned} & \text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t(\gamma\log(c_t) + (1-\gamma)\log(1-n_t)) \\ s.a \quad & : \\ k_{t+1} \quad & = \quad k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - c_t \end{aligned}$$

[9]Cuando existe una solución de estado estacionario en el que la tasa de crecimiento no es cero, es fácil transformar las variables del problema de tal forma que en las nuevas variables exista una solución de estado estacionario en donde la tasa de crecimiento es cero. En los capítulos posteriores veremos ejemplos de este tipo de transformaciones.

El problema funcional asociado es:

$$\begin{aligned} v(k) &= \max_{c,n}\{\gamma\log(c)+(1-\gamma)\log(1-n)+\beta v(k^\alpha n^{1-\alpha}-c)\} \qquad (\mathrm{I}.7)\\ s.a &: \\ 0 &< c\leqslant k^\alpha n^{1-\alpha}\\ 0 &< n<1 \end{aligned}$$

Aplicando la misma metodología del ejemplo anterior, suponemos que $v_0 = 0$. Es claro que la solución está en el extremo para el consumo y es interior para el empleo. Luego debemos maximizar con respecto a n la función:

$$\gamma\log(k^\alpha n^{1-\alpha})+(1-\gamma)\log(1-n)$$

Las *condiciones de primer orden implican que*:

$$n=\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\gamma\alpha}$$

Reemplazando en la restricción obtenemos:

$$c=k^\alpha\left[\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\gamma\alpha}\right]^{1-\alpha}$$

y por tanto, la función $v_1(k)$ es:

$$\begin{aligned} v_1(k) &= \gamma\log\left(k^\alpha\left[\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\gamma\alpha}\right]^{1-\alpha}\right)+(1-\gamma)\log\left(1-\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\gamma\alpha}\right)=\\ &= \alpha\gamma\log(k)+A_1 \end{aligned}$$

donde A_1 es una constante. Teniendo $v_1(k)$ podemos calcular $v_2(k)$:

$$\begin{aligned} v_2(k) &= \max_{c,n}\{\gamma\log(c)+(1-\gamma)\log(1-n)+ \qquad (\mathrm{I}.8)\\ & \quad \beta\alpha\gamma\log(k^\alpha n^{1-\alpha}-c)+\beta A_1\}\\ s.a &: \\ 0 &\leqslant c\leqslant k^\alpha n^{1-\alpha}\\ 0 &\leqslant n\leqslant 1 \end{aligned}$$

Ahora podemos derivar las condiciones de primer orden con respecto a c y n :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{c}-\frac{\beta\gamma\alpha}{k^\alpha n^{1-\alpha}-c} &= 0\\ -\frac{1-\gamma}{1-n}+\frac{\beta\gamma\alpha}{k^\alpha n^{1-\alpha}-c}(1-\alpha)(k^\alpha n^{-\alpha}) &= 0. \end{aligned}$$

Con un poco de álgebra encontramos:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\gamma(1+\alpha\beta)(1-\alpha)}{1-\alpha\gamma+\beta\gamma\alpha(1-\alpha)} \\ c &= \frac{k^\alpha}{1+\alpha\beta}\left[\frac{\gamma(1+\alpha\beta)(1-\alpha)}{1-\alpha\gamma+\beta\gamma\alpha(1-\alpha)}\right]^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación I.8 obtenemos:

$$v_2(k) = \alpha\gamma(1+\alpha\beta)\log k + A_2,$$

donde A_2 es una constante. Si continuamos iterando, es posible encontrar un patrón en las iteraciones:

$$v_n(k) = \alpha\gamma(1+\alpha\beta+...+\alpha^{n-1}\beta^{n-1})\log k + A_n$$

por tanto, un buen candidato a ser punto fijo es:

$$v = \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha\beta}\log k + A$$

Ahora debemos verificar que efectivamente este candidato es el correcto, reemplazando en la ecuación I.7 y de nuevo escribiendo las condiciones de primer orden obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{c} &= \frac{\beta\alpha\gamma}{(1-\alpha\beta)\left(k^\alpha n^{1-\alpha}-c\right)} \\ \frac{1-\gamma}{1-n} &= \frac{\beta\alpha\gamma(1-\alpha)k^\alpha n^{-\alpha}}{(1-\alpha\beta)\left(k^\alpha n^{1-\alpha}-c\right)} \end{aligned}$$

Simplificando encontramos estos candidatos a las funciones de política:

$$n = \frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha\left(\gamma+\beta-\gamma\beta\right)} \tag{I.9}$$

$$c = (1-\alpha\beta)k^\alpha\left(\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha\left(\gamma+\beta-\gamma\beta\right)}\right)^{1-\alpha} \tag{I.10}$$

Finalmente, reemplazando en la ecuación I.7 obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha\beta}\log k + A &= \gamma\log\left[(1-\alpha\beta)k^\alpha\left(\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha\left(\gamma+\beta-\gamma\beta\right)}\right)^{1-\alpha}\right] \\ &+(1-\gamma)\log\left[1-\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha\left(\gamma+\beta-\gamma\beta\right)}\right]+ \\ &\beta\left(\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha\beta}\right)\log[k^\alpha\left(\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha\left(\gamma+\beta-\gamma\beta\right)}\right)^{1-\alpha} \\ &-(1-\alpha\beta)k^\alpha\left[\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha\left(\gamma+\beta-\gamma\beta\right)}\right]^{1-\alpha}]+\beta A \end{aligned}$$

No es difícil convencerse de que existe una constante A que resuelve esta ecuación. Las ecuaciones I.9 y I.10, efectivamente, son las funciones de política que estábamos buscando y describen las trayectorias óptimas del consumo c y del trabajo n. Obsérvese que el trabajo es independiente del estado de la economía k. Esto refleja el hecho de que la función de utilidad es logarítmica en el trabajo y, por lo tanto, el efecto ingreso y sustitución se cancelan.

Sustituyendo el consumo y el trabajo óptimos en la ecuación de acumulación del capital, encontramos la trayectoria óptima del capital:

$$k_{t+1} = \alpha\beta \left[\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha\left(\gamma+\beta-\gamma\beta\right)} \right]^{1-\alpha} k_t^{\alpha}.$$

Luego, la trayectoria óptima de la inversión es:

$$i_t = k_{t+1} - (1-\delta)k_t = k_{t+1}.$$

El próximo ejemplo es bastante importante y estudiado en la literatura. Como ya lo habíamos mencionado antes, para la mayoría de los problemas de economía dinámica es imposible encontrar explícitamente una fórmula para la función de política y por eso debemos recurrir a métodos computacionales. Un método bastante importante consiste en reducir el problema original, mediante una aproximación, a un problema como el que se discute a continuación.

Ejemplo 3. (Control Óptimo Lineal). La característica fundamental de este problema es que la función objetivo es cuadrática y la dinámica de la variable de estado está dada por una función lineal. De acuerdo con estas hipótesis mostraremos que el control óptimo es una función lineal de las variables de estado, razón por la cual el problema lleva este nombre. Concretamente, el problema que queremos resolver es:

$$\begin{aligned} & \sup \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (x_t' Q x_t + u_t' R u_t + 2x_t' W u_t) \\ s.a \quad & : \\ x_{t+1} \quad & = \quad A x_t + B u_t,\ x_0 \text{ dado,} \end{aligned}$$

donde x_t es un vector columna $n \times 1$, R es una matriz $n \times n$, Q es $m \times m$, R y Q son matrices simétricas, definida negativa y semidefinida negativa, respectivamente;[10][11] W es una matriz $n \times m$, A es una matriz $n \times n$ y B es una matriz $n \times m$. Aqui x' denota el vector transpuesto de x. Existen

[10] Recuerde que una matriz A es *simétrica* si $A' = A$. Una matriz simétrica A $(m \times m)$ es *semidefinida negativa* si $x'Ax \leqslant 0$ para todo m-vector $x \neq 0$. En el caso de las matrices *definidas negativas* la desigualdad anterior es estricta.

[11] Obsérvese que restricciones de la forma $x_{t+1} = Ax_t + A_1x_{t-1} + ... + A_px_{t-p} + Bu_t + B_1u_{t-1} + ... + B_qu_{t-q}$ pueden escribirse en la forma que aquí consideramos.

otras hipótesis adicionales para garantizar que este problema tiene solución y que ésta se puede obtener con el método iterativo. Para simplificar las cosas supondremos que estamos en estos casos. El lector puede consultar Ljungqvist y Sargent [2004] o Bertsekas y Shreve[1978].

Sea $\nu_0 = 0$, luego $\nu_1(x) = \sup_u \{x'Qx + u'Ru + 2x'Wu\}$. Las condiciones de primer orden son:[12] $2u'R + 2x'W = 0 \Rightarrow u = -R^{-1}W'x \Rightarrow \nu_1(x) = x'(Q - WR^{-1}W')x$. Esta primera iteración nos sugiere que la función valor de este problema es probablemente una forma cuadrática.[13] Supongamos entonces que $\nu_j(x) = x'P_jx$ para una matriz P_j simétrica. Entonces:

$$\nu_{j+1}(x) = \sup_u \{x'Qx + u'Ru + 2x'Wu + \beta(Ax + Bu)'P_j(Ax + Bu)\}$$

Las condiciones de primer orden son: $2u'R + 2x'W + \beta B'P_jAx + \beta(x'A'P_jB)' + 2\beta u'B'P_jB = 0 \Rightarrow u = -(R + \beta B'P_jB)^{-1}(\beta B'P_jA + W')x$, siempre que $R + \beta B'P_jB$ sea invertible. Sustituyendo en la ecuación funcional y con algo de álgebra llegamos a (dejamos esto como ejercicio):

$$\nu_{\bar{j}+1}(x) = x'[(Q + \beta A'P_jA - (\beta A'P_jB + W)(R + \beta B'P_jB)^{-1}(\beta B'P_jA + W')]x,$$

en particular:

$$P_{j+1} = Q + \beta A'P_jA - (\beta A'P_jB + W)(R + \beta B'P_jB)^{-1}(\beta B'P_jA + W').$$

La anterior ecuación se denomina ecuación de Riccati. Iterando esta ecuación llegamos a una matriz P que caracteriza la función valor del problema y la función de política:

$$u_t = -(R + \beta B'PB)^{-1}(\beta B'PA + W')x_t$$

Como puede observarse de esta ecuación, el control óptimo es una función lineal de las variables de estado.

C. Método de Lagrange

Un método mucho más antiguo que el de la programación dinámica y que se utilizaba bastante para resolver problemas con una estructura similar al problema secuencial que hemos estado estudiando es el conocido como *ecuaciones de Euler* o, más generalmente, el *método de Lagrange* (éste, a su vez,

[12] Para encontrar las condiciones de primer orden hemos utilizado las siguientes reglas para la diferenciación de matrices (véase Lutkepohl: "Introduction to Multiple Time Series Analysis".): sean y , x dos vectores de dimensión m y A una matriz $m \times m$, entonces $\frac{\partial y'x}{\partial x} = \frac{\partial x'y}{\partial x} = y'$ y $\frac{\partial x'Ax}{\partial x} = x'(A + A')$

[13] Si A es simétrica $(m \times m)$ y x es un m-vector, la función $x'Ax$ es llamada una *forma cuadrática* en x.

es un caso particular de la teoría de control óptimo).[14] Una vez más utilizaremos el modelo básico de crecimiento para ilustrar las ideas principales de este método. Obsérvese que el problema de optimización en el modelo básico de crecimiento se puede escribir en forma equivalente como:

$$\begin{aligned} & \max_{\{k_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t\right) \\ s.a \quad & : \\ 0 \quad \leq \quad & k_{t+1} \leq f\left(k_t\right) + (1-\delta)k_t \\ & k_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Para simplificar un poco la notación introduciremos las siguientes definiciones. Sea

$$r(k_t, k_{t+1}) = u\left(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t\right)$$

y

$$\Gamma(k_t) = \{k \in R : 0 \leq k \leq f\left(k_t\right) + (1-\delta)k_t\}$$

entonces el problema del modelo básico de crecimiento es equivalente a:

$$\begin{aligned} & \max_{\{k_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(k_t, k_{t+1}) \\ s.a \quad & : \\ k_{t+1} \quad \in \quad & \Gamma\left(k_t\right) \\ & k_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $\{k_t^*\}$ es una sucesión que resuelve el problema. Intuitivamente, el valor óptimo k_{t+1}^* debe ser solución al problema (véase figura 1):

$$\max_{k_{t+1} \in \Gamma(k_t^*)} \left\{ r(k_t^*, k_{t+1}) + \beta r(k_{t+1}, k_{t+2}^*) \right\}$$

Es decir, si la solución es interior, es necesario que la sucesión satisfaga lo que se conoce como *ecuaciones de Euler*:

$$\partial_2 r\left(k_t^*, k_{t+1}^*\right) + \beta \partial_1 r\left(k_{t+1}^*, k_{t+2}^*\right) = 0,\ t = 0, ...$$

[14]Las ecuaciones de Euler, como su nombre lo indica, se deben al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). Euler ha sido uno de los científicos más prolíficos e importantes de la historia. Su trabajo en esta área lo hizo en un contexto continuo, dando inicio a lo que se conoce como el cálculo de variaciones. La teoría del control óptimo fue desarrollada principalmente por matemáticos rusos en la primera mitad del siglo pasado, en especial por Pontryagin y sus colaboradores. Las principales ideas de la programación dinámica, también conocida como inducción hacia atrás, aparecen en los trabajos de muchos autores; sin embargo, es el matemático norteamericano Richard Bellman quien reconoció la estructura similar de muchos problemas secuenciales e introdujo formalmente el método en una monografía publicada en el año 1957 (Bellman [1957]). Para más detalles históricos y una discusión lúcida sobre el método de programación dinámica el lector puede consultar Rust (2006).

donde $\partial_1 r$ y $\partial_2 r$ denotan respectivamente las derivadas parciales con respecto al primer y segundo argumento. Las ecuaciones de Euler son un sistema de ecuaciones en diferencias finitas de segundo orden. Ahora, obsérvese que sólo tenemos una condición inicial k_0, luego debe faltar algo más para caracterizar completamente la solución; de lo contrario, existirían infinitas soluciones, una para cada k_1. La condición que está faltando es la *condición de transversalidad*:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \partial_1 r\left(k_t^*, k_{t+1}^*\right) k_t^* \leq 0 \tag{I.11}$$

En los próximos capítulos discutiremos una interpretación de esta condición. Intuitivamente quiere decir que, a lo largo de la trayectoria óptima, el valor presente de la utilidad marginal de una unidad adicional de capital en el infinito no debe ser positiva.

Una interpretación geométrica elemental de las ecuaciones de Euler se ilustra en la figura 1. La línea sólida representa la dinámica óptima y la línea punteada corresponde a la dinámica optima excepto en el período $T+1$. En este período, la trayectoria es una ligera perturbación de la trayectoria óptima. Ahora, intuitivamente, si maximizamos la utilidad del agente entre todas las trayectorias perturbadas (en el período $T+1$), el máximo debe ser igual al máximo del problema original. Esto es:

$$\begin{aligned}
& & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(k_t^*, k_{t+1}^*) = \\
& & \max_{k_{T+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(k_t, k_{t+1}) \\
s.a & : & \\
k_{T+1} & \in & \Gamma\left(k_T\right) \\
k_t & = & k_t^*,\ t \neq T+1, \\
& & k_0 \text{ dado},
\end{aligned}$$

y éste es, evidentemente, un problema de optimización estándar de una única variable y equivalente a:

$$\max_{k_{t+1}\in\Gamma(k_t^*)} \left\{ r(k_t^*, k_{t+1}) + \beta r(k_{t+1}, k_{t+2}^*) \right\}.$$

Ejemplo 4. (Brock y Mirman [1972] una vez más). Aplicando las ecuaciones de Euler al ejemplo de Brock y Mirman obtenemos:

$$-\frac{1}{k_t^{*\alpha} - k_{t+1}^*} + \beta \frac{\alpha k_{t+1}^{*\alpha-1}}{k_{t+1}^{*\alpha} - k_{t+2}^*} = 0 \tag{I.12}$$

Es fácil obtener la solución de estado estacionario a partir de esta ecuación en diferencias finitas. Sin embargo, no es obvio cómo utilizar la condición de transversalidad, ecuación I.11, para resolver esta ecuación por fuera del

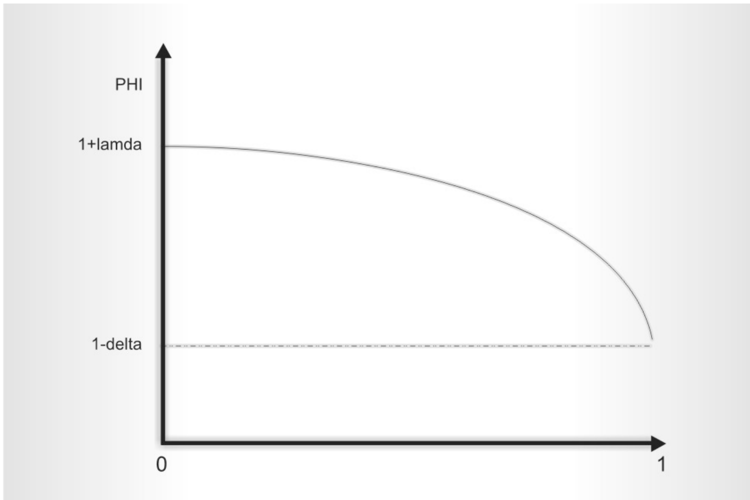

Figura 1: Deducción de las ecuaciones de Euler.

estado estacionario. De hecho, más adelante dedicaremos un buen tiempo a explotar la condición de transversalidad. Por el momento, basta con observar que la anterior ecuación se puede reducir a una ecuación de primer orden. Sea $x_t = \frac{k^*_{t+1}}{k^{*\alpha}_t}$, entonces el sistema es equivalente a:

$$\left(\frac{1 - x_{t+1}}{1 - x_t}\right) x_t = \alpha\beta$$

y la condicion de transversalidad se puede reescribir como:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{\alpha}{1 - x_t} = 0.$$

Ahora basta con observar que una solución particular de estas dos ecuaciones es $x_t = \alpha\beta$, es decir, $k_{t+1} = \alpha\beta k_t^\alpha$ que genera una dinámica que satisface simultaneamente las ecuaciones de Euler y la condición de transversalidad. Ésta es, por supuesto, la misma solución que encontramos utilizando el método de programación dinámica.

D. Consistencia dinámica de los planes óptimos

El lector escéptico se habrá preguntado si no es importante para el análisis presentado anteriormente que el problema de optimización se resuelva en el período incial y no en períodos posteriores. La duda puede surgir de que, en la práctica, a medida que pasa el tiempo el agente representativo podría reoptimizar escogiendo una nueva dinámica óptima que, en principio, no coincide con lo planeado en períodos anteriores. Siendo más precisos, la pregunta importante es la siguiente: supongamos que en cada período t, el agente representativo resuelve el siguiente problema:

$$\max \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(c_s^t)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
k_{s+1}^t &= (1-\delta)k_s^t + i_s^t, \\
c_s^t + i_s^t &= f(k_s^t), \\
c_s^t, k_s^t &\geq 0, \\
s &= 0, ..., \\
& \quad k_0^t \text{ dado,}
\end{aligned}$$

donde c_s^t denota el plan de consumo que en el período t se escogió para s períodos más adelante y así para todas las variables. La pregunta interesante es si existe alguna consistencia dinámica entre las escogencias que se hacen en cada período. Por ejemplo, ¿es lo que en el período inicial $t = 0$ se escoge como consumo óptimo para el período $t = 2$ igual a lo que en el período $t = 1$ se escoge como consumo óptimo para el período siguiente? Formalmente la pregunta es la siguiente: para cada período t, sea $\{(k_s^t, c_s^t)\}_{s=0,...}$ la dinámica óptima que resuelve el problema secuencial en el período $t \geq 1$ cuando el capital inicial es $k_0^t = k_1^{t-1}$. Esto es, el capital inicial en t es el capital óptimo que en $t-1$ se escogió para el período t.

El resultado importante que queremos resaltar es que, debido a la forma particular de las preferencias del agente representativo sobre las sucesiones de consumo futuras, se cumple la siguiente relación, llamada la *consistencia dinámica* de los planes óptimos. Para cada período t, si $\{(k_s^t, c_s^t)\}_{s=0,...}$ denota la dinámica óptima que resuelve el problema secuencial en cada período; entonces, para todo t y $s \geq 1$, $(k_s^t, c_s^t) = \left(k_{s-1}^{t+1}, c_{s-1}^{t+1}\right)$. El resultado se sigue inmediatamente de la ecuación de Bellman una vez reconocemos que dada la recursividad del problema, la función valor y la función de política no dependen del período del tiempo en el que se hace la optimización.

Para reforzar aún más la idea y aclarar las razones por las cuales las dinámicas óptimas son consistentes dinámicamente, consideremos el problema secuencial desde el punto de vista del método de Lagrange. El problema de optimización cada período t se puede plantear como:

$$\begin{array}{rcl} & & \max\limits_{\{k_s^t\}} \sum\limits_{s=0}^{\infty} \beta^s r(k_s^t, k_{s+1}^t) \\ s.a & : & \\ k_{s+1}^t & \in & \Gamma\left(k_s^t\right) \\ & & k_0^t \text{ dado.} \end{array}$$

Si la solución es interior, entonces la sucesión[15] $\{k_s^t\}_{s=0,...}$que resuelve el problema debe satisfacer las ecuaciones de Euler:

$$\partial_2 r\left(k_s^t, k_{s+1}^t\right) + \beta \partial_1 r\left(k_{s+1}^t, k_{s+2}^t\right) = 0,\ t, s = 0, ...$$

Ahora, obsérvese que la estructura de las ecuaciones de Euler es idéntica en cada período y el problema a resolver sólo difiere en el valor inicial de capital. Luego, si $k_0^t = k_1^{t-1}$, es fácil ver que las ecuaciones de Euler caracterizan las mismas sucesiones de capital en cada período.

Finalmente, es importante entender qué es lo que hace que resolver el problema en el período inicial sea prácticamente equivalente a resolverlo en períodos posteriores. En los ejercicos se puede encontrar un ejemplo importante en la literatura económica, en donde la dinámica óptima es inconsistente temporalmente. Intuitivamente, la condición necesaria para la consistencia temporal radica en la recursividad del problema. Si el problema en el período t es idéntico al problema en el período $t+1$, excepto por el valor inicial en cada período de las variables de estado, entonces se debe cumplir la propiedad de consistenca dinámica de los planes óptimos. Formalmente, la característica que hace que la solución al problema secuencial sea dinámicamente consistente es que la tasa marginal de sustitución intertemporal del consumo sea constante.[16]

Cuando estudiemos economías dinámicas en presencia de incertidumbre encontraremos más elementos que hacen de la propiedad de consitencia dinámica una característica fuerte de este tipo de problemas de optimización.

E. Programación dinámica y el método de Lagrange en horizonte finito

Si bien a lo largo de este libro nos vamos a enfocar en problemas de optimización dinámica con horizonte infinito, el caso con horizonte finito sirve

[15]Donde por simplicidad en la notación hemos abolido el uso del sufijo * en la dinámica óptima.

[16]De forma más general, la propiedad de consistencia temporal está asociada a la recursividad de la función de utilidad sobre las sucesiones de consumo. Véase Koopmans [1960].

para aclarar algunas de las ideas que hemos introducido. Los problemas en horizonte infinito surgen en una gran cantidad de modelos económicos y el estudio de cómo resolverlos es por sí mismo bastante importante. Sin embargo, aquí y en los siguientes capítulos haremos una incursión marginal a este tipo de problemas con el fin de entender mejor el caso de horizonte infinito. A manera de introducción, consideremos de nuevo el modelo básico de crecimiento, pero supongamos que por alguna razón el agente representativo de esta economía no deriva ninguna utilidad por consumir más allá del período $T > 0$. Entonces, el agente representativo en esta economía se enfrenta al siguiente problema: encontrar una sucesión de consumo e inversión hasta el período T y de capital hasta el período $T + 1$, donde el capital inicial es dado, de modo que resuelva el siguiente problema:

$$\max \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)$$

s.a:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + i_t, \\ c_t + i_t &= f(k_t), \\ c_t, k_t &\geq 0, \\ t &= 0, ...T \end{aligned}$$

Para resolver este problema utilizando programación dinámica vamos a seguir la misma línea de argumentación que en el caso de horizonte infinito. Una mirada rápida al argumento llama la atención sobre el hecho de que en cada período el problema que resuelve el agente representativo ya no es sólo diferente por el monto de capital que posee en ese período, sino también por el hecho de estar cada vez más cerca del último período. Esto sugiere que en cada período la función valor debe ser distinta. Supongamos entonces que existen $T + 1$ funciones, $v_0, v_1, ...v_T$ definidas sobre el monto de capital al comienzo de cada período que representan lo siguiente. Por conveniencia, introducimos la función v_{T+1} y la definimos como id$v_{T+1} = 0$. Ahora, con respecto a la interpretación, si en el período t el monto de capital inicial es k, $v_t(k)$ representa la utilidad máxima en valor presente que puede alcanzar el agente representativo desde el período t hasta el período T. Esto es, $v_t(k)$ satisface:

$$v_t(k) = \max \sum_{s=t}^{T} \beta^{t-s} u(c_t)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
k_{s+1} &= (1-\delta)k_s + i_s, \\
c_s + i_s &= f(k_s), \\
c_s, k_s &\geq 0, \\
s &= t, ...T
\end{aligned}$$

Luego, un buen candidato a ser la ecuación funcional que deben satisfacer las funciones anteriores es para todo $t = 0, 1, ..., T$:

$$\begin{aligned}
v_t(k) &= \max_c \ \{u(c) + \beta v_{t+1}((1-\delta)k + f(k) - c))\} \\
s.a &: \ 0 \leq c \leq f(k) + (1-\delta)k
\end{aligned} \tag{I.13}$$

Obsérvese que, gracias a la introducción de la función $v_{T+1} = 0$, la ecuación anterior tiene sentido aun para el período $t = T$. Por lo menos dos características son bien importantes de resaltar de la anterior formulación que se contraponen al caso de horizonte infinito.

Por un lado, la forma de resolver la ecuación de Bellman es bastante más directa que en el caso de horizonte finito. El método para resolver la ecuación de Bellman es llamado *inducción hacia atrás*. Esto es, dado que $v_{T+1} = 0$ entonces es fácil en principio determinar v_T resolviendo la ecuación de Bellman correspondiente. Ahora, bajo el supuesto que hemos encontrado v_T, usamos la ecuación de Bellman una vez más y podríamos en principio determinar v_{T-1} y así sucesivamente. Este método, si bien puede ser poco práctico cuando el horizonte es muy largo, ciertamente permite en principio encontrar la función valor del problema en cada período.

De otra parte, si nos preguntamos por la dinámica óptima que resuelve el problema, nos vemos forzados a definir $T + 1$ funciones de política, una para cada período. Esto es, definimos la función de política h_t como aquella función que resuelve el problema de optimización de la ecuación de Bellman en el período t. Luego, si en el período t el capital es k, el consumo óptimo c en ese período es, $c = h_t(k)$. El punto importante es que la función de política depende ahora del período en el cual se está optimizando.

F. Ejercicios y soluciones

F.1. Ejercicios

Ejercicio 1. Supongamos que estamos interesados en la solución de estado estacionario del ejemplo 1. Sea r la tasa de interés real de la economía y suponiendo que el factor de descuento β es igual a $\frac{1}{1+r}$, probar que el nivel de consumo en el estado estacionario es una función decreciente de la tasa de interés.

Ejercicio 2. Mostrar formalmente que en el ejemplo de Brock y Mirman:

1. Se cumple la propiedad de estabilidad para $k^* > 0$ pero no para $k^* = 0$.
2. Si el capital inicial está por debajo del capital de estado estacionario, la tasa de crecimiento del capital es una función decreciente del nivel de capital. Esto es una ilustración de la hipótesis de convergencia en la teoría del crecimiento.
3. Supongamos que $f(k_t) = Ak_t^\alpha$ donde A es una constante. Mostrar que la dinámica óptima del capital es $k_{t+1} = \beta\alpha Ak_t^\alpha$ y la función de política es $c_t = (1-\beta\alpha)Ak_t^\alpha$. Utilizando dos valores diferentes de A ilustrar la hipótesis de convergencia condicional. Esto es, controlando por diferentes parámetros fundamentales (A diferentes, parámetro conocido como productividad total de los factores), mostrar que los países que están relativamente más lejos de su estado estacionario y por debajo del mismo, crecen más rápido que los que están relativamente más cerca.

Ejercicio 3. Encontrar las soluciones de estado estacionario para el modelo de Long y Plosser, y estudiar la propiedad de estabilidad de estas soluciones.

Ejercicio 4. El problema de comerse un pastel (tomado de Stockey – Lucas [1989]). Supongamos que tenemos una cantidad x_0 de pastel. Cada período cortamos un poco y nos lo comemos. La utilidad instantánea de comerse un pedazo es igual al logaritmo del tamaño del pedazo.

1. Escribir el problema secuencial.
2. Escribir el problema como un problema de programación dinámica.
3. Encontrar la función valor y la función de política (sugerencia: la función valor es logarítmica).

Ejercicio 5. Completar el álgebra del ejemplo de control óptimo lineal.

Ejercicio 6. Consistencia dinámica de los planes óptimos. En este ejercicio damos dos ejemplos importantes que se encuentran en la literatura económica, para los cuales la propiedad de consistencia temporal no se cumple.

1. Descuento hipérbolico. Consideremos una modificación del modelo básico de crecimiento en el que el factor de descuento no es el mismo entre dos períodos. Concretamente, supongamos que la utilidad del agente representativo es de la forma

$$u(c_0) + \delta \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Obsérvese que el factor de descuento entre el primero y el segundo período es $\delta\beta$, mientras que entre dos períodos consecutivos posteriores es β. Mostrar que no se cumple la propiedad de consistencia temporal.

2. Utilidad no separable aditivamente. Consideremos una modificación del modelo básico de crecimiento en el que la utilidad instántanea depende del consumo presente y el de un período más adelante. Específicamente, supongamos que la función de utilidad del agente representativo es de la forma

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln(c_t) + \ln(c_{t+1})\right)$$

Utilizando las ecuaciones de Euler, argumentar que no se cumple la propiedad de consistencia dinámica.

F.2. Soluciones

Solución 1. (Ejercicio 1) Para mostrar que el consumo en estado estacionario es una función decreciente de la tasa de interés, utilizaremos la regla de la cadena:

$$\frac{\partial c^*}{\partial r} = \frac{\partial c^*}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial r}$$

Del ejemplo 1 sabemos que: $k^* = (\beta\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow c^* = (1-\beta\alpha)(\beta\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Derivando c^* con respecto a β obtenemos:

$$\frac{\partial c^*}{\partial \beta} = (\beta\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{(1-\beta\alpha)^2 + \alpha^2\beta(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)} \right) > 0$$

Derivando β con respecto a r obtenemos:

$$\frac{\partial \beta}{\partial r} = -(1+r)^{-2} < 0$$

De estas dos ecuaciones se desprende que el nivel de consumo del estado estacionario es una función decreciente de la tasa de interés.

Solución 2. (Ejercicio 4) Llamemos x_t la cantidad de pastel que queda en el periodo t. El pedazo de pastel que nos comemos puede definirse como la diferencia entre el pastel que tenemos en t y el que queda en $t+1$. Así, el problema puede ser formulado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \max_{\{x_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(x_t - x_{t+1}) \\ 0 \quad \leq \quad & x_{t+1} \leq x_t \\ & x_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Para usar una notación similar a la del capítulo, podemos replantear el problema secuencial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t) \\ 0 \quad < \quad & c_t \leq x_t \text{ y } x_{t+1} = x_t - c_t \end{aligned}$$

Donde c_t es la cantidad de pastel que nos comemos en t.

El problema funcional es:

$$\begin{aligned} v(x_t) &= \max_{c_t} \{\ln(c_t) + \beta v(x_t - c_t)\} \\ 0 &< c_t \leq x_t \end{aligned}$$

Utilizando la sugerencia para resolver el problema (o alternativamente hacer algunas iteraciones para convencerse de que ésta es un buen candidato), suponemos que la función valor es de la forma:

$$v(x_t) = A\ln(x_t) + B,$$

donde A y B constantes. Las condiciones de primer orden del problema funcional implican:

$$x_{t+1} = \frac{A\beta}{(1+\beta A)} x_t.$$

Sustituyendo en la ecuación funcional:

$$\begin{aligned} A\ln(x_t) + B = v(x_t) = \ln(x_t) + \ln\left(1 - \frac{\beta A}{1+\beta A}\right) \\ + \beta\left[A\ln\left(\frac{\beta A}{1+\beta A}\right) + A\ln(x_t) + B\right] \end{aligned}$$

y utilizando el método de coeficientes indeterminados, podemos verificar que A y B son constantes. En efecto:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1-\beta} \\ B &= \ln\left(1 - \frac{\beta A}{1+\beta A}\right) + \beta\left[A\ln\left(\frac{\beta A}{1+\beta A}\right) + B\right] \\ &= \frac{\ln(1-\beta)}{1-\beta} + \frac{\beta\ln(\beta)}{(1-\beta)^2} \end{aligned}$$

Luego:

$$x_{t+1} = \beta x_t$$

Solución 3. (Ejercicio 5)Tenemos:

$$v_{j+1}(x) = \sup_u \left\{x'Qx + u'Ru + 2x'Wu + \beta(Ax+Bu)' P_j (Ax+Bu)\right\}$$

y las condiciones de primer orden implican que:

$$u = -\left(R + \beta B' P_j B\right)^{-1} \left(\beta B' P_j A + W'\right) x$$

Reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned} v_{j+1}(x) = x'Qx &+ \left(-\left(R + \beta B' P_j B\right)^{-1} \left(\beta B' P_j A + W'\right) x\right)' \\ &\times R \left(-\left(R + \beta B' P_j B\right)^{-1} \left(\beta B' P_j A + W'\right) x\right) \\ &+ 2x'W \left(-\left(R + \beta B' P_j B\right)^{-1} \left(\beta B' P_j A + W'\right) x\right) \\ &+ \beta \left(Ax + B \left(-\left(R + \beta B' P_j B\right)^{-1} \left(\beta B' P_j A + W'\right) x\right)\right)' \\ &\times P_j \left(Ax + B \left(-\left(R + \beta B' P_j B\right)^{-1} \left(\beta B' P_j A + W'\right) x\right)\right) \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned} v_{j+1}(x) = x'Qx &+ \\ &\left(x' \left(\beta B' P_j A + W'\right)' \left(\left(R + \beta B' P_j B\right)^{-1}\right)'\right) \\ &\times R \left(\left(R + \beta B' P_j B\right)^{-1} \left(\beta B' P_j A + W'\right) x\right) \\ &+ 2x'W \left(-\left(R + \beta B' P_j B\right)^{-1} \left(\beta B' P_j A + W'\right) x\right) \\ &+ \beta \left(x'A' + \left(x' \left(\beta B' P_j A + W'\right)' \left(-\left(R + \beta B' P_j B\right)^{-1}\right)'\right) B'\right) \\ &\times P_j \left(Ax + B \left(-\left(R + \beta B' P_j B\right)^{-1} \left(\beta B' P_j A + W'\right) x\right)\right) \end{aligned}$$

lo cual implica que:

$$v_{j+1}(x) = x' \left[Q + \beta A' P_j A - \left(\beta A' P_j B + W\right) \left(R + \beta B' P_j B\right)^{-1} \left(\beta B' P_j A + W'\right)\right] x.$$

Bibliografía

[1] Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press.

[2] Brock, W.A., & Mirman, L. (1972). Optimal economic growth and uncertainty: The discounted case. *International Economic Review*, 14, (3), 560 - 573.

[3] Cass, D. (1965). Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *Review of Economic Studies*, 32, (3), 233-240.

[4] Koopmans, T. (1960). Stationary ordinal utility and impatience. *Econometrica*, 28, 387 - 309.

[5] Koopmans, T. (1965). On the concept of optimal growth, en: *The Econometric Approach to Development Planning* (Rand-McNally).

[6] Long, J. B, & Plosser, Ch I, (1983). Real business cycles. *Journal of Political Economy*, 91,(1), 39-69.

[7] Ramsey, F. P. (1928). A mathematical theory of saving. *Economic Journal*, 38, 543-559.

[8] Stokey, N. & Lucas, R. Jr. con Prescott, E. (1989). *Recursive methods in economic dynamics*. Harvard University Press.

II

Programación dinámica: el caso determinístico

El objetivo de este capítulo es formalizar los métodos presentados en el capítulo anterior. Teniendo en mente la diversidad de modelos de optimización dinámica que pueden abordarse con estos métodos, consideraremos un problema general que incluye algunos de los modelos más importantes que se encuentran en la literatura económica. Por ejemplo, los modelos de crecimiento y los modelos de ciclos reales son casos particulares del modelo general que vamos a estudiar.[1]

A. Problemas secuenciales y funcionales formalmente

El problema típico que queremos resolver, o *problema secuencial* (PS), tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
& \sup_{\{u_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \\
s.a \quad & : \\
x_{t+1} \quad & = \quad g\left(x_t, u_t\right), \\
u_t \quad & \in \quad \Gamma(x_t), t = 0,\ 1, 2, ... \\
x_0 \quad & \in \quad X \text{ dado,}
\end{aligned}
$$

donde sup significa el supremo de un conjunto,[2] $\beta \in [0, \infty)$, $x_t \in R^n$, $u_t \in R^m$, $X \subset R^n$, r y g son funciones de $X \times R^m$ en R y X, respectivamente, y Γ es una correspondencia de X en R^m. La función r la llamamos *función de retorno (instantáneo)* y por lo general será la utilidad instantánea del agente representativo. Las variables x_t se llaman *variables de estado,* que

[1]Este capítulo está basado en el capítulo 4 de Stokey-Lucas [1989].

[2]Véase el Apéndice para la definición precisa de supremo. Sin embargo, para el lector más práctico, basta con pensar que bajo las hipótesis que haremos en todos los problemas que enfrentaremos en este libro, el supremo es el máximo.

típicamente son el monto de capital o la cantidad de activos que tiene el agente representativo en el período t. Las variables de estado caracterizan las posibilidades de elección presentes y futuras del agente optimizador. La función g describe la evolución de las variables de estado dada una escogencia de las variables u_t que llamamos *variables de control.* Las variables de control son las que el agente optimizador busca escoger en forma óptima, teniendo en cuenta que éstas determinan los estados futuros. Finalmente, la correspondencia Γ describe las posibilidades de escogencia de las variables de control que tiene el agente cuando la economía se encuentra en un estado x_t. Una nota adicional sobre el planteamiento del problema puede ayudar a esclarecer las ideas. Las variables x_t caracterizan el estado de la economía, es decir, el ambiente económico frente al cual un agente debe tomar una decisión. Como ya habíamos señalado, x_t puede ser el monto de capital que existe en la economía (como en el modelo básico de crecimiento), lo cual determina las posibilidades de producción de las firmas y, consecuentemente, el nivel de consumo o inversión. A su vez, la inversión y el consumo son las variables de control que los agentes pueden escoger. Esto se captura a través de la restricción $u_t \in \Gamma(x_t)$. De esta forma, dado x_0 (el estado inicial de la economía) el agente observa las posibilidades que tiene para escoger el control inicial u_0 sabiendo que éste le determinará el estado de la economía $(x_1 = g\,(x_0, u_0))$ y las posibilidades de escogencia del control un período más tarde $(u_1 \in \Gamma(x_1))$, y así sucesivamente. Según estas restricciones, el agente debe procurar escoger los controles con el fin de maximizar el valor presente de los retornos futuros.

Obsérvese que el ejemplo de Brock y Mirman del capítulo anterior es un caso particular de este tipo de problemas. En este caso $x_t = k_t$, $u_t = c_t$, $r(c_t) = \log(c_t)$, $g(k_t, c_t) = k_t^{\alpha} - c_t$, $\Gamma(k_t) = \{c_t : 0 \leq c_t \leq k_t^{\alpha}\}$ y $X = R_{++}$. De igual forma, es fácil ver que el modelo básico de crecimiento considerado en el capítulo anterior, también es un caso particular del problema secuencial que estamos estudiando en esta parte.[3]

A todo problema secuencial, como el de arriba, le asociamos un *problema funcional* (PF):

$$\begin{aligned} v(x) &= \sup_u \{r(x,u) + \beta v(g(x,u))\} \\ s.a &: u \in \Gamma(x). \end{aligned}$$

La función h que nos da el valor de u que resuelve el problema anterior para

[3]El problema secuencial es simbólicamente más general que lo que a primera vista parece. Por ejemplo, supongamos que la dinámica de la variable de estado puede escribirse de la forma:

$$x_{t+1} = g\,(x_t, x_{t-1}, ..., x_{t-p}, u_t, u_{t-1}, ..., u_{t-q})$$

donde p y q son números naturales positivos y $x_0, x_{-1}, ..., x_{-p}, u_{t-1}, ..., u_{t-q}$ son dados. Es fácil ver que, mediante la introducción de nuevas variables de estado y control, la dinámica anterior puede transformarse en un problema simbólicamente equivalente al problema secuencial de este capítulo.

cada x, es la llamada *función de política.*[4] Es decir, la función de política es tal que para todo $x \in X$:

$$v(x) = r(x, h(x)) + \beta v(g(x, h(x)))\}$$

Nuestro objetivo es ahora encontrar las condiciones bajo las cuales se cumple el *principio de optimalidad de Bellman*: si v es la función que resuelve el problema funcional, entonces, bajo ciertas condiciones, $v(x_0)$ es el valor máximo que puede alcanzar el problema secuencial; y si $\{(x_t^*, u_t^*)\}$ es tal que: $v(x_t^*) = r(x_t^*, u_t^*) + \beta v(g(x_t^*, u_t^*))$ para $t = 0, 1, 2, ...$, donde $u_t^* \in \Gamma(x_t^*)$, $x_{t+1}^* = g\left(x_t^*, u_t^*\right), x_0^* = x_0$ entonces, $\{(x_t^*, u_t^*)\}$ resuelve el problema secuencial. Más aún, probaremos un converso para cada una de las afirmaciones anteriores.

Comencemos por hacer algunas hipótesis básicas para que el problema secuencial tenga sentido.

Definición 1. *Una sucesión de estados y controles* $\{(x_t, u_t)\}_{t=0,1...,}$*, en* $X \times R^m$ *es una dinámica factible desde* x_0 *para el problema secuencial, si* $u_t \in \Gamma(x_t)$ *y* $x_{t+1} = g\left(x_t, u_t\right)$ *para* $t = 0, 1, 2, ...,$*. En este caso decimos que la sucesión de controles* $\{u_t\}$ *es un plan factible desde* x_0*. El conjunto de todas las dinámicas factibles desde* x_0 *lo denotamos por* $\Pi(x_0)$*. Frecuentemente y abusando un poco del lenguaje, diremos que* $\{x_t\}_{t=0,...}$ *es una dinámica factible desde* x_0*.*

Las siguientes hipótesis, aunque no las más generales, serán suficientes para desarrollar las ideas principales.

Hipótesis 1. $\Gamma(x)$ *es diferente de vacío para todo* $x \in X$ *(i.e.,* $\Gamma(x) \neq \phi$ *para todo* x*).*

Hipótesis 2. *Para todo* $x_0 \in X$*, existe* $M_{x_0} \in R$ *tal que* $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \leq M_{x_0}$ *para toda dinámica factible* $\{(x_t, u_t)\}_{t=0,1...,}$*desde* x_0*.*

Esta hipótesis asume, implícitamente, que para toda dinámica factible desde x_0 la suma infinita existe y es finita. La forma más común para garantizar la hipótesis anterior es utilizando lo que en la literatura se conoce como condición de *no-ponzi.* En la literatura económica la condición de no-ponzi toma formas distintas según el modelo en consideración. En todos los casos la idea es siempre restringir el conjunto de las dinámicas factibles, de tal forma que el retorno esté acotado. Típicamente esta condición toma la forma de una restricción al endeudamiento de los agentes y es, por lo tanto, una restricción del problema que el agente optimizador lleva en consideración.[5]

[4] En ocasiones, la solución al problema de optimización no es única y debemos hablar de la *correspondencia de política.* Véase el Apéndice para la definción de correspondencia.

[5] La condición de no-ponzi no debe ser confundida con la condición de transversalidad. En los ejercicios explicamos las diferencias.

De otra parte obsérvese que en las condiciones anteriores permitimos que, para ciertas dinámicas factibles, la suma sea $-\infty$. Sin embargo, necesitamos una hipótesis en la que, por lo menos para ciertas dinámicas factibles, la suma esté acotada inferiormente. Éste es el contenido de la siguientes hipótesis.

Hipótesis 3. *Para todo $x_0 \in X$, existe una dinámica factible $\{(x_t, u_t)\}_{t=0,1,...}$ desde x_0 y un $m_{x_0} \in R$ tal, que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=0,1,..}$, $S_n = \sum_{t=0}^{n} \beta^t r(x_t, u_t)$ satisface $m_{x_0} \leq S_n$ para todo n.*[6]

Las hipótesis 1, 2 y 3 tienen como único fin garantizar la existencia de un valor finito para el supremo del problema secuencial. Ahora, es claro que si r es acotada y $\beta \in [0, 1)$, entonces las condiciones 2 y 3 se cumplen. En los ejercicios se dan otras condiciones bajo las cuales la hipótesis 2 se cumple.

Según las condiciones anteriores podemos definir la función $\widetilde{v} : X \to R$, donde $\widetilde{v}(x_0) = \sup_{\{(x_t,u_t)\} \in \Pi(x_0)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t)$. Es decir, $\widetilde{v}(x_0)$ es el valor supremo del (PS). Llamamos a la función $\widetilde{v}$ la *función valor* del problema. La primera relación importante entre el (PS) y el (PF) nos la da la siguiente proposición.

Proposición 1. *Bajo las hipótesis 1, 2 y 3, $\widetilde{v}$ resuelve el PF.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, $u_0 \in \Gamma(x_0)$ y $x_1 = g(x_0, u_0)$. Como $\widetilde{v}(x_1)$ es el valor supremo del (PS) con valor inicial x_1, entonces existe una dinámica factible desde $x_1, \{(x_1, u_1), (x_2, u_2), ...\}$ tal que, $\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} r(x_t, u_t) \geq \widetilde{v}(x_1) - \varepsilon$. Ahora $\{(x_0, u_0), (x_1, u_1), ...\} \in \Gamma(x_0)$, luego $\widetilde{v}(x_0) \geq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \geq r(x_0, u_0) + \beta\, \widetilde{v}(x_1) - \beta\varepsilon = r(x_0, u_0) + \beta\, \widetilde{v}(g(x_0, u_0)) - \beta\varepsilon$.

Como esto es verdad para todo $\varepsilon > 0$ y u_0 es cualquier elemento $\Gamma(x_0)$; entonces tenemos que $\widetilde{v}(x_0) \geq r(x_0, u_0) + \beta\, \widetilde{v}(g(x_0, u_0))$ para todo $u_0 \in \Gamma(x_0)$, es decir, $\widetilde{v}(x_0) \geq \sup_{u_0 \in \Gamma(x_0)} \{r(x_0, u_0) + \beta\, \widetilde{v}(g(x_0, u_0))\}$. Olvidándonos de los subíndices tenemos $\widetilde{v}(x) \geq \sup_{u \in \Gamma(x)} \{r(x, u) + \beta\, \widetilde{v}(g(x, u))\}$. Ahora, para probar la desigualdad contraria, argumentamos de la misma forma: sea $\varepsilon > 0$, entonces por la definición de supremo, existe una dinámica factible desde x_0, $\{(x_0, u_0), (x_1, u_1), ...\}$ tal que $\widetilde{v}(x_0) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) + \varepsilon \leq r(x_0, u_0) + \beta \widetilde{v}(x_1) + \varepsilon$. De nuevo, como ε es arbitrario, tenemos $\widetilde{v}(x_0) \leq r(x_0, u_0) + \beta \widetilde{v}(x_1)$, luego $\widetilde{v}(x_0) \leq \sup_{u_0 \in \Gamma(x_0)} \{r(x_0, u_0) + \beta\, \widetilde{v}(g(x_0, u_0))\}$. Nuevamente, olvidándonos de los subíndices, obtenemos la desigualdad que nos faltaba. □

[6]Hacer este supuesto utilizando todas las dinámicas factibles es más restrictivo y no se cumpliría para la función de utilidad logarítmica ni para la función de utilidad CES con parámetro $\sigma < 1$.

La siguiente proposición nos da un converso parcial de la anterior y las condiciones bajo las cuales se cumple una de las afirmaciones del principio de optimalidad.

Proposición 2. *Según las hipótesis 1, 2 y 3, si v resuelve el PF y además $\overline{\lim_{t\to\infty}}\beta^t v(x_t) = 0$ para todo $x_0 \in X$ y dinámica factible $\{x_t\}$ desde x_0 (condición de transversalidad fuerte), entonces $\widetilde{v} = v$. Es decir, v resuelve el PS.*[7]

Demostración. Vamos a probar dos cosas. Primero probaremos que para toda dinámica factible desde x_0, $v(x_0) \geq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t r(x_t,u_t)$, y segundo que para todo $\epsilon > 0$, existe una dinámica factible $\{(x_t,u_t)\}_{t=0,1,..}$desde x_0, de modo que $v(x_0) \leq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t r(x_t,u_t) + \varepsilon$. Estas dos afirmaciones implican que v es la función valor del problema. Para demostrar la primera, como v es solución del (PF) entonces para toda dinámica factible $\{(x_t,u_t)\} \in \Pi(x_0)$ tenemos:

$$\begin{aligned} v(x_0) &\geq r(x_0,u_0) + \beta v(x_1) \\ &\geq r(x_0,u_0) + \beta r(x_1,u_1) + \beta^2 v(x_2) \geq .... \\ &\geq \sum_{t=0}^{k}\beta^t r(x_t,u_t) + \beta^{k+1} v(x_{k+1}). \end{aligned}$$

Usando la hipótesis 2 y haciendo $k \to \infty$ obtenemos $v(x_0) \geq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t r(x_t,u_t)$. Para demostrar la segunda afirmación, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y $\{\delta_n\}_{n=0,...}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\sum_{t=0}^{\infty}\delta_t\beta^t \leq \varepsilon$. Como v resuelve el (PF), entonces existe u_0, de modo que $v(x_0) \leq r(x_0,u_0) + \beta v(g(x_0,u_0)) + \delta_0$. Sea $x_1 = g(x_0,u_0)$ y por la misma razón que arriba, existe $u_1 \in \Gamma(x_1)$ tal que: $v(x_1) \leq r(x_1,u_1) + \beta v(x_2) + \delta_1$. Luego, $v(x_0) \leq r(x_0,u_0) + \beta r(x_1,u_1) + \beta^2 v(x_2) + \delta_0 + \beta\delta_1$. Continuando de esta manera podemos encontrar una dinámica factible $\{(x_t,u_t)\} \in \Pi(x_0)$ que satisfaga: $v(x_0) \leq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t r(x_t,u_t) + \sum_{t=0}^{\infty}\delta_t\beta^t + \overline{\lim_{t\to\infty}}\beta^t v(x_t) \leq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t r(x_t,u_t) + \varepsilon$. $\square$

Esta proposición muestra que el problema funcional tiene una solución única que satisface la condición de transversalidad.[8] [9] Intuitivamente, si se tiene

[7] notación $\overline{\lim_{t\to\infty}}\beta^t v(x_t) \leq 0$ significa el límite superior de la sucesión $\{\beta^t v(x_t)\}_{t=0,1,...,}$. Ver Apéndice.

[8] Para variaciones de esta última proposición cuando la condición de transversalidad no se cumple, véase Stockey-Lucas[1989], ejercicio 4.3.

[9] En la literatura de optimización dinámica el término *condición de transversalidad* generalmente se refiere a una condición necesaria (o suficiente) que se debe cumplir en

$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \beta^t v(x_t) > 0$, entonces a lo largo de la dinámica factible $\{x_t\}_{t=0,1...,}$ se están subutilizando los recursos. Esta interpretación sugiere que la condición de transversalidad es muy fuerte y por lo tanto no debe ser una condición necesaria (Véase ejercicio 13). En efecto, esta condición es necesaria a lo largo de una dinámica que resuelve el PS pero no a lo largo de todas las dinámica factibles.

Nuestro objetivo ahora es caracterizar los *planes óptimos*. Es decir, aquellos planes factibles (si es que alguno existe) que permiten alcanzar el supremo del PS. Obsérvese que un plan factible determina unívocamente una dinámica factible.

Proposición 3. *Supongamos que se cumplen las hipótesis 1, 2 y 3. Sea* $\{(x_t^*, u_t^*)\}$ *una dinámica factible desde* x_0^* *que permite alcanzar el supremo del PS, entonces:*

$$\widetilde{v}(x_t^*) = r(x_t^*, u_t^*) + \beta \widetilde{v}\left(x_{t+1}^*\right), t = 0, 1, 2, ... \tag{II.1}$$

Obsérvese que en esta proposición podemos cambiar $\widetilde{v}$ por v.

Demostración. Como (x_t^*, u_t^*) alcanza el supremo del (PS) entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t^*, u_t^*) &= r(x_0^*, u_0^*) + \beta \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_{t+1}^*, u_{t+1}^*) \qquad \text{(II.2)} \\ &\geq r(x_0^*, u_0^*) + \beta \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_{t+1}, u_{t+1}) \end{aligned}$$

para toda dinámica $\{(x_1^*, u_1), (x_2, u_2), ...\} \in \Pi(x_1^*)$, así $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_{t+1}^*, u_{t+1}^*) \geq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_{t+1}, u_{t+1})$, para toda dinámica $\{(x_1^*, u_1), (x_2, u_2), ...\} \in \Pi(x_1^*)$. Ahora, como $\{(x_1^*, u_1^*), (x_2^*, u_2^*), ...\} \in \Pi(x_1^*)$, entonces $\widetilde{v}(x_1^*) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_{t+1}^*, u_{t+1}^*)$. Volviendo a la ecuación II.2 tenemos entonces: $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t^*, u_t^*) = r(x_0^*, u_0^*) + \beta \widetilde{v}(x_1^*)$, pero la primera sumatoria es igual a $\widetilde{v}(x_0^*)$ por la definición de $\{(x_t^*, u_t^*)\}$. Esto demuestra la afirmación para $t = 0$. Para los otros períodos basta utilizar inducción. □

la solución del problema. Usaremos esta terminología. Sin embargo, en la literatura de la Teoría del Equilibrio con Mercados Incompletos en horizonte infinito el término generalmente se refiere a restricciones asintóticas sobre el nivel de endeudamiento en el que pueden entrar los agentes (Véase Magill y Quinzii [1994]). En este último sentido se parece más a una condición de no-ponzi.

Finalmente tenemos un converso para esta proposición que nos da las condiciones bajo las cuales se cumple la otra afirmación del Principio de Optimalidad.

Proposición 4. *Bajo las hipótesis 1, 2 y 3, si* $\{(x_t^*, u_t^*)\}$ *es una dinámica factible desde* x_0^* *que satisface II.1 y tal que* $\overline{\lim_{t\to\infty}} \beta^t \widetilde{v}(x_t^*) \leq 0$ *(condición de transversalidad débil), entonces* $\{(x_t^*, u_t^*)\}$ *resuelve el PS.*

Demostración. Como $\{(x_t^*, u_t^*)\}$ es una dinámica factible desde x_0^*, entonces $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t r\left(x_t^*, u_t^*\right) \leq \widetilde{v}(x_0^*)$. Ahora, sustituyendo k veces en II.1 el valor de $\widetilde{v}(x_t^*)$ en términos de $\widetilde{v}\left(x_{t+1}^*\right)$ llegamos a: $\widetilde{v}(x_0^*) = \sum\limits_{t=0}^{k} \beta^t r\left(x_t^*, u_t^*\right) + \beta^{k+1} \widetilde{v}\left(x_{k+1}^*\right)$ y usando que $\overline{\lim_{t\to\infty}} \beta^t \widetilde{v}(x_t^*) \leq 0$ podemos concluir que $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t r\left(x_t^*, u_t^*\right) \geq \widetilde{v}(x_0^*)$; luego, por la desigualdad anterior, tenemos $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t r\left(x_t^*, u_t^*\right) = \widetilde{v}(x_0^*)$. □

Intuitivamente, si a lo largo de una dinámica factible que satisface II.1 no se subutilizan recursos, entonces ésta debe ser una dinámica factible óptima para el problema secuencial. El ejercicio 14 ilustra el caso de un problema dinámico para el cual existe un plan factible que satisface II.1 pero que no es un plan óptimo para el problema secuencial.

Como consecuencia inmediata de las cuatro proposiciones anteriores tenemos el siguiente teorema que resume las relaciones entre el (PS) y el (PF).

Teorema 1. *Equivalencia del (PS) y el (PF): según las hipótesis 1, 2 y 3, y si la condición de transversalidad se satisface, el (PS) y el (PF) tienen las mismas soluciones en términos de valor y dinámicas óptimas.*

En ocasiones la escogencia inteligente del espacio de estados X o un cambio de variables, puede dar paso a la aplicación rigurosa del método que hemos explicado. Véase el ejemplo 6 y el capítulo 5 sobre métodos computacionales.

Hasta este punto hemos estudiado la relación entre el problema funcional y el problema secuencial, pero aún no hemos dado un método para resolver ninguno de los dos, excepto por el método que introdujimos informalmente en el capítulo anterior para resolver el problema funcional. La programación dinámica no tendría tanto valor si no fuera porque para el (PF) existen varios métodos de solución. Nos concentraremos aquí en el método más importante desde el punto de vista teórico y práctico para resolver el problema funcional, pues éste sirve para demostrar la existencia de soluciones (al igual que sus propiedades más importantes) y a la vez motiva algunos métodos numéricos importantes para resolver computacionalmente el (PF).

Para esto necesitamos pedir un poco más sobre la correspondencia Γ y la función de retorno r, que lo que se pide en las hipótesis 1, 2 y 3.

Hipótesis 4. *$\Gamma : X \hookrightarrow X$ es una correspondencia de valores compactos (i.e.,$\Gamma(x)$ es compacto para todo x), continua y $\Gamma(x) \neq \phi$ para todo x.*

Hipótesis 5. *$\beta \in (0,1)$ y la función retorno es acotada y continua sobre el grafo de Γ.*[10]

Bajo estas hipótesis, el supremo se realiza como un máximo. Ahora, es claro que las hipótesis 4 y 5 implican 1, 2 y 3. Además $\beta \in (0,1)$, por lo que bajo estas condiciones se cumple el Teorema de Equivalencia (Teorema 1).

El método que expondremos para resolver el problema funcional nace, como se observó en el capítulo anterior, de la identificación del (PF) con un problema de punto fijo. Informalmente, al (PF) le asociamos un operador T de cierto espacio de funciones sobre X en sí mismo. Éste se define de la siguiente manera: dada una función f en este espacio de funciones (más adelante explicaremos cúal es), $T[f]$ es la función que evaluada en $x \in X$ nos da:

$$\begin{aligned} T[f](x) &= \sup_u \{r(x,u) + \beta f(g(x,u))\} \\ s.a &: u \in \Gamma(x). \end{aligned}$$

Así, el PF se reduce a calcular un punto fijo del operador T. Ahora, bajo la hipótesis 5 es claro que $\widetilde{v}$, y por lo tanto v por la primera proposición, es una función acotada sobre el conjunto X, y puesto que el operador T está definido a través de un problema de maximización, entonces sería natural buscar un punto fijo en el espacio de las funciones reales, continuas y acotadas sobre X; $C_a(X)$. Si encontramos un punto fijo del operador T en $C_a(X)$ y por lo tanto una solución del PF, entonces, por el Teorema de Equivalencia, esta solución debe ser el valor supremo del PS. Una vez tenemos la función valor podemos proceder a encontrar el plan óptimo, resolviendo paso a paso el problema de maximización que aparece en el PF, es decir, encontrando la función política h. Otra forma de encontrar el plan óptimo sería resolviendo el sistema de ecuaciones II.1. La esperanza en estos procedimientos radica en el siguiente teorema, muy usado en matemáticas, el cual se discute en el Apéndice.

Teorema 2. *(Punto fijo para contraccciones): supongamos que se cumplen 4 y 5, y sea $C_a(X)$ el espacio de las funciones reales, continuas y acotadas sobre X con la norma del supremo $\|\cdot\|$. Entonces el operador T definido sobre $C_a(X)$ es una aplicación de este espacio en sí mismo, $T : C_a(X) \to C_a(X)$; tiene un único punto fijo v y además para cualquier $v_0 \in C_a(X)$ se tiene:*

$\|T^n[v_0] - v\| \leq \beta^n \|v_0 - v\|$, $n = 0, 1, 2, ...$

En particular $\lim_{n\to\infty} T^n[v_0] = v$ en la métrica del supremo. Adicionalmente, la correspondencia de política h es de valores compactos y hemicontinua superiormente.

[10] El grafo de Γ es el conjunto: $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R}^m : y \in \Gamma(x)\}$

Demostración. Véase Stokey-Lucas [1989] página 79. □

B. Ejemplos

Ahora veamos cómo resolver algunos problemas formalmente. Algunos de los ejemplos ponen de manifiesto la generalidad del método de solución.

Ejemplo 5 (Brock - Mirman formalmente)**.** Sea $u(c_t) = \log(c_t)$, $f(k_t) = k_t^\alpha$ donde $\alpha \in (0,1)$, $\delta = 1$ y $k_0 \in X = R_{++}$ es dado. Las hipótesis 1, 2 y 3 no presentan mayores problemas. La hipótesis 1 es trivial siempre que el espacio de estados sea $X = R_{++}$. Para las otras dos hipótesis obsérvese que para cualquier dinámica factible del capital $\{k_t\}_{t=0,1,...,}$, $k_{t+1} \leq k_t^\alpha$, de lo contrario, el consumo podría ser negativo. Es fácil mostrar que, dado que $k_0 \in X$, cualquier dinámica factible $\{k_t\}_{t=0,1,...,}$ debe satisfacer que $0 \leq k_t \leq \max\{k_0^\alpha, 1\}$. Sea $\overline{k} = \max\{k_0^\alpha, 1\}$, $\overline{c} = \overline{k}^\alpha$, $\{(k_t, c_t)\}_{t=0,1,...,}$ cualquier dinámica factible y consideremos las sumas parciales $S_T^\Delta = \sum_{t=0}^{T} \beta^t(\log(c_t) - \log(\overline{c}))$. Claramente $\left(S_T^\Delta\right)_{T=0,1,...,}$ es una sucesión acotada por cero y monótona decreciente, luego converge en $\{-\infty\} \cup R$. De otra parte, como la sucesión de sumas parciales $\sum_{t=0}^{T} \beta^t \log(\overline{c})$ converge a un número finito entonces, las sumas parciales $S_T = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \log(c_t)$ convergen en $\{-\infty\} \cup R$. Esto demuestra que se cumple la hipótesis 2.

Para demostrar que se cumple la hipótesis 3 considere la siguiente dinámica factible $\{(k_t, c_t)\}_{t=0,1,...,}$ donde $k_{t+1} = \frac{k_t^\alpha}{2}$ y $c_t = \frac{k_t^\alpha}{2}$. Es fácil ver que a lo largo de esa dinámica factible la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=0,1,..}$ está acotada inferiormente.

Finalmente, en el capítulo 1, mediante iteraciones de la función valor, calculamos un candidato a función valor del problema secuencial de Brock y Mirman, $v(k) = \frac{1}{1-\beta}(\log(1-\beta\alpha) + \frac{\beta\alpha}{1-\beta\alpha}\log(\beta\alpha)) + \frac{\alpha}{1-\beta\alpha}\log(k)$. Claramente esta función resuelve el problema funcional y, puesto que cualquier dinámica factible $\{k_t\}_{t=0,1,..}$ está acotada, $0 \leq k_t \leq \overline{k}$, entonces es fácil ver que se cumple la condición de transversalidad (fuerte) y podemos aplicar la proposición 2.

Ejemplo 6. (Crecimiento con inversión en capital humano).[11] En este modelo de crecimiento supondremos que los únicos factores de producción en cada período son el capital humano h_t y el tiempo que el agente representativo dedica al trabajo n_t. Más concretamente, la función de producción de esta economía depende únicamente del *capital humano efectivo* en cada

[11] Tomado de Stokey-Lucas página 111. A su vez, este modelo tiene origen en los artículos de Lucas [1988] y Usawa [1964].

período: $h_t n_t$. Es decir, $y_t = f(h_t n_t)$, donde f es la función $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$. Cambiando simplemente las unidades con las que medimos este tiempo, podemos suponer que $n_t \in [0, 1]$. Ahora, la evolución del capital humano en esta economía depende del tiempo dedicado a trabajar, siendo la acumulación del capital humano menor cuanto más tiempo se dedique al trabajo y mayor cuanto menos tiempo se dedique a éste. Esto refleja el hecho de que, para acumular capital humano y aumentar la productividad, el agente debe dedicar tiempo a esta tarea, por ejemplo estudiando o capacitándose, dejando entonces de trabajar un poco.[12] Una forma de capturar esta dinámica es la siguiente: Sea $h_{t+1} = h_t \Psi(n_t)$ donde Ψ es una función de $[0, 1]$ en R_+, con estas características: Ψ es continua, estrictamente cóncava, estrictamente decreciente y tal que $\Psi(0) = 1 + \lambda$, $\Psi(1) = 1 - \delta$, donde $0 \leq \lambda,\ \delta \leq 1$ (figura 2).

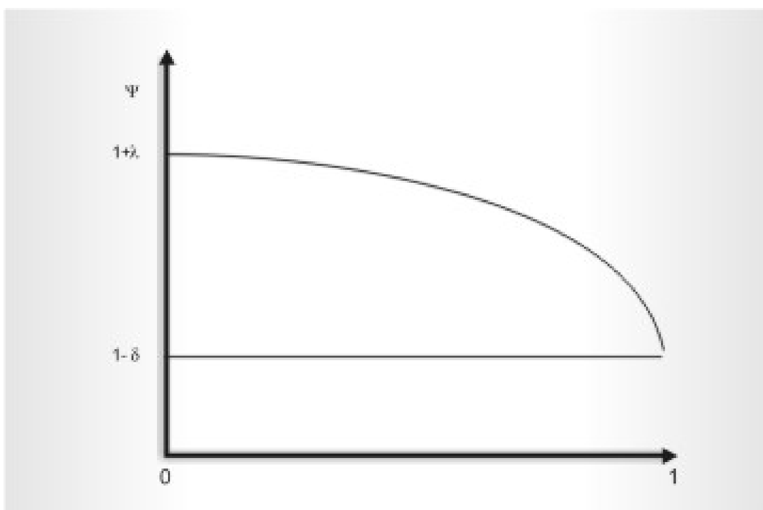

Figura 2: Función que determina la dinámica del capital humano.

La idea de esta función es la siguiente: si el agente decide no trabajar, entonces su capital humano se apreciará a una tasa λ, reflejando esto el hecho de que al no trabajar el agente puede dedicar todo su tiempo a estudiar o capacitarse con el fin de incrementar su capital humano. En el otro extremo, si el agente decide dedicar todo su tiempo al trabajo, entonces no tendrá tiempo para capacitarse y su capital humano se depreciará a una tasa δ. La concavidad de la función implica que, cuanto más tiempo el agente dedique a acumular capital humano, menos acumulará de éste en el margen. El agente representativo en esta economía puede consumir todo lo que produce y su variable decisión en cada período es cuánto tiempo debe dedicarse al trabajo.

[12] Por eso decimos que éste es un modelo de crecimiento con inversión en capital humano, a diferencia de otros en los que cuanto más se trabaja más se aprende al adquirir mayor experiencia, etc. Véase ejemplo siguiente (aprendiendo haciendo).

Sea $\beta \in (0,1)$ y supongamos que tiene una utilidad instantánea de consumo: $u(c) = \frac{c^{\sigma}}{\sigma}$, donde $\sigma \in (0,1)$. El problema del agente representativo es entonces:

$$\begin{array}{rl} & \sup\limits_{\{n_t\}} \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(f(h_t n_t)\right) \\ s.a \ : & h_{t+1} = h_t \Psi\left(n_t\right) \\ & h_0 \text{ dado.} \end{array}$$

En este ejemplo, la variable de control es n_t, la variable de estado es h_t, $X = R_+$, la función de retorno es $u \circ f$, la dinámica de la variable de estado está dada por $h_{t+1} = g\left(h_t, n_t\right) = h_t \Psi\left(n_t\right)$, y el conjunto de restricciones sobre el control está dado por $\Gamma\left(h_t\right) = \left\{n_t : 0 \leq n_t \leq 1\right\}$. Ahora, es fácil probar que se satisfacen las hipótesis del teorema de equivalencia (teorema 1). Basta con notar que el capital humano se acumula o desacumula a una tasa máxima λ y δ respectivamente, y que por lo tanto:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(f(h_t n_t)\right) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta(1+\lambda)^{\alpha\sigma}\right)^t \frac{\left(h_0 n_t\right)^{\alpha\sigma}}{\sigma}$$

para toda dinámica factible desde h_0.

Ahora, la desigualdad de la derecha es un número finito siempre que $\beta\left(1+\lambda\right)^{\alpha\sigma} < 1$. Pasemos ahora al problema funcional:

$$\begin{array}{rcl} v(h_t) & = & \max\limits_{\{n_t\}} \left\{u\left(f(h_t n_t)\right) + \beta v(h_t \Psi\left(n_t\right))\right\} \\ s.a & : & 0 \leq n_t \leq 1 \end{array}$$

Ahora aplicaremos el Teorema del Punto Fijo para encontrar la función valor. Sea $v_0 = 0$, entonces $v_1(h) = \max\limits_{0 \leq n \leq 1} \left\{\frac{(nh)^{\alpha\sigma}}{\sigma}\right\} \Rightarrow n = 1 \Rightarrow v_1(h) = \frac{h^{\alpha\sigma}}{\sigma}$, por lo tanto,

$$v_2(h) = \max_{0 \leq n \leq 1} \left\{\frac{(nh)^{\alpha\sigma}}{\sigma} + \beta \frac{(h\Psi(n))^{\alpha\sigma}}{\sigma}\right\} = h^{\alpha\sigma} \max_{0 \leq n \leq 1} \left\{\frac{n^{\alpha\sigma}}{\sigma} + \beta \frac{(\Psi(n))^{\alpha\sigma}}{\sigma}\right\}$$

Luego, el valor de n que resuelve este problema no depende de h. Esto implica que $v_2(h) = A_2 \frac{h^{\alpha\sigma}}{\sigma}$, donde A_2 es una constante positiva. De igual forma $v_n(h) = A_n \frac{h^{\alpha\sigma}}{\sigma}$, donde A_n es una constante positiva. Es natural entonces proponer como candidato a función valor de la forma $v(h) = A \frac{h^{\alpha\sigma}}{\sigma}$. La constante A puede encontrarse observando que v debe satisfacer la ecuación funcional. Es decir,

$$\begin{array}{rcl} A \dfrac{h^{\alpha\sigma}}{\sigma} & = & \max\limits_{\{n\}} \left\{\dfrac{(hn)^{\alpha\sigma}}{\sigma} + \beta A \dfrac{h^{\alpha\sigma} \Psi\left(n\right)^{\alpha\sigma}}{\sigma}\right\} \\ s.a & : & 0 \leq n \leq 1 \end{array}$$

No es difícil demostrar que la función de política es una constante $n^* \in (0,1]$. Es decir, no interesa cual sea el nivel de capital humano h, el agente siempre escoge trabajar n^*. Por lo tanto, la tasa de crecimiento del capital humano es constante, pues $h_{t+1} = h_t\Psi(n_t) = h_t\Psi(n^*)$, luego $\frac{h_{t+1}}{h_t} =$ constante. El valor exacto de esta constante depende de la forma explícita de Ψ (véanse ejercicios al final del capítulo).

Ejemplo 7. (aprendiendo haciendo). Consideremos otro caso de crecimiento endógeno e inversión en capital humano, utilizando exactamente la misma notación del ejemplo anterior. Ahora, la única diferencia es la forma como vamos a definir la función de acumulación de capital humano. En el caso anterior había un costo de invertir en dicho capital. El agente debía sacrificar parte de su tiempo educándose (por lo cual dejaba de trabajar) para incrementar su capital humano. En este caso, por el contrario, el capital humano se acumula gracias a la experiencia y el trabajo en el proceso de producción. Es decir, el capital humano se aumenta en la medida que trabajamos. La motivación detrás de esta especificación tiene origen en el papel que la experiencia cumple en la productividad del trabajo.[13]

Tenemos el mismo problema del agente representativo expuesto arriba:

$$\begin{aligned} & \sup_{\{n_t\}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left(f(h_t n_t)\right) \\ s.a &: \\ h_{t+1} &= h_t\Psi\left(n_t\right),\ h_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Las diferentes interpretaciones sobre la forma como se acumula capital humano están ligadas a la forma funcional de Ψ. Definimos $\Psi\left(n_t\right) = \gamma n_t^{\theta}$, donde $\gamma > 0$ y $\theta \in (-\infty, 1)$. Ahora, si $\theta \geq 0$, entonces la acumulación de capital humano es un producto del trabajo. Éste es el caso de "aprendiendo haciendo".[14]

La variable de control es n_t, la variable de estado es h_t, la función de retorno es $u \circ f$, $h_{t+1} = g\left(h_t, n_t\right) = h_t\Psi\left(n_t\right)$, $\Gamma\left(h_t\right) = \{n_t : 0 \leq n_t \leq 1\}$ y $X = R_+$.

El problema funcional asociado es:

$$\begin{aligned} v(h_t) &= \sup_{\{n_t\}}\left\{u\left(f(h_t n_t)\right) + \beta v(h_t\Psi\left(n_t\right))\right\} \\ s.a &: 0 \leq n_t \leq 1 \end{aligned}$$

Tenemos la misma forma funcional de la función de utilidad $u(c) = \frac{c^{\sigma}}{\sigma}$, y de la función de producción $f(nh) = (nh)^{\alpha}$.

[13] La idea de "aprendiendo haciendo" ("Learning by Doing") en un modelo de crecimiento se estudia en Arrow [1962].

[14] Nótese que $\Psi'\left(n_t\right) = \gamma\theta n_t^{\theta-1} > 0$ (los retornos a la *experiencia* son crecientes) y $\Psi''\left(n_t\right) = \gamma\theta(\theta-1)n_t^{\theta-2} < 0$ (los retornos marginales a la *experiencia* son decrecientes).

Sea $v_0(h) = 0$, entonces es muy fácil ver que $v_n(h_t) = \frac{h_t^{\alpha\sigma}}{\sigma} \sum_{i=0}^{n} (\beta\gamma^{\alpha\sigma})^i$, y la función de política en cada iteración es $n_t = 1$. Si $\beta\gamma^{\alpha\sigma} < 1$, la función valor del problema es:

$$v(h_t) = \frac{h_t^{\alpha\sigma}}{\sigma} \frac{1}{1 - \beta\gamma^{\alpha\sigma}}$$

Es fácil ver que, en efecto, la función de política es: $n_t = 1$. Luego la dinámica del capital es: $h_{t+1} = \gamma h_t$. Si $\gamma > 1$, entonces tenemos crecimiento endógeno.

Obsérvese que en los últimos dos ejemplos no existe una solución de estado estacionario en las variables en niveles. Sin embargo, si se divide cada una de las variables por la tasa de crecimiento de éstas, es posible reescribir el problema, en unas nuevas variables, para las cuales sí existe una solución de estado estacionario. Este procedimiento es muy útil cuando vamos a utilizar métodos computacionales, ya que éstos suponen que los problemas tiene una solución de estado estacionario en la que las variables no crecen.

C. Ejercicios y soluciones

C.1. Ejercicios

Ejercicio 7. Escribir el modelo básico de crecimiento y el ejemplo de Long y Plosser en la notación de este capítulo.

Ejercicio 8. Hercowitz-Sampson (1986). Considere el modelo básico de crecimiento con:

$$\begin{aligned} u(c_t, l_t) &= log(c_t - an_t^{\gamma}) \\ y_t &= k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} \\ k_{t+1} &= k_t \left(\frac{i_t}{k_t}\right)^{1-\delta} = k_t^{\delta} i_t^{1-\delta},\ a > 0;\ \gamma > 1 \end{aligned}$$

1. Demostrar que la función de utilidad es cóncava.
2. Demostrar que la función valor tiene la siguiente forma:

$$v(k_t) = D_0 + D_1 \ln k_t,$$

   donde D_i son constantes; las funciones de política tienen la forma:

$$\begin{aligned} c &= \Pi_1 k^{\Psi_1} \\ n &= \left(\Pi_0 k^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\gamma-\alpha}} = \Pi_2 k^{\frac{\alpha}{-1+\gamma+\alpha}} = \Pi_2 k^{\Psi_2} \end{aligned}$$

   y la dinámica óptima del capital tiene la forma:

$$k_{t+1} = (\Pi_2^{1-\alpha} - \Pi_1)^{1-\delta} k_t^{\delta+\Psi_1(1-\delta)} = \Pi_3 k$$

   donde Π_1, Π_2 y Π_3 son constantes.

Ejercicio 9. Estudiar la estabilidad del modelo de Hercowitz-Sampson.

Ejercicio 10. Diferencia entre la condición de no-ponzi y la condición de transversalidad. En términos generales, la condición de no-ponzi y la condición de transversalidad son exactamente ideas opuestas. La condición de no-ponzi es una restricción sobre el problema de optimización, de tal forma que éste esté bien definido. La condición de transversalidad es una condición suficiente para que un candidato a resolver el problema secuencial o funcional sea en efecto una solución. En este ejercicio ilustramos ambos conceptos mediante un ejemplo importante en economía. Consideremos una economía idéntica al modelo básico de crecimiento, excepto que existe un gobierno que emite deuda (bonos) para financiar su gasto y el agente representativo demanda estos bonos. El problema del agente representativo es:

$$\begin{aligned} & & max\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t) \\ s.a & : & \\ c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + \frac{b_t}{1+r_t} & \leq & f(k_t) + b_{t+1} - \tau_t \\ & & k_0, b_0 \text{ dados.} \end{aligned}$$

donde b_t es la demanda de bonos gubernamentales del agente, r_t es la tasa de interés real que éstos ofrecen entre $t-1$ y t, y τ_t son impuestos (cuando $\tau_t > 0$) o transferencias de suma fija (cuando $\tau_t < 0$)[15]. Para que el problema sea interesante vamos hacer la hipótesis, aunque no muy realista, de que los agentes pueden escoger cantidades negativas de bonos. Esto es, que en vez de prestarle al gobierno éste le preste al agente representativo. Obsérvese que en tal caso el problema, como está planteado, ciertamente no tiene solución, pues dada la tasa de interés y una trayectoría previsible de impuestos o transferencias, el agente escogería endeudarse cada vez más y más (escoger b_t cada vez más negativo) y así financiar el pago de intereses y niveles cada vez mayores de consumo. Para evitar esto se impone una restricción adicional en el nivel de endeudamiento de los agentes. Una forma de hacerlo es imponer la siguiente restricción, llamada restricción de no-ponzi:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+R_t} b_t \geq 0$$

donde $1 + R_t = \prod_{i=0}^{t}(1 + r_t)$. Intuitivamente, la restricción de no-ponzi quiere decir que, asintóticamente, el agente representativo no puede planear estar endeudado en valor presente.

1. Mostrar que bajo estas condiciones el problema de optimización sí tiene una solución.

[15]Esto quiere decir que los impuestos o transferencias son fijos y no dependen de, por ejemplo, el consumo del agente.

2. Escribir las condiciones de transversalidad para las dos variables de estado de este problema (capital y bonos). Obsérvese que la condición de transversalidad de los bonos es exactamente opuesta a la condición de no-ponzi.

3. ¿Cuál es el análogo a la condición de no-ponzi para el stock de capital?

Ejercicio 11. En este ejercicio se dan otras hipótesis según las cuales se cumple la hipótesis 2 (Véanse De La Croix - Michel [2002], página 326). Supongamos que para todo $u \in U$ las funciones $g(\cdot, u)$ y $r(\cdot, u)$ son no decrecientes y adicionalmente para todo $x \in X$

1. $\overline{g}(x) = \sup\limits_{u \in \Gamma(x)} \{g(x, u)\} \in X$

2. $\overline{r}(x) = \sup\limits_{u \in \Gamma(x)} \{r(x, u)\} \in R$

3. Para todo $x_0 \in X$ existen b_{x_0} y $\beta_{x_0} \in R, \beta_{x_0} > \beta$ tal que para toda sucesión $\{\overline{x}_t\}_{t=0,1,\ldots}$, $\overline{x}_{t+1} = \overline{g}(\overline{x}_t)$ tenemos $\beta_{x_0}^t \overline{r}(\overline{x}_t) \leq b_{x_0}$ para todo t.

Probar que bajo las hipótesis de este ejercicio se cumple la hipótesis 2.

Ejercicio 12. Utilizando las hipótesis del ejercicio anterior, demostrar la proposición 3 sin imponer la condición de transversalidad (véase De La Croix - Michel [2002]).

Ejercicio 13. Sobre la proposición 2. Considere el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} & \text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} c_t \\ 0 \quad \leq \quad & c_t \leq x_t - x_{t+1},\ x_t \geq 0,\ x_0 \neq 0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Obsérvese que en este problema hemos colocado $\beta = 1$.

1. Mostrar que para cualquier x_0 dado, el valor máximo del problema anterior es x_0. Es decir, $\widetilde{v}(x) = x$. Ahora, supóngase que utilizáramos el problema funcional para encontrar esta función. El problema funcional asociado es:

$$\begin{aligned} v(x) &= \sup_c \{c + v(x - c)\} \\ s.a &: 0 \leq c \leq x \end{aligned}$$

2. Verificar que para cualquier constante k, la función $v(x) = x + k$ es solución del problema funcional pero no satisface la condición de transversalidad (Ayuda: considere la dinámica factible $\{(x_0, 0)\} \in \Pi(x_0)$,

entonces $\lim_{t\to\infty} \beta^t v(x_t) = v(x_0) = x_0 + k \neq 0$). Luego, aquí tenemos un caso en el que no se aplica la proposición 2 y, más aún, este ejemplo muestra que la condición de transversalidad no es una propiedad necesaria.

Ejercicio 14. Con relación al ejercicio anterior, mostrar que la dinámica factible $\{(x_0, 0)\}$ no es óptima pero sí satisface la ecuación II.1. (Ayuda: obsérvese que la utilidad que le da al agente ese plan es nula, mientras que la máxima utilidad posible es x_0). Además, muestre por qué no se cumplen las hipótesis de la proposición 4.

Se concluye de los dos ejercicios anteriores que nuestras hipótesis son más débiles que las del ejercicio 11. No es difícil convencerse de que la condición de transversalidad en De La Croix - Michele [2002] es una consecuencia de la hipótesis 3 en el el ejercicio 11.

Ejercicio 15. Considere el ejemplo 6 y suponga que

$$\Psi(n) = \sqrt{(1-n^2)}\,(\lambda+\delta) + 1 - \delta.$$

1. Mostrar que Ψ satisface todas las hipótesis necesarias.
2. Bajo los parámetros $\alpha = 0{,}80$, $\sigma = 0{,}50$, $\delta = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}025$, $\beta = 0{,}95$ mostrar que $n^* \approx 0{,}83$, $A \approx 22{,}65$ y $\frac{h_{t+1}}{h_t} \approx 1{,}0095$.

Ejercicio 16. Considere el siguiente problema de maximización con "persistencia de hábitos"[16]

$$\begin{aligned} &\sum_{t=o}^{\infty} \beta^t (\ln c_t + \gamma \ln c_{t-1}) \\ s.a \quad : \quad & c_t + k_{t+1} \leqslant A k_t^{\alpha}, \end{aligned}$$

donde: $0 < \beta < 1$, $\gamma < 0$, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, $k_0 > 0$ dado y c_{-1} dado.

1. Escribir la ecuación de Bellman
2. Demuestre que la solución a dicha ecuación tiene esta forma:

   $$v(k, c_{-1}) = E + F \ln k + G \ln c_{-1}$$

   y demostrar que la dinámica óptima del capital tiene la forma:

   $$\ln k_{t+1} = I + H \ln k_t$$

   Donde E, F, G, H, I son constantes. Dé fórmulas explícitas para estas constantes en términos de los parámetros del problema. Para esto es necesario que encuentre la función de política.

[16] Tomado de Sargent [1987].

C.2. Soluciones

Solución 4 (Ejercicio 7)**.** Para el modelo básico de crecimiento.

$$\begin{aligned} \text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t) &= \text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \\ x_{t+1} &= k_{t+1} = k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t - c_t = g(x_t, u_t) \end{aligned}$$

donde $X = R_{++}, x_t = k_t,\ u_t = c_t$, y $\Gamma(x_t) = \{c \in R : 0 \leqslant c \leqslant k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t\}$.

Solución 5 (Ejercicio 11)**.** Sea $x_0 \in X$ y $\{x_t\}_{t=0,1\ldots}$una dinámica factible desde x_0. Para $t = 0$, $x_0 = \overline{x}_0$ y si $x_t \leq \overline{x}_t$ para un t arbitrario, entonces $x_{t+1} = g(x_t, u_t) \leq \overline{g}(x_t) \leq \overline{g}(\overline{x}_t) = \overline{x}_{t+1}$. Por lo tanto, tenemos por inducción que $x_t \leq \overline{x}_t$ se cumple para cualquier t. Por otro lado, $r(x_t, u_t) \leq \overline{r}(x_t) \leq \overline{r}(\overline{x}_t)$. Como consecuencia, tenemos que la sucesión

$$S_T = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[r(x_t, u_t) - \overline{r}(\overline{x}_t)\right]$$

es no-creciente, ya que cada término en la sumatoria es negativo o nulo. ($S_T - S_{T-1} = \beta^T \left[r(x_T, u_T) - \overline{r}(\overline{x}_T)\right] \leq 0$). La sucesión S_T tiene por lo tanto un límite en $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. También podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que $\overline{r}(\overline{x}_t) \geq 0$ (es suficiente reemplazar $\overline{r}(\overline{x}_t)$ por $\text{máx}\{0, \overline{r}(\overline{x}_t)\}$. Utilizando (3) tenemos $\overline{B}_T = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \overline{r}(\overline{x}_t) \leq \sum_{t=0}^{T} \frac{\beta^t}{\beta_{x_0}^t} b_{x_0} = \frac{1}{1-\beta/\beta_{x_0}} b_{x_0}$. La sucesión creciente $\overline{B}_T$ tiene entonces un límite finito, de lo cual deducimos que la sucesión de sumas finitas $\sum_{t=0}^{T} \beta^t r(x_t, u_t)$ tiene un límite en $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Solución 6 (Ejercicio 12)**.** Siguiendo el ejercicio 10 tenemos que la sucesión de sumas es finita y pertenece a $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Más aún, están acotadas por arriba por una constante

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \overline{r}(\overline{x}_t) \leq \frac{b_{x_0}}{1 - \delta/\delta_0}$$

Para toda trayectoria factible que empiece en x_o tenemos

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) = r(x_0, u_0) + \beta \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_{t+1}, u_{t+1})$$

Ahora tomamos la cota superior dado u_0 sobre el conjunto de las trayectorias factibles, para las cuales $x_1 = g(x_0, u_0)$,

$$r(x_0, u_0) + \sup \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) = r(x_0, u_0) + \beta \widetilde{v}(g(x_0, u_0))$$

Luego tomamos la cota superior sobre $u_0 \in \Gamma(x_0)$ y obtenemos

$$\widetilde{v}(x_t^*) = r(x_t^*, u_t^*) + \beta \widetilde{v}\left(x_{t+1}^*\right)$$

Solución 7 (Ejercicio 13)**.** El problema es:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} c_t \\ s.a \quad & : \\ 0 \quad & \leq \quad c_t \leq x_t - x_{t+1} \\ x_0 \quad & \neq \quad 0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

1. Es claro que el consumo óptimo se da cuando $c_t = x_t - x_{t+1}$, luego $\sum\limits_{t=0}^{\infty} c_t = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{t=0}^{k} x_t - x_{t+1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_0 - x_{k+1} \leq x_0 \Rightarrow \widetilde{v}(x_0) \leq x_0$. De otra parte, el plan factible $\{x_0, 0, 0, ...\}$ tiene utilidad x_0. Luego, $\widetilde{v}(x) = x$ para todo x.

2. Para probar que $v(x) = x + k$ es una función que resuelve el problema funcional asociado al problema secuencial basta con sustituir y verificar que se cumple la ecuación funcional para cualquier valor constante de k. Finalmente, es claro que no se cumple la condición de transversalidad de la proposición 2. Para ver esto, obsérvese que para que ésta se cumpla deberíamos de tener: $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \beta^t v(x_t) = 0$ para toda dinámica factible $\{(x_n, c_n)\}$. En particular, para la dinámica factible $\{(x_0, 0)\}$ tenemos:
$$\lim_{t\to\infty} \beta^t v(x_t) \ = x_0 + k \neq 0$$

Solución 8. (Ejercicio 14)Es fácil ver que la dinámica factible

$$\{(x_0, 0), (x_0, 0), (x_0, 0), ...\}$$

no es óptima desde el punto de vista del problema secuencial, pues da una utilidad de cero. De otra parte, es fácil ver que esta dinámica factible satisface el Principio de Optimalidad de Bellman (ecuación II.1) para $\widetilde{v}(x) = x$. Además, no se cumple la condición de transversalidad de la proposición 4, pues $\lim_{t\to\infty} \beta^t v(x_t) \ = x_t = x_0 \neq 0$.

Solución 9 (Ejercicio 16)**.** Persistencia de hábitos.

1. La ecuación de Bellman es:
$$v(k, c_{-1}) = \max_{0 \leqslant c \leqslant Ak^\alpha} \{\ln c + \gamma \ln c_{-1} + \beta v(Ak^\alpha - c)\}$$

2. Para verificar que la sugerencia en efecto resuelve el problema funcional, simplemente substituimos en la ecuación funcional:

$$E+F\ln k+G\ln c_{-1}=\max_{c}\{\ln c+\gamma\ln c_{-1}+\beta\,(E+F\ln(Ak^{\alpha}-c)+G\ln c)\}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$[c]:\frac{1}{c}-\frac{\beta F}{Ak^{\alpha}-c}+\frac{\beta G}{c}=0$$

Finalmente encontramos que:

$$c=\frac{(1+\beta G)Ak^{\alpha}}{(1+\beta G+\beta F)}$$

Al sustituir esta fórmula en la ecuación de Bellman tenemos:

$$\begin{aligned}E+F\ln k+G\ln c_{-1} &= \ln\left[\frac{(1+\beta G)Ak^{\alpha}}{(1+\beta G+\beta F)}\right]+\gamma\ln c_{-1}+\beta E+\\ &\quad+\beta F\ln(Ak^{\alpha}-\frac{(1+\beta G)Ak^{\alpha}}{(1+\beta G+\beta F)})\\ &\quad+\beta G\ln\left[\frac{(1+\beta G)Ak^{\alpha}}{(1+\beta G+\beta F)}\right]\end{aligned}$$

Desarrollando algebraicamente encontramos:

$$\begin{aligned}E+F\ln k+G\ln c_{-1} &= (1+\beta G)\ln\left(\frac{(1+\beta G)A}{(1+\beta G+\beta F)}\right)\\ &\quad+\beta F\ln\left(\frac{\beta FA}{(1+\beta G+\beta F)}\right)+\\ &\quad+\beta E+\alpha(1+\beta G+\beta F)\ln k+\gamma\ln c_{-1}\end{aligned}$$

Las constantes serán:

$$\begin{aligned}E &= (1+\beta G)\ln\left[\frac{(1+\beta G)A}{1+\beta G+\beta F}\right]+\beta F\ln\left[\frac{\beta FA}{1+\beta G+\beta F}\right]+\beta E\\ F &= \alpha(1+\beta G+\beta F)\\ G &= \gamma\end{aligned}$$

Si sustituimos la fórmula de F y simplificamos, encontramos los valores finales de E y F:

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{1-\beta}\left[(1+\beta\gamma)\ln(A(1-\alpha\beta))+\frac{\beta\alpha(1+\beta\gamma)}{1-\alpha\beta}\ln(\alpha\beta A)\right]\\ F &= \alpha\frac{1+\beta\gamma}{1-\alpha\beta}\\ G &= \gamma\end{aligned}$$

Estas expresiones permiten garantizar que efectivamente la función arriba mencionada es la función valor. Para encontrar la función de política sólo tenemos que sustituir los valores de F y G para obtener:

$$c = \frac{(1+\beta\gamma)Ak^{\alpha}}{1+\beta\gamma+\beta\alpha\frac{1+\beta\gamma}{1-\alpha\beta}}$$

La manipulación algebraica nos da esta función de política:

$$c = (1-\alpha\beta)Ak^{\alpha}$$

Este valor de c nos permite encontrar la expresión apropiada para el capital, basándonos en la función de acumulación arriba mencionada:

$$k_{t+1} = Ak_t^{\alpha} - (1-\alpha\beta)Ak_t^{\alpha}$$

Con facilidad, se puede ver que:

$$\ln k_{t+1} = \ln(\alpha\beta A) + \alpha \ln k_t$$

Así,

$$\begin{aligned} I &= \ln(\alpha\beta A) \\ H &= \alpha \end{aligned}$$

Con lo cual la política óptima del capital es la expresada en el enunciado del problema. ¿Es la solución válida cuando $\gamma > 0$, es decir, cuando hay cierto tipo de durabilidad del consumo? ¿Mayor consumo ayer significa mayor consumo hoy?

Bibliografía

[1] Arrow, K. (1962). The economic implications of learning by doing. *Review of Economic Studies*. Junio, 155-173.

[2] Bertsekas, D. & Shreve, S. (1978). *Stochastic optimal control: The discrete time case*. New York: Academic Press.

[3] Chan-Lau, J. (1997). "Business cycle properties of endogenous growth models". Tesis doctoral. Universidad de Columbia.

[4] De La Croix D. & Michel, P. (2002). *A theory of economic growth*. Cambridge University Press.

[5] Hercowitz, Z & Sampson, M. (1991). Output growth, the real wage, and employment fluctuations. *American Economic Review*, 81 (5), 1215-1237.

[6] Ljungvist, L. & Sargent , T. (2004). *Recursive macroeconomic theory*. MIT Press.

[7] Lucas, R. 1988. On the mechanics of economic development. *JMT* (22), 3-42.

[8] Magill, M & Quinzii, M. (1994). Infinite horizon incomplete markets. *Econometrica*, 62 (4), 853-880.

[9] Sargent, T. (1987). *Dynamic macroeconomic theory*. Harvard University Press.

[10] Stockey, N., Lucas, R. & Prescott, E. (1989). *Recursive methods in economic dynamics*. Harvard University Press.

[11] Usawa, H. (1964). Optimal growth in a two sector of capital accumulation. *Review of Economic Studies*, 31, 1-25.

III

Más programación dinámica y el método de Lagrange

En este capítulo estudiaremos algunas de las propiedades más importantes de la función valor, que nos permitirán usar los métodos del cálculo diferencial para resolver problemas de optimización dinámica. Primero comenzaremos con algunas propiedades geométricas como la monotonicidad y concavidad de la función valor, y luego pasaremos a la propiedad más importante, que se refiere a su diferenciabilidad. Como se podrá apreciar más adelante, este resultado es por sí solo bastante importante, pero además, aclara las relaciones existentes entre el método de programación dinámica y los métodos basados en el lagrangiano. Para poder hacer esto será necesario imponer más restricciones sobre el problema de optimización que queremos resolver.

A. Algunas propiedades de la función valor

La primera propiedad que probaremos es que bajo ciertas hipótesis la función valor es estrictamente creciente. Para esto necesitamos las siguientes hipótesis:

Hipótesis 6. *Para cada $u \in R^m$, las funciones $r(\cdot, u) : X \longrightarrow R$, $g(\cdot, u) : X \longrightarrow X$ son estrictamente creciente, y creciente, respectivamente.*

Hipótesis 7. *Γ es monótona: es decir, si $x' \geq x \Rightarrow \Gamma(x') \supseteq \Gamma(x)$.*

Proposición 5. *(La función valor es estrictamente monótona). Suponga que se cumplen las hipótesis 4, 5, 6 y 7. Entonces, la función valor es estrictamente creciente.*

Demostración. Sea $C_a(X)$ el espacio de las funciones reales, continuas y acotadas con la norma del supremo, y $C_c(X) \subset C_a(X)$ el espacio de las funciones reales, continuas, acotadas y crecientes. Es fácil ver que éste es un subespacio cerrado de $C_a(X)$, por lo tanto, es también un espacio completo en la norma del supremo.[1] Por el Teorema de Equivalencia, la función valor queda

[1] Véase Apéndice.

caracterizada como la única solución del problema funcional en $C_a(X)$. Ahora, lo primero que vamos a probar es que si $f \in C_a(X)$ es creciente, entonces $T(f)$ es una función estrictamente creciente. Sea $x' \geq x \Rightarrow g(x', u) \geq g(x, u)$ para toda u, por la hipótesis 6 y porque f es creciente entonces

$$\begin{array}{rcl} f(g(x',u)) & \geq & f(g(x,u)) \\ & \Rightarrow & \\ r(x',u) + \beta f(g(x',u)) & > & r(x,u) + \beta f(g(x,u)) \end{array}$$

por la hipótesis 6, lo cual implica,

$$\begin{array}{rcl} \max\limits_{u \in \Gamma(x)} \{r(x',u) + \beta f(g(x',u))\} & > & \max\limits_{u \in \Gamma(x)} \{r(x,u) + \beta f(g(x,u))\} \\ & \Rightarrow & \\ \max\limits_{u \in \Gamma(x')} \{r(x',u) + \beta f(g(x',u))\} & > & \max\limits_{u \in \Gamma(x)} \{r(x,u) + \beta f(g(x,u))\} \end{array}$$

por la hipótesis 7, por lo tanto$T[f](x') > T[f](x)$.

Ahora, como $C_c(X)$ es un subespacio cerrado de $C_a(X)$, entonces la función valor v está en $C_c(X)$ y como $T[v] = v$ luego v es estrictamente creciente. □

La proposición anterior no se aplica al ejemplo de Brock y Mirman por dos razones. Primero, si $X = R_{++}$, la función retorno instantáneo no es acotada en el grafo de Γ; segundo, esta función no es estrictamente creciente en x (de hecho, no depende de x). El primer problema es fácil de resolver mediante una escogencia inteligente del espacio de estados como lo hicimos en el capítulo anterior. Para la segunda, obsérvese que si $r(\cdot, u) : X \longrightarrow R$ es apenas creciente, entonces la conclusión del teorema se puede modificar por: la función valor es creciente (y no necesariamente estrictamente creciente).

Estudiaremos ahora la concavidad de la función valor. El resultado principal es que, bajo ciertas hipótesis, la función valor es estrictamente cóncava y la correspondencia de política es en efecto una función continua. En particular, resulta que bajo estas mismas hipótesis existe un único plan óptimo que resuelve el problema secuencial.

Hipótesis 8. *Sea X un conjunto convexo.*

Hipótesis 9. *Supongamos que las funciones r y g son estrictamente cóncava y cóncava, respectivamente.*

Hipótesis 10. *La correspondencia Γ es convexa:*

1. $\Gamma(x)$ es un conjunto convexo para todo $x \in X$.
2. Dado $\lambda \in [0,1]$, $x, x' \in X$ y $x \neq x'$, entonces si $u \in \Gamma(x)$ y $u' \in \Gamma(x')$ implica que $\lambda u + (1-\lambda)u' \in \Gamma(\lambda x + (1-\lambda)x')$.

Proposición 6. *(La función valor es estrictamente cóncava): según las hipótesis 4, 5, 8, 9 y 10 la función valor es estrictamente cóncava y la correspondencia de política es una función continua.*

Demostración. Por el Teorema de Equivalencia, la función valor queda caracterizada por la solución al problema funcional. Lo primero que probaremos es que si $f \in C_a(X)$ es cóncava y creciente , entonces $T(f)$ es estrictamente cóncava y creciente: dados $\lambda \in [0,1]$, $x, x' \in X$ y $x \neq x'$, sean u y u' tales que resuelven el problema de máximización definido por $Tf(x)$ y $Tf(x')$ respectivamente. Entonces, como $\lambda u + (1-\lambda)u' \in \Gamma(x + (1-\lambda)x')$ por la hipótesis 10, tenemos que:

$$\begin{aligned} Tf(\lambda x + (1-\lambda)x') &\geq r(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda u + (1-\lambda)u') + \\ &\quad \beta f(g(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda u + (1-\lambda)u')) \\ &> \lambda r(x,u) + (1-\lambda)r(x',u') + \lambda\beta f(g(x,u)) + \\ &\quad (1-\lambda)\beta f(g(x',u')) \end{aligned}$$

por la hipótesis 9 y porque f es cóncava y creciente.

Ahora, como u y u' resuelven el problema de máximización definido por $Tf(x)$ y $Tf(x')$, se concluye que esta última expresión es igual a:

$$\lambda Tf(\bar{x}) + (1-\lambda)Tf(x').$$

Basta ahora argumentar de la misma forma que en la proposición anterior para concluir con la prueba de la primera afirmación: el espacio de las funciones continuas, cóncavas, crecientes y acotadas, es un subespacio cerrado de $C_a(X)$.

Finalmente, como la función valor es estrictamente cóncava, entonces la solución al problema de maximización que define la función de política tiene siempre una única solución, pues la función objetivo es estrictamente cóncava por la primera parte de esta proposición y por la hipótesis 9, y la máximización se hace sobre un conjunto convexo por la primera parte de la hipótesis 10. La continuidad se sigue del teorema del máximo (véase Apéndice) y que una función h.c.s es en efecto una función continua. $\square$

Con este resultado estamos casi listos para el *teorema de Diferenciabilidad de la Función Valor* que se sigue como una consecuencia inmediata del *teorema de Benveniste - Scheinkman.*[2] Por último necesitamos:

Hipótesis 11. *Las funciones r y g son continuamente diferenciables en el interior del grafo de Γ.*

[2]Véase Benveniste y Sheinkman [1979].

Hipótesis 12. [3] *Sea* (x^*, u^*) *en el interior del grafo de* Γ *tal que existe una función diferenciable* τ, *definida en una vecindad abierta* V *de* x^* *tal que* $\tau : V \to U$ *y para todo* $x \in V$, $\tau(x) \in \Gamma(x)$ *y* $g(x, \tau(x)) = g(x^*, u^*)$.

Ejemplo 8. Brock y Mirman una vez más. En ese ejemplo $x_t = k_t$, $u_t = c_t$, $r(c_t) = \log(c_t)$, $g(k_t, c_t) = k_t^\alpha - c_t$, $\Gamma(k_t) = \{c_t : 0 \leq c_t \leq k_t^\alpha\}$ y $X = R_{++}$. Es fácil ver que dado el capital y consumo en el interior del grafo de Γ la hipótesis 12 se cumple.

El siguiente teorema, además de darnos un resultado sobre la existencia de la derivada de la función valor, nos da una expresión muy útil de ésta. Una forma de acordarse de la fórmula es escribir el problema funcional y derivar a ambos lados con respecto a las variables de estado ignorando la existencia de la función máximo.

Teorema 3. *(Diferenciabilidad de la Función Valor): según las hipótesis 4, 5, 8, 9, 10, 11 y 12; si* $x_0 \in int(X)$ *y* $h(x_0) \in int(\Gamma(x_0))$, *entonces la función valor es continuamente diferenciable en* x_0 *y su derivada está dada por:*

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial x_i} = \frac{\partial r(x_0, h(x_0))}{\partial x_i} + \beta \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(g(x_0, h(x_0)))}{\partial x_j} \frac{\partial g_j(x_0, h(x_0))}{\partial x_i},$$

para todo $i = 1, ..., n$.

Demostración. Ésta es una version del Teorema de Benveniste-Scheinkman. Véase De la Croix y Michel [2002], página 334. □

B. Método de Lagrange

Consideremos de nuevo el problema secuencial general y definamos el *lagrangiano* (truncado) asociado $\mathcal{L}_t : X \times U \times R^n \times R^n \to R$

$$\mathcal{L}_t(x_t, u_t, \lambda_t, \lambda_{t+1}) = r(x_t, u_t) + \beta\lambda_{t+1} \cdot g(x_t, u_t) - \lambda_t \cdot x_t$$

donde $(x_t, u_t, \lambda_t, \lambda_{t+1}) \in X \times U \times R^n \times R^n$.

Definición 2. *Dada una dinámica factible* $\{(x_t, u_t)\}_{t=0,1,...}$ *desde* x_0, *decimos que la sucesión de precios (sombra)* $\{\lambda_t\}_{t=0,1,...}$ *en* R^n, *soportan la dinámica factible* $\{(x_t, u_t)\}_{t=0,1,...}$ *si para todo* $t = 0, 1...$, *la sucesión*

$$\{(x_t, u_t, \lambda_t, \lambda_{t+1})\}_{t=0,1,...}$$

maximiza $\mathcal{L}_t$ *sobre el conjunto* $\Pi(x_0) \times R^n \times R^n \subset X \times U \times R^n \times R^n$.

[3] Véase De la Croix - Michel [2002], página 334. En realidad, es suficiente con que r y g sean diferenciables en un punto particular. Véase Teorema 3.

Teorema 4. *Sea* $\{(x_t^*, u_t^*)\}$ *una dinámica factible desde* x_0 *con* $x_t^* \in int(X)$ *para todo* t*. Entonces bajo las hipótesis 8, 9 y 10;* $\{(x_t^*, u_t^*)\}$ *resuelve el problema secuencial si y sólo si:*

1. *Existe una sucesión de precios* $\{\lambda_t\}_{t=0,1,...}$ *en* R^n *que soportan la dinámica* $\{(x_t^*, u_t^*)\}_{t=0,1,...}$.

2. *Para toda dinámica factible* $\{(x_t, u_t)\}_{t=0,1,...}$ *desde* x_0 *tal que* $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) < \infty$*, se cumple la siguiente condición de transversalidad.*

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \lambda_t \cdot (x_t - x_t^*) \geq 0$$

Demostración. Véase Michel [1990] o De la Croix et. al [2002], página 336. □

En la próxima sección estableceremos una relación muy importante entre los precios que soportan una dinámica factible y el valor marginal (en términos de la función valor) de una unidad adicional de x_0 a lo largo de la dinámica óptima. Esto nos permitirá dar una interpretación muy clara de la condición de transversalidad en el método de Lagrange.

Corolario 1. *Bajo las hipótesis del teorema 4, sí* $x_t \geq 0$ *y* $\lambda_t \geq 0$ *para todo* t*, una condicion suficiente para que se satisfaga la condición de transversalidad es:*

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \lambda_t \cdot x_t^* = 0$$

Demostración. La demostración es parecida al caso de las ecuaciones de Euler pero sin utilizar diferenciabilidad (Véase Teorema 4.15, página 98, Stockey y Lucas [1989]). □

Obsérvese que el Teorema 4 reduce el problema (PS) a un problema mucho más sencillo. En el primero, el objetivo era encontrar sucesiones infinitas que maximizaran una función objetivo con infinitos argumentos, mientras que el método de Lagrange reduce el problema a encontrar una sucesión infinita que resuelva infinitos problemas de optimización pero donde cada problema consiste en maximizar una función objetivo con finitos argumentos. Esto debería de llamarnos la atención sobre las herramientas existentes para resolver problemas de optimización estáticos. El siguiente teorema pone de manifiesto la potencia del método de Lagrange.

Teorema 5. *Bajo las mismas hipótesis del teorema 4, y las hipótesis 11 y 12; si* $\{(x_t^*, u_t^*)\}$ *es tal que* $(x_t^*, u_t^*) \in int\,(\Pi\,(x_0))$ *para todo* t*, entonces la sucesión de precios* $\{\lambda_t\}_{t=0,1,...}$ *en* R *soporta la dinámica* $\{(x_t^*, u_t^*)\}_{t=0,1,...}$ *si y solo si se cumplen las siguientes condiciones de primer orden para todo* $t = 0, 1, ...,$

1.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t(x_t^*, u_t^*, \lambda_t^*, \lambda_{t+1}^*)}{\partial x} = \frac{\partial r(x_t^*, u_t^*)}{\partial x} + \beta\lambda_{t+1}\frac{\partial g\left(x_t^*, u_t^*\right)}{\partial x} - \lambda_t = 0$$

2.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t(x_t^*, u_t^*, \lambda_t^*, \lambda_{t+1}^*)}{\partial u} = \frac{\partial r(x_t^*, u_t^*)}{\partial u} + \beta\lambda_{t+1}\frac{\partial g\left(x_t^*, u_t^*\right)}{\partial u} = 0$$

3.

$$x_{t+1}^* - g\left(x_t^*, u_t^*\right) = 0$$

En ocasiones, por analogía con el caso estático, escribimos el lagrangiano del (PS) como:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t r(x_t, u_t) + \sum_{t=0}^{\infty}\Lambda_{t+1}(g\left(x_t, u_t\right) - x_{t+1}) - \Lambda_0(x_0).$$

Ahora, si informalmente procedemos a maximizar $\mathcal{L}$ con respecto a estados y controles (suponiendo soluciones interiores y diferenciabilidad), y definimos $\lambda_t = \frac{\Lambda_t}{\beta^t}$, entonces obtenemos las mismas ecuaciones de primer orden que en el anterior teorema. Ésta es una manera heurística de obtener las ecuaciones que caracterizan la solución del (PS) cuando utilizamos el método de Lagrange.

Ejemplo 9. (Ecuaciones de Euler**)**: en el capítulo 1 estudiamos de manera informal un caso particular del método de Lagrange que se conoce como las ecuaciones de Euler. El problema típico al que éste se refiere es de la forma:

$$\sup_{\{x_t\}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t r(x_t, x_{t+1}) \tag{III.1}$$

$$\begin{aligned} s.a &: \\ x_{t+1} &\in \Gamma(x_t), t = 0, 1, 2, ... \\ x_0 &\in X \text{ dado.} \end{aligned}$$

En nuestra notación el problema se puede escribir de la forma:

$$\sup_{\{u_t\}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t r(x_t, u_t) \tag{III.2}$$

$$s.a$$

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= u_t \\ u_t &\in \Gamma(x_t), t = 0, 1, 2, ... \\ x_0 &\in X, \text{ dado.} \end{aligned}$$

Utilizando el Teorema 5, las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial r(x_t^*, u_t^*)}{\partial x} = \lambda_t \tag{III.3}$$

$$\frac{\partial r(x_t^*, u_t^*)}{\partial u} + \beta\lambda_{t+1} = 0 \qquad \text{(III.4)}$$

Sustituyendo la ecuación III.3 en la ecuación III.4 obtenemos las ecuaciones de Euler:

$$\partial_2 r\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) + \beta\partial_1 r\left(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*\right) = 0,\ t = 0, ...$$

Ahora, si $x_t \geq 0$ y la función de retorno instantáneo es creciente en x_t, entonces $\lambda_t \geq 0$ por la ecuación III.3 y la condición de tranversalidad del método de Lagrange es por el corolario 1:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \partial_1 r(x_t^*, u_t^*) \cdot x_t^* = 0 \qquad \text{(III.5)}$$

Obsérvese que las condiciones derivadas en el capítulo 1 para el modelo básico de crecimiento son un caso particular de las anteriores.

C. Relación entre el método de programación dinámica y el de Lagrange

Tomemos ahora el problema desde el punto de vista de la programación dinámica. Sea v la función valor del problema y $\{(x_t^*, u_t^*)\}_{t=0,1...}$ una secuencia que satisface la ecuación II.1 comenzando desde x_0. Ésta dinámica es una solución al problema secuencial si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial r\left(x_t^*, u_t^*\right)}{\partial u} + \beta\frac{\partial v(g(x_t^*, u_t^*))}{\partial x}\frac{\partial g(x_t^*, u_t^*)}{\partial u} = 0$$

Ahora, por el teorema de diferenciabilidad sabemos que:

$$\frac{\partial v\left(x_t^*\right)}{\partial x} = \frac{\partial r\left(x_t^*, u_t^*\right)}{\partial x} + \beta\frac{\partial v(g(x_t^*, u_t^*))}{\partial x}\frac{\partial g(x_t^*, u_t^*)}{\partial x}$$

Sea $\lambda_t = \frac{\partial v(x_t^*)}{\partial x}$ (*el precio sombra de la variable de estado*), entonces las tres ecuaciones anteriores son equivalentes a las tres ecuaciones del teorema 5. Obsérvese que las condiciones de transversalidad del método de programación dinámica y el de Lagrange son ligeramente diferentes. En el caso particular de las ecuaciones de Euler:

$$\lambda_t = \frac{\partial r(x_t^*, u_t^*)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_t^*)}{\partial x}.$$

D. Algunas propiedades de las dinámicas óptimas

Como vimos en el capítulo 2, una pregunta fundamental sobre las trayectorias óptimas es si éstas son estables. Más específicamente, nos preguntamos si las trayectorias son globalmente estables o apenas localmente estables. El siguiente teorema muestra que por lo menos para el modelo básico de crecimiento, bajo ciertas hipótesis, las trayectorias son estables globalmente. El ejemplo que le sigue nos recuerda que la estabilidad global no es un resultado general.

Teorema 6. *(Teorema de estabilidad). Vamos a considerar el modelo básico de crecimiento:*

$$
\begin{aligned}
& \text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
s.a \quad & : \\
k_{t+1} \quad & = \quad f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \\
0 \quad & \leqslant \quad c_t \leqslant f(k_t) \\
& \quad\;\; k_0 \textit{ dado.}
\end{aligned}
$$

Donde $\delta, \beta \in (0,1)$*. Utilizaremos las siguientes hipótesis:*

1. $f : [0,\infty) \to R_+$ *continua, estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continuamente diferenciable en* $(0,\infty)$*.*

2. $u : [0,\infty) \to R_+$ *continua, estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continuamente diferenciable en* $(0,\infty)$*.*

3. $f(0) = 0, \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$ *y* $\lim_{k\to 0} u'(k) = \infty$

   Las hipótesis anteriores garantizan que existe un único $\overline{k}$*, tal que* $f(\overline{k}) = \overline{k}$*. A su vez, esto implica que existe un stock de capital máximo,* $k_{\text{máx}} = \overline{k} + (1-\delta)\overline{k}$ *a lo largo de cualquier dinámica factible*[4]*. Por lo tanto, el conjunto de las dinámicas factibles es un conjunto acotado y la función de utilidad* u*, y de producción* f*, son funciones acotadas sobre el conjunto de dinámicas factibles (recordemos que estas funciones son por hipótesis, continuas).*

   De lo anterior se concluye que el problema secuencial y el problema funcional son equivalentes y por lo tanto, la función valor $\widetilde{v}$ *del problema secuencial es la única solución al problema funcional:*

$$v(k) = \max_{0 \leqslant c \leqslant f(k)} \{u(c) + \beta v(f(k) + (1-\delta)k - c)\}$$

[4]Si $k_0 > \overline{k} + (1-\delta)\overline{k}$, entonces $k_{\text{máx}} = \text{máx}\left(k_0, \overline{k} + (1-\delta)\overline{k}\right)$.

Nuestra tarea ahora es caracterizar, de la manera más precisa posible, la dinámica óptima de este problema: $k_{t+1} = \widetilde{g}(k_t) = \widetilde{f}(k_t) - h(k_t)$, *donde* h *es la función de política.*

Supongamos que $h(k)$ *es diferente de* 0 *y* $f(k)$ *cuando* $k \in (0, k_{\text{máx}}]$. *Esto es intuitivamente obvio, pues la utilidad marginal del consumo es infinita en cero, luego* $h(k) \neq 0$, *y porque el factor de descuento intertemporal* $\beta \neq 0$, *luego* $h(k) \neq f(k)$ *(no es óptimo consumirse todo el producto en un período). Sin embargo, la demostración formal de esto requiere un poco de trabajo.*

Bajo estas hipótesis, estamos listos para demostrar el teorema de estabilidad global para el modelo básico de crecimiento.

Sea $k^*_{t+1} = \widetilde{g}(k^*_t)$ *la dinámica óptima para el problema anterior con* $k^*_0 = k_{0.}$ *Entonces:*

a) $\widetilde{g}$ *es estrictamente creciente;*

b) *Existen dos puntos estacionarios (i.e.* $k^* = \widetilde{g}(k^*)$*),* $k^* = 0$ *y* $k^* = f'^{-1}(\frac{1}{\beta} + \delta - 1)$.

c) *Si* $k_0 \in (0, k_{\text{máx}}]$, *entonces* $\lim_{t\to\infty} k^*_t = k^*$.

Puesto que la solución al problema funcional es interior, entonces por el teorema de diferenciabilidad de la función valor las siguientes condiciones son necesarias en el óptimo:

$$u'(h(k)) = \beta v'(\widetilde{g}(k)), \ \textit{condición de primer orden}$$

$$v'(k) = \beta v'(\widetilde{g}(k))(f'(k) + (1-\delta)), \ \textit{teorema diferenciabilidad}$$

Para demostrar que g *es estrictamente creciente (primera afirmación), utilizaremos la anterior condición de primer orden que se puede reescribir como:*

$$u'(f(k) + (1-\delta)k - \widetilde{g}(k)) = \beta v'(\widetilde{g}(k))$$

La prueba es por contradicción. Supongamos que $k_1 < k_2$ *y* $\widetilde{g}(k_1) \geq \widetilde{g}(k_2)$, *entonces es fácil ver que si la ecuación anterior se cumple en* k_1, *no se puede cumplir en* k_2, *por la concavidad estricta de* u *y* ν.

La segunda afirmación tiene dos partes. Que cero es un punto estacionario es obvio. Si $k^* \neq 0$, *entonces* k^* *debe satisfacer:*

$$u'(f(k) + (1-\delta)k - \widetilde{g}(k)) = \beta v'(\widetilde{g}(k)),$$

luego,

$$f'(k^*) = (\frac{1}{\beta} + \delta - 1)$$

y queda demostrada la segunda afirmación.

Por último, para demostrar la estabilidad global recordemos que si ν es cóncava entonces:

$$\frac{v'(\widetilde{g}(k))((f'(k)+(1-\delta))-\frac{1}{\beta})}{k-\widetilde{g}(k)}<0 \text{ para todo } k\neq\widetilde{g}(k)$$

Luego, como f es cóncava, $f'(k)+(1-\delta)\lesseqgtr\frac{1}{\beta}\Leftrightarrow k\gtreqless k^*\Rightarrow k\gtreqless\widetilde{g}(k)$ siempre que $k\gtreqless k^*$. Esto quiere decir que si $k_0<k^*$, entonces $k_0<k_1^*<k_2^*...<k^*$. Luego la sucesión tiene que converger a k^* porque es el único punto estacionario diferente de cero. Un argumento parecido se aplica cuando $k_0>k^*$.

La estabilidad global es difícil de probar, mientras que la *estabilidad local* es, en general, mucho más fácil. Presentamos ahora un ejemplo de inestabilidad, tomado de Stokey et. al [1989]; en él se han modificado algunas de las (estrictas) hipótesis impuestas para garantizar la estabilidad global del problema.

Ejemplo 10. (Inestabilidad global de las dinámicas óptimas). El modelo es el siguiente. El individuo posee una dotación de trabajo en cada período, pero ésta no entra en su función de utilidad. Hay dos bienes para producir, uno de capital y otro de consumo. Asumamos que los bienes de consumo se producen con capital y trabajo, mientras que los de capital sólo se producen con trabajo; además, supongamos que:

$$c_t=n_tf\left(k_t/n_t\right)$$

$$k_{t+1}=1-n_t$$

$$0\leqslant n_t\leqslant 1$$

Donde n_t es el trabajo necesario para producir bienes de consumo. Notemos que el acervo de capital debe encontrarse en el rango [0,1]. Suponemos que f y u satisfacen las condiciones de Inada y que:

$$\lim_{n\to 0} nf(k/n)=0,\forall k\in[0,1]$$

Eliminando c con la primera ecuación en la función de utilidad y eliminando n con la segunda ecuación llegamos al siguiente problema funcional:

$$v(k)=\max_{y\in[0,1]}\left\{u\left((1-y)f\left(\frac{k}{1-y}\right)\right)+\beta v(y)\right\}$$

Sea $\widetilde{g}$ la función que nos da la dinámica óptima. La condición de primer orden y el teorema de diferenciabilidad de la función valor implican que:

$$u'\left((1-\widetilde{g}(k))f\left(\frac{k}{1-\widetilde{g}(k)}\right)\right)\left(f\left(\frac{k}{1-\widetilde{g}(k)}\right)-\frac{k}{1-\widetilde{g}(k)}f'\left(\frac{k}{1-\widetilde{g}(k)}\right)\right) = \beta v'\left(\widetilde{g}(k)\right) \quad (1)$$

$$v'(k) = u'\left((1-\widetilde{g}(k))f\left(\frac{k}{1-\widetilde{g}(k)}\right)\right)f'\left(\frac{k}{1-\widetilde{g}(k)}\right) \tag{2}$$

Para encontrar los puntos estacionarios sustituimos $k^* = \widetilde{g}(k^*)$ en las ecuaciones anteriores y eliminamos v' :

$$f\left(\frac{k^*}{1-k^*}\right) - \left(\frac{k^*}{1-k^*} + \beta\right)f'\left(\frac{k^*}{1-k^*}\right) = 0$$

No es difícil demostrar que existe un único $k^* \in (0,1)$ que resuelve la ecuación anterior.

Ahora, a diferencia del ejemplo anterior, la función $\widetilde{g}(k)$ no es creciente. Dado que cuando $k = 0$, todo el trabajo se utiliza en la producción de capital, por lo cual $\widetilde{g}(0) = 1$. Así $\widetilde{g}$ no puede ser creciente cerca a cero. Esto nos lleva a oscilaciones del sistema. La estabilidad del sistema depende de la pendiente $\widetilde{g}$ en k^*.

En el siguiente teorema mostraremos que bajo ciertas hipótesis mínimas es posible obtener cualquier función suficientemente suave $\widetilde{g}$, que describa la dinámica óptima de las variables de estado, de un problema de programación dinámica como el que hemos estudiado hasta este momento.

Considere el ejemplo 9 relacionado con las ecuaciones de Euler.

Teorema 7. *(Boldrin y Montrucchio). Sea X un conjunto compacto en R y $\widetilde{g} : X \to X$ cualquier función C^2. Sea $\Gamma(x) = X$ $\forall x \in X$. Entonces existe una función de retorno r y un factor de descuento β tal que (X, Γ, r, β) satisfacen las propiedades usuales y $\widetilde{g}$ define la dinámica óptima para el problema secuencial asociado a (X, Γ, r, β).*

En otras palabras, cualquier función suficientemente suave, por extraña que sea, es la dinámica óptima de alguna economía. El siguiente ejemplo ilustra el anterior teorema.

Ejemplo 11. (Tomado de Stokey et. al [1989], página 139). Considere la siguiente ecuación en diferencias: $x_{t+1} = \widetilde{g}(x_t) = 4x_t - 4x_t^2$. Es fácil ver que $\widetilde{g} : [0,1] \to [0,1]$, y además satisface todas las hipótesis del teorema anterior. La figura 3 deja claro cuáles son las dinámicas óptimas de este problema.

El teorema de Boldrin y Montrucchio tiene varias implicaciones interesantes. De una parte, el teorema dice que el problema típico que nos hemos propuesto resolver (i.e. el problema secuencial), donde cada uno de los fundamentales del problema (i.e. β, r, g y Γ) satisfacen las hipótesis naturales sobre una economía, no parecen imponer mayores restricciones sobre las dinámicas observadas en el mundo real (i.e. la función de política h o la dinámica óptima $\widetilde{g}$). Éste es una especie de "análogo" al teorema de Sonnenschein-Mantel-Debreu en la teoría del consumidor. Es decir, la forma de modelar propuesta hasta el momento es tan general, que puede tener como implicación cualquier cosa, y en ese sentido, puede no ser una teoría refutable. En el caso del teorema de Sonnenschein-Mantel-Debreu son diversas las soluciones que se han encontrado que conllevan resultados positivos.[5]

Por otra parte, el Teorema de Boldrin y Montrucchio implica que es posible crear ciclos endógenos utilizando modelos determinísticos como los observados en las economía reales. El ejemplo 11 ilustra de una manera muy estilizada esta afirmación. [6]

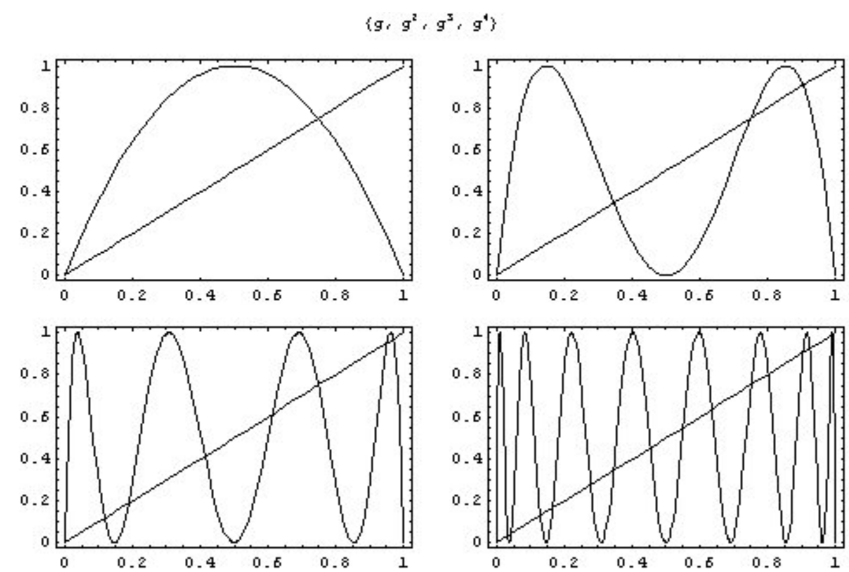

Figura 3: Función de iteraciones de la dinámica óptima.

E. Ejercicios y soluciones

E.1. Ejercicios

Ejercicio 17. Supongamos que la función de retorno instántaneo en el ejemplo 9 es creciente en x_t y cóncava como función de ambos argumentos; demostrar que las ecuaciones de Euler y la condición de transversalidad III.5 son condiciones suficientes para que una sucesión resuelva el problema secuencial.

[5]El lector interesado en este problema puede consultar la entrevista de www.webpondo.org con el profesor Herakles Polemarchakis:
www.webpondo.org/interviews_9.htm

[6]Véase la entrevista de www.webpondo.org con el profesor Michele Boldrin.

Ejercicio 18. Considere el problema de la firma (k_t denota el acervo de capital de la firma):

$$\max_{\{k_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (ak_t - \frac{1}{2}bk_t^2 - \frac{1}{2}c(k_{t+1} - k_t)^2)$$
$$k_0 \text{ dado.}$$

1. Dar una interpretación económica del problema (véase Stokey-Lucas[1989], página 95).

2. Utilizar las ecuaciones de Euler para encontrar la trayectoria óptima del capital. (Ayuda: la función de política es lineal)

Ejercicio 19. (Sargent [1987]). Utilizando el método de la programación dinámica o las ecuaciones de Euler, resolver el siguiente ejercicio.

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ s.a \quad & : \\ A_{t+1} \quad & \leqslant \quad R_t(A_t - c_t) \\ A_0 \quad & > \quad 0 \text{ dado,} \\ A_t \quad & \geqslant \quad 0. \end{aligned}$$

donde: $0 < \beta < 1$; $R_t^{1-\alpha} < 1/\beta$, $u(c_t) = \frac{1}{1-\alpha}c^{1-\alpha}$; $\alpha > 0$.

Ejercicio 20. Algoritmo de Howard (véase Sargent [1987]): hasta ahora, la principal forma como hemos utilizado el método de la programación dinámica ha sido para encontrar la función valor, mediante iteraciones, y posteriormente, la función de política. El siguiente algoritmo, por el contrario, itera sobre la función de política. La idea es comenzar con una función de política inicial, que se sustituye en la función de retorno. Haciendo la suma, obtenemos la función valor asociada a esa función de política. Ahora, utilizamos esta función valor y la sustituimos en la parte derecha de la ecuación de Bellman y encontramos la función de política que resuelve el problema de maximización de Bellman. Utilizando esta nueva función de política repetimos el proceso hasta que las nuevas funciones de política sean prácticamente iguales.

La intuición es muy sencilla. El primer paso consiste en calcular la utilidad cuando seguimos una función de política arbitraria fija y que no podemos cambiar en ningún período. En el segundo paso lo que calculamos es el mejor control en $t = 0$, dado que a partir de $t = 1$ estamos atados de las manos y debemos utilizar la regla arbitraria con la que comenzamos. Al repetir el proceso varias veces, lo que buscamos es que la función de política óptima en t se aproxime a la función de política en $t + 1$.

1. Considere el problema de Brock-Mirman:

$$\begin{aligned} & \sum_{t=o}^{\infty} \beta^t \ln c_t \\ s.s \quad & : \\ c_t + k_{t+1} \quad & = \quad Ak_t^{\alpha} \\ & k_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

   donde $A > 0, 1 > \alpha > 0$.

   Suponga que la dinámica óptima del capital es: $k_{t+1} = h_0(Ak_t^{\alpha})$ para una constante $h_0 \in (0,1)$. Aplicar el algoritmo de Howard para encontrar el h_0 que resuelve el anterior problema.

2. Consideremos el ejemplo sobre control óptimo lineal. Si comenzamos con una función de política $\mu = -F_0 x$, donde F_0 es un vector $1 \times n$, mostrar que el algoritmo de Howard se reduce a iterar las ecuaciones:

$$\begin{aligned} P_j &= Q + F_j' R F_j - 2WF_j + \beta(A - BF_j)' P_j (A - BF_j) \\ F_{j+1} &= (R + \beta B' P_j B)^{-1} (\beta B' P_j A + W') \end{aligned}$$

E.2. Soluciones

Solución 10 (Ejercicio 17)**.** Tenemos que demostrar que para todo T:

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t (r(x_t^*, x_{t+1}^*) - r(x_t, x_{t+1})) \geq 0$$

Ahora,

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{T} \beta^t (r(x_t^*, x_{t+1}^*) - r(x_t, x_{t+1})) \\ \geq & \\ & \sum_{t=0}^{T} \beta^t (\partial_1 r(x_t^*, x_{t+1}^*) \cdot (x_t^* - x_t) + \partial_2 r(x_t^*, x_{t+1}^*) \cdot \left(x_{t+1}^* - x_{t+1}\right) \\ = & \end{aligned}$$

y reemplazando $\partial_1 r(x_t^*, x_{t+1}^*)$, utilizando la ecuación de Euler, la suma anterior se vuelve una suma telescópica. Luego, sólo queda el primer término y el último, pero el primer término es cero porque toda sucesión factible tiene el mismo estado inicial. Por lo tanto la anterior sumatoria se convierte en:

$$\begin{aligned} &= \beta^T \frac{\partial r(x_T^*, x_{T+1}^*)}{\partial x_{t+1}} \left(x_{T+1}^* - x_{T+1}\right) \\ &= -\beta^{T+1} \frac{\partial r(x_{T+1}^*, x_{T+2}^*)}{\partial x_t} \left(x_{T+1}^* - x_{T+1}\right) \\ &\geq -\beta^{T+1} \frac{\partial r(x_{T+1}^*, x_{T+2}^*)}{\partial x_t} x_{T+1}^* \end{aligned}$$

y

$$\lim_{T\to\infty} -\beta^{T+1} \frac{\partial r(x_{T+1}^*, x_{T+2}^*)}{\partial x_t} x_{T+1}^* = 0$$

por la condición de transversalidad.

Solución 11 (Ejercicio 19)**.** El problema determinístico es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ s.a &: \\ A_{t+1} &\leqslant R_t(A_t - c_t) \\ A_0 &> 0, \text{ dado,} \end{aligned}$$

donde: $0 < \beta < 1$, $R_t^{1-\alpha} < 1/\beta$, $u(c_t) = \frac{1}{1-\alpha} c^{1-\alpha}; \alpha > 0$

La función de utilidad considerada en este ejercicio no cumple con todas las hipótesis que hemos impuesto al problema pues es no acotada. La hipótesis sobre R, sin embargo, garantiza que la función valor que vamos a suponer más adelante es efectivamente la solución a la ecuación de Bellman.

Suponemos que:

$$v(A) = BA^{1-\alpha}$$

Sustituyendo en la ecuación de Bellman, encontramos:

$$BA^{1-\alpha} = \max_{c \geqslant 0} \left\{ \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta B(A-c)^{1-\alpha} R^{1-\alpha} \right\}$$

La condición de primer orden es la siguiente:

$$c^{-\alpha} = \beta B(1-\alpha)(A-c)^{-\alpha} R^{1-\alpha}$$

Lo que implica:

$$c = \frac{k^{\frac{-1}{\alpha}}}{1 + k^{\frac{-1}{\alpha}}} A$$

Donde $k = \beta B(1-\alpha) R^{1-\alpha}$

Sustituyendo en la ecuación de Bellman este resultado y después de algunas manipulaciones, podemos determinar el valor de B:

$$B = \frac{\left(1 - \left(\beta R^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\alpha}}{1-\alpha}$$

La función de política es:

$$c = \left(1 - \beta^{1/\alpha}\left[R^{1-\alpha}\right]^{1/\alpha}\right) A$$

Solución 12 (Ejercicio 20)**.** Primera parte. Sustituyendo en la función retorno c_t en términos de la función de política sugerida, tenemos:

$$J_0(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(Ak_t^{\alpha} - h_0 Ak_t^{\alpha}) = B_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln(k_0)$$

Donde B_0 es una constante independiente de k_0. Obsérvese que el cálculo de B_0 es irrelevante para calcular la función de política que resuelve el problema funcional cuando utilizamos $J_0(k_0)$ como la función valor.

Ahora queremos resolver el siguiente problema:

$$\max_{k'} \{\ln(Ak^{\alpha} - k') + \beta J_0(k')\}$$

Que es lo mismo que:

$$\max_{k'} \left\{\ln(Ak^{\alpha} - k') + \beta\left(B_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln(k')\right)\right\}$$

Escribiendo las condiciones de primer orden de este problema llegamos a la dinámica óptima del modelo de Brock - Mirman. Es decir, el algoritmo converge en un paso. Para verificar esto utilizando el algoritmo de Howard, calcule una función de política más. Sea:

$$J_1(k_0) = \sum_{t=o}^{\infty} \beta^t \ln(Ak_t^{\alpha} - \alpha\beta Ak_t^{\alpha})$$

Es fácil demostrar que el siguiente problema lo resuelve la misma función de política anterior:

$$\max_{k'} \{\ln(Ak^{\alpha} - k') + \beta J_1(k')\}$$

Luego, hemos llegado a una función de política invariante utilizando el algoritmo propuesto.

Bibliografía

[1] Benveniste, L. & Scheinkman, J. (1979). On the differentiability of the value function in dynamic models of economics. *Econometrica* (47): 727-732.

[2] De La Croix, D., & Michel, P. (2002). *A theory of economic growth.* Cambridge University Press.

[3] Michel, P. (1990). Some Clarifications on the Transversality Conditions. 58, (3), 705-723.

[4] Sargent, T. (1987). *Dynamic macroeconomic theory.* Harvard University Press.

[5] Stokey, N., Lucas, R. & Prescott, E. (1989). *Recursive methods in economic dynamics.* Harvard University Press.

[6] Bellman, R. (1957). *Dynamic programing.* Princeton University Press.

IV

Economía dinámica: el caso estocástico

En la teoría desarrollada hasta este momento hemos excluido, por razones de simplicidad, el carácter incierto sobre el cual se toman la mayoría de las decisiones económicas. Por esto queremos decir que, en la mayoría de los casos, cuando los agentes económicos se ven en la obligación de tomar una decisión, ellos desconocen, al menos parcialmente, el ambiente económico. Por ejemplo, las decisiones en el campo de la agricultura dependen estrechamente del comportamiento climático. Siendo éste un factor impredecible, los agentes no tienen otra alternativa que planear sus decisiones contingentes a la realización de estos eventos aleatorios. Las decisiones en el mercado bursátil son también altamente inciertas. Comprar o no acciones depende del comportamiento futuro de los precios, que desde el punto de vista de los agentes, es bastante aleatorio. Igualmente en la industria, muchas decisiones de inversión dependen de la tasa de interés o la tasa de cambio, variables altamente impredecibles. Por esta razón debemos buscar otra forma de modelar el comportamiento racional de los agentes (en el sentido de que ellos maximizan una función de utilidad que refleja sus preferencias sobre las diferentes alternativas), y que tenga en consideración el carácter contingente (o condicional) con el que los agentes deben tomar sus decisiones. Una alternativa es suponer que los agentes maximizan la utilidad esperada de sus decisiones o, por ejemplo, el beneficio esperado en el caso de una firma. Aquí desarrollamos este punto de vista y comenzaremos con la estructura general de estos problemas.[1]

El primer punto a discutir, que es de vital importancia para nuestro estudio, es la forma de modelar los eventos aleatorios. Sin entrar en detalles, supongamos que tenemos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde Ω representa el conjunto de todos los acontecimientos o sucesos posibles que puedan tener alguna relevancia para la actividad económica; $\mathcal{F}$ representa los eventos (conjuntos de sucesos) que pueden ocurrir y P es la probabilidad (objetiva) con la que se realizan estos eventos[2]. Ahora, estos resultados posibles, resumidos en el conjunto Ω, deben tener una manifestación muy particular

[1]Estas notas están basadas en el capítulo 2 de Stokey-Lucas [1989].

[2]Se puede hacer una distinción importante entre *riesgo* e *incertidumbre* que tiene origen

en el ambiente económico bajo consideración. Más concretamente, debemos pensar en la forma como esos resultados afectan el marco analítico sobre el que se va trabajar. La forma usual de hacer esto es a través de variables aleatorias definidas sobre este espacio de probabilidad. Más específicamente, mediante un proceso estocástico $\{\theta_t\}_{t=0,\ldots}$, que en cada instante t y para cada realización $\omega \in \Omega$, nos dice cómo afecta esta realización nuestro marco analítico. Para el tipo de problemas que consideraremos, el efecto de estas realizaciones se manifiesta en la dinámica que siguen las variables de estado. En los ejemplos veremos de manera más precisa la forma como estas realizaciones pueden manifestarse.

En general, el problema secuencial en un ambiente estocástico tiene la forma:

$$\begin{aligned} & \max E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t r\left(x_t,u_t\right)\right] \\ s.a &: \\ x_{t+1} &= g(x_t,u_t,\theta_{t+1}) \\ u_t &\in \Gamma\left(x_t\right) \\ x_0 &\in X,\ \text{dado,} \end{aligned}$$

donde $x_t \in R^n$, $u_t \in R^m$, $X \subset R^n$, θ_t son variables aleatorias con valores en R^l; r es una función de $X \times R^m$ en R; g es una función de $X \times R^m \times \Omega$ en X; Γ es una correspondencia de X en R^m, y el valor esperado E es con respecto a la distribución que induce sobre todas las variables la distribución de las variables aleatorias θ_t. Mantenemos la interpretación usual de las funciones pero es necesario especificar la estructura del problema de decisión en cada período. Las variables x en este problema van a resumir el ambiente económico completo sobre el cual se toman las decisiones. Éstas son las variables de estado, que pueden ser de dos tipos: *estados endógenos* y *estados exógenos* (probablemente aleatorios) y que, cuando sea necesario, los distinguiremos de la siguiente forma: los estados endógenos los denotaremos por $x_t \in R^{n_s}$ y los estados exógenos los denotaremos por $z_t \in R^{n_e}$, donde $n = n_s + n_e$. Las variables θ_{t+1} son variables aleatorias exógenas que suponemos independien-

en los escritos de Keynes [1921] y Knight [1921]. Fundamentalmente la idea consiste en distinguir una situación de riesgo, donde la realización de un evento es aleatoria pero con distribución conocida, como el resultado de tirar unos dados no sesgados, y una de incertidumbre, en donde la distribución es desconocida, como el resultado de una carrera de caballos. Keynes y Knight argumentaban que en las mayoría de las decisiones económicas era mucho más importante la segunda forma de incertidumbre. En este libro no haremos tal distinción pues siempre invocaremos la hipótesis de expectativas racionales para resolver nuestros modelos. Una implicación de ésta es que la probabilidad (subjetiva) que los agentes económicos utilizan para determinar la incertidumbre de los eventos es, en equilibrio, igual a la probabilidad verdadera (objetiva) con la que estos ocurren. Éste es uno de los supuestos básicos de la hipótesis de expectativas racionales.

Las consecuencias económicas de distinguir entre estas dos formas de incertidumbre es una área activa de investigacíon en teoría económica. Por ejemplo, para ver sus consecuencias en la teoría de valoración de activos, el lector puede consultar Epstein y Wang [1994].

tes e idénticamente distribuidas, las cuales son la fuente de la incertidumbre de la economía.

Por el momento supondremos que el estado inicial x_0 es un valor específico de X. Sin embargo, más adelante vamos a generalizar al caso en que la información inicial sobre los estados está dada en la forma de una distribución inicial conocida.

Asociado al problema secuencial, tenemos el siguiente problema funcional:

$$v(x_t) = \max_{u_t \in \Gamma(x_t)} \left\{ r(x_t, u_t) + \beta E_t[v(g(x_t, u_t, \theta_{t+1})] \right\},$$

donde $E_t[.]$ denota el valor esperado dada la información hasta el período t (más concretamente, la información al comenzar el período t). En nuestro caso, esta información corresponde al conocimiento de $x_0, x_1, ..., x_t$. Obsérvese que el conocimiento en t de las variables de estado hasta t supone implícitamente el conocimiento de todos los controles $u_0, u_1, ..., u_{t-1}$ (hasta $t-1$) y de todas las variables $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_t$ (hasta t). Al finalizar el período, u_t es conocido. Como puede sospecharse a partir de esta formulación, la teoría de la programación dinámica en el caso estocástico se desarrolla de manera similar al caso determinístico. Esto es verdad, bajo ciertas hipótesis, con relación a la equivalencia entre los dos problemas, al método iterativo e incluso a los métodos numéricos. Como el análisis formal de la teoría es ligeramente más complicado que el caso determinístico y además requiere una formación sólida en teoría de la probabilidad, en lo que sigue procederemos de manera informal. Todas las características mencionadas del problema presentan dificultades técnicas más complejas que en el caso determinístico, pero no dejan de estar estrechamente relacionadas. Con el objeto de familiarizar más al lector con los problemas estocásticos, los siguientes ejemplos se introducen como generalizaciones naturales de los ejemplos tratados en los capítulos anteriores. Por ahora, vale la pena resaltar una primera diferencia importante con las ideas desarrolladas anteriormente. Esto es, el análogo estocástico al estado estacionario y la propiedad de estabilidad de los modelos determinísticos. El primer ejemplo nos servirá como una introducción a estas ideas.

A. Modelo básico de crecimiento

El ejemplo típico es, una vez más, el modelo básico de crecimiento. Supongamos que la incertidumbre en la economía se refleja en cambios aleatorios en el sector productivo de la economía. Uno puede pensar en el caso en que el sector productivo depende de condiciones climáticas o en el caso en que al interactuar muchos agentes con información incompleta y asimétrica sobre las condiciones del mercado, éstos tomen decisiones en una dirección u otra, que en el agregado parecen aleatorias. Más explícitamente, supongamos que la producción en esta economía está sujeta a choques (o perturbaciones) estocásticas que alteran la producción de acuerdo con la siguiente especificación:

$$y_t = z_t f(k_t),$$

donde $\{z_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d.[3] Es decir, independientes e idénticamente distribuidas. Así, el problema del agente representativo es:

$$\begin{aligned}
& & \text{máx}\, E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)\right] \\
s.a & : & \\
k_{t+1} & = & z_t f(k_t) - c_t + (1-\delta) k_t \\
c_t, k_t & \geq & 0 \\
& & k_0,\ z_0 \text{ dados.}
\end{aligned}$$

En este ejemplo, la variable de estado endógena es k_t, la variable de estado exógena es z_t, la variable de control es c_t y la fuente de incertidumbre es la misma variable de estado z_t. Luego, para expresar el problema exactamente en la misma forma que el problema secuencial de arriba, introducimos una variable $\theta_t = z_t$ y de esta manera la función de transición g la podemos identificar como:

$$(k_{t+1}, z_{t+1}) = g(k_t, z_t, c_t, \theta_{t+1}) = (z_t f(k_t) - c_t + (1-\delta) k_t, \theta_{t+1})$$

y

$$\Gamma(k_t, z_t) = \{c_t : 0 \leq c_t \leq z_t k_t^{\alpha} + (1-\delta) k_t\}$$

Si suponemos, como usualmente se hace en la literatura, que $\log(z_t)$ sigue un proceso autorregresivo de primer orden: $\log(z_t) = \rho \log(z_{t-1}) + \theta_t$, entonces la función de transición g la podríamos identificar como:

$$\begin{aligned}
(k_{t+1}, z_{t+1}) &= g(k_t, z_t, c_t, \theta_{t+1}) \\
&= (z_t f(k_t) - c_t + (1-\delta) k_t, \exp(\rho \log(z_t) + \theta_{t+1}))
\end{aligned}$$

En este caso $z_t \neq \theta_t$, z_t es la variable de estado exógena y θ_t es la fuente de incertidumbre.

B. Programación dinámica

De la misma forma que en el caso determinístico, la programación dinámica en el caso estocástico explota de manera fundamental la recursividad del problema. Para ilustrar las ideas principales consideraremos una vez más el

[3] Por simplicidad, suponemos que $E[\log(z_t)] = 0$.

modelo de Brock y Mirman, que permite una solución cerrada. Sin embargo, en términos generales, sólo en casos muy particulares es posible calcular explícitamente la función valor y la función política, lo que hace necesario recurrir a métodos computacionales. Algunos de estos métodos computacionales están motivados por los métodos que expondremos en este capítulo para el caso estocástico.

Ejemplo 12. (Brock y Mirman [1972], el caso estocástico). Supongamos que el capital se deprecia completamente al final de cada período ($\delta = 1$), que la función de producción es de la forma $f(k_t) = z_t k_t^{\alpha}$, donde $\alpha \in (0,1)$, y que la función de utilidad es logarítmica. Así, nuestro problema se transforma en:

$$\begin{aligned} & \text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t) \\ s.a \quad & : \\ k_{t+1} \quad & = \quad z_t k_t^{\alpha} - c_t \\ & \quad\; k_0,\ z_0,\ \text{dado.} \end{aligned}$$

Ahora, de manera informal, si utilizáramos el método iterativo para encontrar la función valor, no es difícil sospechar, después de un par de iteraciones, que un buen candidato a ser la función valor es: $v(k,z) = a + b\log(k) + c\log(z)$, donde a, b y c son constantes que debemos determinar. Nos proponemos ahora verificar que en efecto ésta es la forma de la función valor. De la ecuación funcional sabemos que debe cumplir:

$$\begin{aligned} & a + b\log(k_t) + c\log(z_t) = \\ & \qquad \sup_{0 \leq c_t \leq z_t k_t^{\alpha}} \{\log(c_t) + \beta E_t[a + b\log(z_t k_t^{\alpha} - c_t) + c\log(z_{t+1})]\} \end{aligned}$$

Claramente la solución a este problema debe ser interior. Las condiciones de primer orden implican que el consumo óptimo es:

$$c_t = \frac{z_t k_t^{\alpha}}{1 + \beta b}$$

Sustituyendo en la ecuación de Bellman es fácil ver que $a = \frac{1}{1-\beta}\ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{(1-\beta)(1-\alpha\beta)}\ln(\alpha\beta)$, $b = \frac{\alpha}{(1-\alpha\beta)}$ y $c = \frac{1}{(1-\alpha\beta)}$ son constantes que hacen nuestro candidato a función valor satisfacer la ecuación de Bellman. Luego, la función de política es:

$$c_t = (1 - \beta\alpha) z_t k_t^{\alpha}$$

y la dinámica óptima del capital está dada por:

$$k_{t+1} = \beta\alpha z_t k_t^{\alpha} \qquad \text{(IV.1)}$$

Ahora, como punto de referencia para pensar con relación al problema de estabilidad bajo incertidumbre, nos referiremos al ejemplo anterior. Puesto que la dinámica del capital es un proceso estocástico, no es del todo claro en qué sentido el capital converge a un capital de "estado estacionario". Una posibilidad natural es que la distribución que caracteriza la dinámica del capital en cada instante ϕ_t "converja" en algún sentido que debemos especificar a una distribución ϕ, que proponemos como la distribución que caracteriza el estado estacionario, invariante a la dinámica de éste (esto es ciertamente más general que suponer que la convergencia es a una distribución concentrada en un punto). Es decir, si el estado inicial de la economía k_0 es una realización de la distribución ϕ, el capital óptimo en el período siguiente debe estar caracterizado por la misma distribución ϕ.

Para caracterizar mejor esta última propiedad debemos saber calcular cómo evoluciona la distribución del capital según la función que determina su dinámica óptima y la forma como se va revelando la información. Esto es, la distribución del capital en $t+1$ es:

$$\phi_{t+1}(b) = P(k_{t+1} \leq b) = P(\alpha\beta z_t k_t^{\alpha} \leq b) = P(z_t k_t^{\alpha} \leq b/\alpha\beta)$$

luego, utilizando el teorema de probabilidad total tenemos:

$$\phi_{t+1}(b) = \int P\left(z_t \leq \frac{b}{\alpha\beta a^{\alpha}} \mid k_t = a\right) d\phi_t(a) = \int G\left(\frac{b}{\alpha\beta a^{\alpha}}\right) d\phi_t(a),$$

donde G es la distribución del choque tecnológico.

Ahora, sea $H(a,b) = P(k_{t+1} \leq b \mid k_t = a)$. La *función de transición* H la podemos interpretar como la probabilidad de que en $t+1$ el capital sea menor o igual a b, dado que en t el capital era a. Obsérvese que $H(a,b) = G(\frac{b}{\alpha\beta a^{\alpha}})$, que es una distribución conocida; por consiguiente, podemos expresar la distribución del capital en $t+1$ como:

$$\phi_{t+1}(b) = \int H(a,b)\, d\phi_t(a) \tag{IV.2}$$

En el lenguaje de la teoría de la probabilidad decimos que la dinámica óptima del capital es un *Proceso de Markov* con función de transición $H(a,b)$. La ecuación IV.2 es el análogo, en términos de la distribución del capital, de la ecuación IV.1.

Usando este lenguaje, la propiedad de estabilidad consiste en encontrar una distribución ϕ, "límite" de las distribuciones $\{\phi_t\}$, tal que:

$$\phi(b) = \int H(a,b)\, d\phi(a).$$

En este caso decimos que la distribución ϕ es *invariante* a la función de transición H. La distribución ϕ es nuestro análogo estocástico al estado estacionario en el caso determinístico. En términos generales es imposible encontrar el estado estacionario ϕ en forma cerrada. Una vez más el ejemplo de Brock y Mirman nos da luces sobre el estado estacionario de un problema de optimización dinámica estocástico.

Ejemplo 13. (Brock y Mirman [1972], el caso estocástico una vez más). A diferencia de la exposición anterior, donde nos preguntábamos por la distribución invariante del capital, ahora, por simplicidad, calcularemos la distribución invariante del *logaritmo* del capital. Luego, supongamos que $\ln(z_t) \sim N(0, \sigma^2)$. Vamos a mostrar que $\ln(k_t) \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$ y que la sucesión $\{(\mu_t, \sigma_t^2)\}_{t=0,1...}$ de medias y varianzas convergen a constantes $\overline{\mu}$ y $\overline{\sigma}^2$ respectivamente. Entonces, la conjetura natural es que la distribución de $\ln(k_t)$ converge en algún sentido hacia una distribución invariante $\psi \sim N(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ (obsérvese que ψ sería la distribución invariante del logaritmo del capital). Retomando el ejemplo anterior encontramos que la dinámica óptima del capital es:

$$k_{t+1} = \beta\alpha z_t k_t^{\alpha}$$

Tomando logaritmos, tenemos:

$$\ln k_{t+1} = \ln(\beta\alpha) + \ln(z_t) + \alpha \ln(k_t),$$

lo que implica:

$$\ln k_{t+1} = (1+\alpha)\ln(\beta\alpha) + \ln(z_t) + \alpha\ln(z_{t-1}) + \alpha^2 \ln k_{t-1}.$$

Luego, si $\ln(k_0) \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, entonces $\ln(k_t) \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$ (obsérvese que esto incluye el caso en que k_0 es una constante conocida).

Si reemplazamos hacia atrás sucesivamente hasta llegar a la primera observación de k, k_0, encontramos la siguiente expresión:

$$\ln k_{t+1} = \left(\sum_{i=0}^{t} \alpha^i\right) \ln(\beta\alpha) + \sum_{i=0}^{t} \alpha^i \ln(z_{t-i}) + \alpha^{t+1} \ln k_0 \tag{IV.3}$$

Tomando el valor esperado de esta ecuación y teniendo en cuenta la distribución de z_t obtenemos:

$$E[\ln k_{t+1}] = \left(\sum_{i=0}^{t} \alpha^i\right) \ln(\beta\alpha) + \alpha^{t+1} \ln k_0 \tag{IV.4}$$

Ahora, a partir de la ecuación IV.3, la varianza V de $\ln k_{t+1}$ es:

$$\begin{aligned} V[\ln k_{t+1}] &= V\left[\left(\sum_{i=0}^{t} \alpha^i\right) \ln(\beta\alpha) + \alpha^{t+1}\ln k_0 + \sum_{i=0}^{t} \alpha^i \ln(z_{t-i})\right] \\ &= V\left[\sum_{i=0}^{t} \alpha^i \ln(z_{t-i})\right] \end{aligned}$$

y como z_t son variables aleatorias i.i.d, entonces la covarianza entre $\ln(z_t)$ y $\ln(z_{t-i})$ es cero para todo $i \neq 0$.[4] Luego

$$V[\ln k_{t+1}] = \left(\sum_{i=0}^{t} \alpha^{2i} \right) \sigma^2 \tag{IV.5}$$

Las ecuaciones IV.3, IV.4 y IV.5 implican que $\ln(k_t) \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$, donde

$$\begin{aligned} \mu_t &= \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\alpha^{t+1}\right)\ln(\beta\alpha) + \alpha^{t+1}\ln k_0 \\ \sigma_t^2 &= \frac{1}{1-\alpha^2}\left(1-\alpha^{2(t+1)}\right)\sigma^2 \end{aligned}$$

Nótese que si $\alpha \in (0,1)$, entonces:

$$\begin{aligned} \overline{\mu} &= \lim_{t\to\infty} \mu_t = \frac{\ln(\alpha\beta)}{1-\alpha} \\ \overline{\sigma} &= \lim_{t\to\infty} \sigma_t^2 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} \end{aligned}$$

y ψ sigue un proceso AR(1) estacionario.

Una pregunta fundamental es si el estado estacionario determinístico del capital del modelo de Brock y Mirman k^*, es igual a la media del estado estacionario estocástico, $k = E[\exp[\psi]]$. La respuesta es negativa. Para demostarlo utilizamos la desigualdad de Jensen.[5] Como la función exponencial es estrictamente convexa (y ψ no es constante) entonces $k = E[\exp(\psi)] > \exp(E[\psi]) = \exp(\overline{\mu}) = \left((\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) = k^*$.[6]

Sin embargo, obsérvese que $\log[k^*] = E[\phi]$. Esto ocurre porque en logaritmos el modelo de Brock y Mirman es lineal. El siguiente ejemplo es muy importante porque llama la atención sobre el importante papel que cumplen cierto tipo de no-linealidades en los modelos estocásticos.

Ejemplo 14. (Control Óptimo Lineal. Basado en Sargent [1987]). Consideremos el problema:

$$\begin{aligned} & \sup E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(x_t'Qx_t + u_t'Ru_t + 2x_t'Wu_t)\right] \\ s.a &: \\ x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t + \varepsilon_{t+1} \\ & x_0 \text{ dado,} \end{aligned}$$

[4] Adicionalmente suponemos que la distribución de $\ln(k_0)$ es independiente de $\ln(z_t)$ para todo t.

[5] Informalmente, la desigualdad de Jensen implica que, si f es una función estrictamente convexa y X es una variable aleatoria entonces $E[f(X)] > f(E[X])$.

[6] Otra manera de ver esto es utilizando la siguiente propiedad de las distribuciones log-normales. Si X es una variable aleatoria tal que $\log(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $E[X] = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$.

donde ε_t es un proceso estocástico i.i.d con media cero y matriz de varianza-covarianza Σ. El lector puede verificar fácilmente que la función valor de este problema es:

$$v(x,\varepsilon) = x'Px + \frac{\beta}{1-\beta}tr(P\Sigma),$$

donde tr denota la traza de la matriz y P es la misma que teníamos en el problema determinístico (i.e la solución al problema de Riccati). De otra parte, la función de política es:

$$u_t = -(R+\beta B'PB)^{-1}(\beta B'PA + W')x_t = -Fx_t$$

Luego, la dinámica óptima está dada por: $x_{t+1} = (A-BF)x_t + \varepsilon_{t+1}$.Obsérvese que la función de política es la misma función de política del caso determinístico. Esta propiedad se llama *principio de equivalencia determinística y e*s una característica muy particular de los problemas lineales-cuadráticos y no una propiedad general de los problemas de optimización dinámica estocástica. El resultado depende de tres características de este ejemplo: a función retorno es cuadrática, la dinámica de transición de las variables de estado es lineal y $E[\varepsilon_{t+1} \mid x_t] = 0$.

C. Método de Lagrange y su relación con el método de programación dinámica

La versión estocástica del método de Lagrange es una aplicación de la fórmula de Benveniste y Scheinkman al caso estocástico. Informalmente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(x_t)}{\partial x_i} &= \frac{\partial r(x_t,h(x_t))}{\partial x_i} + \\ &\quad \beta E_t\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v(g(x_t,h(x_t),\theta_{t+1}))}{\partial x_k}\frac{\partial g_k(x_t,h(x_t),\theta_{t+1})}{\partial x_i}\right],\end{aligned}$$

y las condiciones de primer orden del problema funcional son:

$$\frac{\partial r(x_t,h(x_t))}{\partial u_j} + \beta E_t\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v(g(x_t,h(x_t),\theta_{t+1}))}{\partial x_k}\frac{\partial g_k(x_t,h(x_t),\theta_{t+1})}{\partial u_j}\right] = 0$$

Obsérvese que para todo i,k tal que x_i, x_k son variables de estado endógenas y exógenas respectivamente: $\frac{\partial g_k(x_t,h(x_t),\theta_{t+1})}{\partial x_i} = 0$ y $\frac{\partial g_k(x_t,h(x_t),\theta_{t+1})}{\partial u_j} = 0$ para todo j.

En lo que sigue será útil separar las variables de estado endógenas de las variables de estado exógenas. Denotemos por x las variables de estado endógenas y por z las exógenas. Luego, si g_x son las componentes de g que determinan la dinámica de las variables endógenas, $x_{t+1} = g_x(x_t, z_t, u_t, \theta_{t+1})$, y g_z las componentes de g que determinan la dinámica de de las variables exógenas, $z_{t+1} = g_z(z_t, \theta_{t+1})$, entonces por la observación anterior podemos escribir las anteriores ecuaciones como:

$$\frac{\partial v\left(x_t, z_t\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial r\left(x_t, z_t, h(x_t, z_t)\right)}{\partial x_i} + \beta E_t\left[\sum_{k=1}^{n_s} \frac{\partial v(x_{t+1}, z_{t+1})}{\partial x_k} \frac{\partial g_{x,k}(x_t, z_t, h(x_t, z_t), \theta_{t+1})}{\partial x_i}\right],\ i = 1, ..., n_s$$

y,

$$\frac{\partial r\left(x_t, z_t, h(x_t, z_t)\right)}{\partial u_j} + \beta E_t\left[\sum_{k=1}^{n_s} \frac{\partial v(x_{t+1}, z_{t+1})}{\partial x_k} \frac{\partial g_{x,k}(x_t, z_t, h(x_t, z_t), \theta_{t+1})}{\partial u_j}\right] = 0,$$

$j = 1, ..., m$ donde $(x_{t+1}, z_{t+1}) = (g_x(x_t, z_t, h(x_t, z_t), \theta_{t+1}), g_z(z_t, \theta_{t+1}))$.

Sea $\lambda_{i,t} = \frac{\partial v(x_t^*, z_t)}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n_s$ entonces estas dos ecuaciones se pueden reescribir como:

$$\frac{\partial r(x_t^*, z_t, u_t^*)}{\partial x_i} + \beta E_t\left[\lambda_{t+1} \cdot \frac{\partial g_x\left(x_t^*, z_t, u_t^*, \theta_{t+1}\right)}{\partial x_i}\right] - \lambda_{i,t} = 0,\ i = 1, ..., n_s \tag{IV.6}$$

$$\frac{\partial r(x_t^*, z_t, u_t^*)}{\partial u_j} + \beta E_t\left[\lambda_{t+1} \cdot \frac{\partial g_x\left(x_t^*, z_t, u_t^*, \theta_{t+1}\right)}{\partial u_j}\right] = 0,\ j = 1, ..., m \tag{IV.7}$$

y la dinámica de las variables de estado endógenas:

$$x_{t+1}^* = g_x\left(x_t^*, z_t, u_t^*, \theta_{t+1}\right) \tag{IV.8}$$

Si $\lambda_t \geq 0$ y $x_t \geq 0$, la condición de transversalidad es:

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \lambda_t \cdot x_t^* = 0$$

Ahora, como tenemos n_s variables de estado endógenas, n_s multiplicadores de Lagrange y m el número de variables de control, entonces en total tenemos $2n_s + m$ variables endógenas. Por otro lado, tenemos n_s condiciones de primer orden para los estados endógenos (IV.6), m ecuaciones para los controles (IV.7) y n_s ecuaciones dinámicas para las variables de estados endógenas (IV.8) para un total de $2n_s + m$ ecuaciones. Finalmente, tenemos n_s condiciones iniciales para las variables de estado endógenas y una condición terminal (condición de transversalidad).

Cuando $\frac{\partial g_x}{\partial x_i} = 0$, entonces $\lambda_{i,t} = \frac{\partial r(x_t^*, z_t, u_t^*)}{\partial x_i}$; sustituyendo en la segunda condición de primer orden obtenemos las ecuaciones de Euler estocásticas.

Al igual que en el caso determinístico, una forma de obtener informalmente estas ecuaciones es mediante la maximización del siguiente lagrangiano:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i r(x_{t+i}, z_{t+i}, u_{t+i})\right] \\
& +E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty}\Lambda_{t+i+1}(g_x(x_{t+i}, z_{t+i}, h(x_{t+i}, z_{t+i}), \theta_{t+i+1}), g_z(z_{t+i}, \theta_{t+i+1})) - x_{t+i+1})\right] \\
& -\Lambda_t(x_t)
\end{aligned}
$$

Si definimos $\lambda_t = \frac{\Lambda_t}{\beta^t}$, obtenemos las mismas condiciones de primer orden.

D. Ejercicios y soluciones

D.1. Ejercicios

Ejercicio 21. El problema es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
& \max E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \ln c_t\right] \\
s.a \quad & : \\
c_t + k_{t+1} \quad & \leqslant \quad z_t k_t^{\alpha} \\
& k_0,\ z_0 \text{ dado,}
\end{aligned}
$$

donde $\{z_t\}$ es $i.i.d$ con $\ln(z_t)\tilde{}N[0,\sigma^2]$.

Utilizar el algoritmo de Howard para resolver el problema. (Ayuda: suponga que la dinámica óptima del capital es de la forma $k_{t+1} = a_0\left(z_t k_t^{\alpha}\right)$, donde a_0 es una constante.

Ejercicio 22. Consideremos la versión estocástica del modelo de Long y Plosser. Es decir, el mismo modelo básico de crecimiento donde las preferencias son logarítmicas en consumo y ocio (i.e. $u(c,l) = \gamma\ln(c) + (1-\gamma)\ln(l)$), y el capital se deprecia completamente cada período. Suponga que $\ln(z_t) = \rho\ln(z_{t-1}) + \theta_t$, θ_t ruido blanco y $\rho \in (0,1)$.

1. Probar que las trayectorias óptimas son de la forma: $c_t = \pi_1 z_t k_t^{\alpha}$, $k_{t+1} = \pi_2 z_t k_t^{\alpha}$, donde π_1 y π_2 son constantes.
2. Mostrar que el consumo y el producto siguen un proceso autorregresivo de orden 2 (i.e., $AR(2)$).

Ejercicio 23. [7]Este ejercicio es una aplicación del método de programación dinámica al problema de valorar un derivado financiero sobre el precio de

[7]Agradezco a Juan Dubra por facilitarme este ejemplo.

una acción. En efecto, el problema es muy fácil de plantear y llama la atención sobre la versatilidad del método de programación dinámica para atacar problemas que no tienen exactamente la forma del problema secuencial que hemos estudiado a lo largo del libro. Supongamos que tenemos un agente que valora hoy una unidad futura de la moneda local en $\frac{1}{1+r}$, donde r, la tasa de interés, es positiva. El instrumento financiero (derivado financiero) que queremos valorar es el siguiente: supongamos que p es el precio de la acción de una compañía en el período t (denominado en unidades de la moneda local) y que en el período $t+1$ puede ser $p+1$, con probabilidad q, y p con probabilidad $1-q$. El instrumento financiero consiste de un papel que da el derecho a su comprador de comprar una acción a precio unitario (una unidad de la moneada local) al finalizar el día en cualquier día en el futuro. Esto es lo que se llama una opción de compra americana a perpetuidad sobre el precio de una acción.[8] El problema consiste en decidir cuándo se debe ejercer la opción y cuál es costo c de este instrumento financiero que haría indiferente al agente entre comprar el derivado o no. Para responder estos cuestionamientos es necesario responder las siguientes preguntas intermedias.

1. ¿Cúal es la variable de estado de este problema?

2. Escribir la ecuación de Bellman.

$$v(p) = \max\{p-1, \delta E_p v\}$$

3. Encontrar la función de política. Esto es, una función que determina, como función del precio de la acción, si se ejerce o no la opción. Ayuda: Un buen candidato a ser la función de política es fijar un p^* tal que la opción se ejerce si y sólo si $p \geq p^*$. La idea es verificar que valor debe tener p^* para que satisfaga la ecuación de Bellman.

4. ¿Cuál es la función valor $v(p)$ del problema? Mostrar que satisface la ecuación de Bellman.

5. ¿Cuál es el costo c que deja al agente indiferente entre comprarla y no comprarla?

[8]Las opciones que se encuentran en los mercados financieros tienen una fecha de maduración. Esto es, un período durante el cual el comprador tiene el derecho a comprar (en el caso de las opciones de compra) o vender (en el caso de las opciones de venta). Las opciones que se pueden ejercer en cualquier momento entre el momento que inicia el contrato entre las partes y la fecha de maduración se conocen como opciones de tipo americano. Las que sólo permiten ejercer la opcion en la fecha de maduración se conocen como opciones de tipo europeo.

D.2. Soluciones

Solución 13 (Ejercicio 21)**.** Considerando el algoritmo de Howard, primero proponemos una dinámica óptima del capital:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= a_0\left(k_t^\alpha z_t\right) \\ \text{donde } a_0 &\in [0,1] \text{ es una constante} \end{aligned} \tag{1}$$

De acuerdo con el algoritmo, tenemos:

$$J_0(k_0, z_0) = E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(k_t^\alpha z_t - k_{t+1}\right)\right] \tag{2}$$

Con k_{t+1} que cumple la ecuación 1. Después de algo de álgebra, la ecuación 2 queda de la siguiente manera:

$$J_0(\cdot) = E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(1-a_0)\right] + E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(z_t)\right] + E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \alpha \ln(k_t)\right]$$

Sabiendo que $E_0\left[\ln z_t\right] = 0\ \forall t > 0$, $E_0\left[\ln z_0\right] = \ln z_0$; $\ln(1-a_0)$ es una constante, y que $\beta \in [0,1]$, desarrollando algebraicamente encontramos:

$$J_0(\cdot) = \frac{\ln(1-a_0)}{1-\beta} + \ln z_0 + \alpha E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(k_t)\right] \tag{3}$$

Si actualizamos para t y $t-1$ la ecuación 1 y además tomamos logaritmos, resulta:

$$\ln(k_t) = \ln(a_0) + \alpha\ln(a_0) + \alpha^2\ln(k_{t-2}) + \ln(z_{t-1}) + \alpha\ln(z_{t-2})$$

Sustituyendo progresivamente tendremos:

$$\ln k_t = \ln(a_0)\left(\sum_{i=0}^{t-1}\alpha^i\right) + \alpha^t\ln(k_0) + \sum_{i=0}^{t-1}\alpha^i\ln(z_{t-1-i})$$

Como $\alpha \in (0,1)$:

$$\ln k_t = \left(\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}\right)\ln(a_0) + \alpha^t\ln k_0 + \sum_{i=0}^{t-1}\alpha^i\ln\left(z_{t-1-i}\right)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (3),

$$\begin{aligned} J_0(\cdot) &= \frac{\ln\left((1-a_0)\right)}{1-\beta} + \ln(z_0) + \\ &\quad \alpha E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left(\ln\left(a_0\left(\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}\right)\right) + \alpha^t\ln(k_0) + \sum_{i=0}^{t-1}\alpha^i\ln(z_{t-1-i})\right)\right] \end{aligned}$$

Tomando esperanzas y teniendo en cuenta que α y β son menores que uno, podemos simplificar algebraicamente esta expresión hasta encontrar:

$$J_0(\cdot) = \frac{\ln(1-a_0)}{1-\beta} + \frac{\beta\alpha\ln(a_0)}{(1-\alpha\beta)(1-\beta)} + \frac{\alpha\ln k_0}{1-\alpha\beta} + \left(\frac{2-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right)\ln(z_0)$$

Sean: $A_0 = \frac{\ln(1-a_0)}{1-\beta} + \frac{\beta\alpha\ln(a_0)}{(1-\alpha\beta)(1-\beta)}$; $A_1 = \frac{2-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}$ entonces:

$$J_0(\cdot) = A_0 + A_1 \ln z_0 + \frac{\alpha\ln(k_0)}{1-\alpha\beta}$$

Para continuar con el algoritmo de Howard debemos maximizar:

$$\text{máx}\left\{\ln\left(k_t^\alpha z_t - k_{t+1}\right) + \beta E_t\left[J_0(k_{t+1}, z_{t+1})\right]\right\}$$

$$= \max_{k_{t+1}}\left\{\ln\left(k_t^\alpha z_t - k_{t+1}\right) + \beta E_t\left(A_0 + A_1\ln\left(z_{t+1}\right) + \frac{\alpha\ln\left(k_{t+1}\right)}{1-\alpha\beta}\right)\right\}$$

La condición de primer orden es:

$$-\frac{1}{k_t^\alpha z_t - k_{t+1}} + \beta E_t\left[\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\cdot\frac{1}{k_{t+1}}\right] = 0$$

Debido a que z_t se conoce en t, podemos eliminar el valor esperado; con algo de álgebra obtenemos la dinámica óptima del capital similar a la que habíamos propuesto anteriormente:

$$k_{t+1} = \beta\alpha k_t^\alpha z_t \tag{4}$$

Nótese que hemos llegado a la dinámica del capital que se encontró en el problema de Brock y Mirman.

Es fácil ver que con una iteración más del algoritmo de Howard, volvemos a encontrar la misma dinámica óptima.

Solución 14 (Ejercicio 22)**.** El problema secuencial es:

$$\begin{aligned} & \text{máx } \; E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left(\gamma ln c_t + (1-\gamma)ln(1-n_t)\right)\right] \\ k_{t+1} \;\; = \;\; & z_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha} - c_t, \\ & k_0, z_0 \text{ dados.} \end{aligned}$$

El problema funcional asociado es:

$$\begin{aligned} v(k,z) &= \max_{c,n}\{\gamma ln(c) + (1-\gamma)ln(1-n) + \beta E_t\left[v\left(k', z'\right)\right]\} \\ 0 &\leqslant c \leqslant z k^\alpha n^{1-\alpha}, \\ 0 &\leqslant n \leqslant 1 \\ k' &= z k^\alpha n^{1-\alpha} - c \\ ln\left(z'\right) &= \rho ln\left(z\right) + \theta' \end{aligned}$$

Iterando:

$$\begin{aligned} v_0(k,z) &= 0 \\ v_1(k,z) &= \max_{c,n}\{\gamma\ln(c) + (1-\gamma)ln(1-n)\} \end{aligned}$$

Como la función logaritmo es una función estrictamente creciente, la solución óptima del consumo (c) está en el extremo, $c = k^{\alpha}n^{1-\alpha}$.

Además, la solución para la cantidad de trabajo (n) es interior; porque $ln(1) = 0$ y $ln(0) = -\infty$ luego

$$\begin{aligned} v_1(k,z) &= \max_{0\leqslant n\leqslant 1}\{\gamma ln(zk^{\alpha}n^{1-\alpha}) + (1-\gamma)ln(1-n)\} \\ &= \max_{0\leqslant n\leqslant 1}\{\gamma ln(z) + \alpha\gamma ln(k) + (1-\alpha)\gamma ln(n) + (1-\gamma)ln(1-n)\} \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{(1-\alpha)\gamma}{n} - \frac{(1-\gamma)}{1-n} = 0$$

y con un poco de álgebra se tiene:

$$n = \frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\alpha\gamma}$$

$$c = zk^{\alpha}\left[\frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\alpha\gamma}\right]^{1-\alpha}$$

luego:

$$v_1(k,z) = \gamma ln(z) + \alpha\gamma ln(k) + (1-\alpha)\gamma ln\left[\frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\alpha\gamma}\right] + (1-\gamma)ln\left[\frac{1-\gamma}{1-\alpha\gamma}\right]$$

Sea $A_1 = (1-\alpha)\gamma ln\left[\frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\alpha\gamma}\right] + (1-\gamma)ln\left[\frac{1-\gamma}{1-\alpha\gamma}\right]$ entonces:

$$v_2(k,z) = \max_{\substack{0\leqslant c\leqslant zk^{\alpha}n^{1-\alpha} \\ 0\leqslant n\leqslant 1}} \{\gamma ln(c) + (1-\gamma)ln(1-n) + \beta E\left[\gamma ln(z') + \alpha\gamma ln(k') + A_1\right]\}$$

donde $k' = zk^{\alpha}n^{1-\alpha} - c$ y como $ln(z') = \rho ln(z) + \theta'$ entonces $E\left[ln(z')\right] = \rho ln(z)$. Teniendo en cuenta que en t se conoce z_t, k_t, n_t y c_t, entonces:

$$v_2(k,z) =$$
$$\max_{\substack{0\leqslant c\leqslant zk^{\alpha}n^{1-\alpha} \\ 0\leqslant n\leqslant 1}} \{\gamma ln(c) + (1-\gamma)ln(1-n) + \beta\gamma\rho ln(z) + \beta\alpha\gamma ln\left[zk^{\alpha}n^{1-\alpha} - c\right] + \beta A_1\}$$

Las soluciones son interiores y las condiciones de primer orden son:

$$[c] : \frac{\gamma}{c} - \frac{\beta\alpha\gamma}{zk^{\alpha}n^{1-\alpha} - c} = 0$$

$$[n] : \frac{-(1-\gamma)}{1-n} + \frac{\beta\alpha\gamma}{zk^{\alpha}n^{1-\alpha} - c}(1-\alpha)zk^{\alpha}n^{-\alpha} = 0$$

Resolviendo para el consumo y el trabajo obtenemos:

$$c = \frac{zk^{\alpha}n^{1-\alpha}}{1+\beta\alpha}$$

$$n = \frac{\gamma(1-\alpha)(1+\alpha\beta)}{1-\alpha\gamma+\alpha\gamma\beta(1-\alpha)},$$

por lo tanto:

$$v_2(k,z) = \gamma(1+\beta\rho+\beta\alpha)\, ln(z) + \alpha\gamma(1+\beta\alpha)\, ln(k) + A_2,$$

donde A_2 es una constante. A partir de las dos primeras iteraciones parece obvio que después de n iteraciones la función valor es de la forma:

$$v_n(k,z) = a\ln(z) + \alpha\gamma\left[\sum_{i=0}^{n}(\alpha\beta)^i\right] ln(k) + A_n$$

Luego un buen candidato a ser la solución al problema funcional es una función de la forma:

$$v(k,z) = aln(z) + \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha\beta} ln(k) + A$$

donde a y A son constantes que debemos determinar. Sustituyendo en la ecuación funcional y con un poco de álgebra se obtiene:

$$\begin{aligned} A \quad = \quad & \frac{1}{1-\beta}\gamma ln\left[(1-\alpha\beta)\left(\frac{\gamma(1-\alpha)}{1+\alpha(\gamma\beta-\gamma-\beta)}\right)^{1-\alpha}\right] \\ & + \frac{1}{1-\beta}(1-\gamma)\, ln\left[\frac{1-\gamma-\alpha\beta+\alpha\gamma\beta}{1+\alpha(\gamma\beta-\gamma-\beta)}\right] \\ & + \frac{1}{1-\beta}\frac{\beta\alpha\gamma}{(1-\alpha\beta)} ln\left[\alpha\beta\left(\frac{\gamma(1-\alpha)}{1+\alpha(\gamma\beta-\theta-\beta)}\right)^{1-\alpha}\right] \end{aligned}$$

$$a = \frac{\gamma}{(1-\beta\rho)(1-\alpha\beta)}$$

y la función de política es:

$$c_t = \pi_1 z_t k_t^{\alpha},$$

donde:

$$\pi_1 = (1-\alpha\beta)\left(\frac{\gamma(1-\alpha)}{1+\alpha(\gamma\beta-\gamma-\beta)}\right)^{1-\alpha}$$

La dinámica óptima del capital es:

$$k_{t+1} = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - c_t$$

luego:

$$k_{t+1} = \pi_2 z_t k_t^{\alpha}$$

donde:

$$\pi_2 = \alpha\beta \left[\frac{\gamma(1-\beta)}{1+\alpha(\gamma\beta-\gamma-\beta)} \right]^{1-\alpha}$$

Solución 15 (Ejercicio 23)**.**

1. La variable de estado es el precio de la acción.
2. La ecuación de Bellman para este problema es:

   $$v(p) = \text{máx}\{p-1, \delta E_q[v \mid p]\},$$

   donde $E_q[v \mid p] = qv(p+1) + (1-q)v(p)$es decir, si usted ejerce la opción, obtiene $p-1$ de ganancia, pues compra la acción a una unidad y la vende a p; si no la ejerce obtiene el valor presente de la utilidad máxima de mañana, $\delta E_q[v \mid p]$.
3. Supongamos que existe un precio de reserva p^* a partir del cual se ejerce la opción. Sustituyendo en la ecuación de Bellman deducimos que p^* es tal que:

   $$p^* = \delta E_{p^*} v + 1. \tag{IV.9}$$

   Ahora, por construcción de la función de política, si el precio sube, el agente ejerce la opción y, por lo tanto, $v(p^*+1) = p^*$. De otra parte, si el precio se mantiene constante, el agente es indiferente entre ejercer o no la opción. Por tanto:

   $$E_{p^*} v = qp^* + (1-q)(p^*-1) = p^* + q - 1.$$

   Sustituyendo en (IV.9) obtenemos:

   $$p^* = \delta(p^*+q-1) + 1 \Leftrightarrow p^* = \frac{\delta}{1-\delta} q + 1$$
4. Ya sabemos que para todo $p \geq p^*$, tenemos que $v(p) = p-1$, pues la opción será ejercida. Resta entonces calcular el valor de $v(p)$ para $p < p^*$.
5. Para esto consideremos tres casos

Ejercicio 24.

1. *a*) $p^*-1 \leq p < p^*$. En este caso, estamos a "distancia" 1 de ejecutar la opción. Es decir, el precio se mantendrá constante o subirá. Cuando suba una vez, se ejecutará la opción. Por lo tanto, para estos valores de p obtenemos que $v(p)$ es: la probabilidad de que suba en el primer período, por la utilidad de

que suba en el primer período más la probabilidad de que suba en el segundo período, por la utilidad de que suba en el segundo período más... y así para siempre. En fórmulas tenemos:

$$\begin{aligned} v(p) &= q\delta p + (1-q)\, q\delta^2 p + (1-q)^2\, q\delta^3 p + ... \\ &= q\delta p \sum_{i=0}^{i=\infty} ((1-q)\,\delta)^i = \frac{q\delta}{1-(1-q)\,\delta} p \end{aligned}$$

b) $p^* - 2 \leq p < p^* - 1$. En este caso, estamos a distancia 2 de ejecutar. Se pueden seguir dos alternativas: una es calcular las probabilidades y utilidades de ejecutar dentro de 2, 3, 4 o más períodos (en forma similar a lo que hicimos en el literal (a)); otra es decir "ya sé cuál es mi utilidad de llegar a una distancia de 1 de ejecutar, entonces lo que tengo que hacer es, en vez de tomar la fecha de ejecución como nodo terminal, tomo la fecha de llegada a la distancia 1 como nodo terminal, pues ya sé cuánto es v en ese caso". La segunda alternativa es mucho más fácil. Para comprobarlo trate de seguir la primera, y compare con lo que haremos ahora. Tenemos que la utilidad de estar a dos pasos de ejecutar es: la probabilidad de que suba en el primer período, por la utilidad de que suba en el primer período más la probabilidad de que suba en el segundo período, por la utilidad de que suba en el segundo período más... y así para siempre. Si están atentos, esta última oración es idéntica a la que usamos en (a), pero en fórmulas va a ser un poco distinto, pues ahora la utilidad de que suba en el período i-ésimo no será como antes la utilidad de ejecutar, sino que será la utilidad de estar a un paso de ejecutar. En fórmulas tenemos:

$$\begin{aligned} v(p) &= q\delta v(p+1) + (1-q)\, q\delta^2 v(p+1) + (1-q)^2\, q\delta^3 v(p+1) + ... \\ &= v(p+1)\, q\delta \sum_{i=0}^{i=\infty} ((1-q)\,\delta)^i = \frac{q\delta}{1-(1-q)\,\delta} v(p+1) \\ &= \frac{q\delta}{1-(1-q)\,\delta} \frac{q\delta}{1-(1-q)\,\delta} (p+1) \\ &= \left(\frac{q\delta}{1-(1-q)\,\delta}\right)^2 (p+1) \end{aligned}$$

Otra forma aún más fácil es notar que para los p que nos interesan,

$$v(p) = \delta E_p v = \delta q v(p+1) + \delta(1-q)\, v(p);$$

despejando y sustituyendo $v(p+1)$ de la parte (a) obtenemos:

$$\begin{aligned} v(p) &= \delta q v(p+1) + \delta(1-q) v(p) \Leftrightarrow v(p) \\ &= \frac{\delta q}{1-\delta(1-q)} v(p+1) \Leftrightarrow \\ v(p) &= \frac{\delta q}{1-\delta(1-q)} \frac{q\delta}{1-(1-q)\delta} p \end{aligned}$$

c) $p^* - n \leq p < p^* - n + 1$. Demostraremos por inducción que para p en este rango,

$$v(p) = \left(\frac{q\delta}{1-(1-q)\delta}\right)^n (p+n-1).$$

Ya hemos demostrado que se cumple para $n=1$ y $n=2$. Ahora asumimos que se cumple para $n-1$ y lo demostramos para n. Siguiendo los mismos pasos que en (b) obtendremos que:

$$\begin{aligned} v(p) &= \frac{q\delta}{1-(1-q)\delta} v(p+1) \\ &= \frac{q\delta}{1-(1-q)\delta} \left(\frac{q\delta}{1-(1-q)\delta}\right)^{n-1} ((p+1)+(n-1)-1) \\ &= \left(\frac{q\delta}{1-(1-q)\delta}\right)^n (p+n-1) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

En conclusión obtenemos que:

$$v(p) = \begin{cases} p-1 & \text{si } p \geq p^* = \frac{\delta}{1-\delta} q + 1 \\ \left(\frac{q\delta}{1-(1-q)\delta}\right)^n (p+n-1) & \text{si } p^* - n \leq p < p^* - n + 1 \end{cases}$$

2. $c = v(p)$.

Bibliografía

[1] Carvajal, A. & Riascos, A. (2005). Notas de clase sobre probabilidad. http://www.webpondo.org/ariascos/Files/Probabilidad/ln2.pdf

[2] Epstein, L. & Wang, T. (1994). Intertemporal asset pricing under knightian uncertainty. *Econometrica*, 62, 3, 283 - 322.

[3] Judge, G., Hill, R., Griffiths, W., Lütkepohl, H., & Lee, T. (1988). *Introduction to the theory and practice of econometrics.* John Wiley & Sons. 2nd edition.

[4] King, R., Plosser, Ch., & Rebelo, S. (1988). Production growth and business cycles. I the basic neoclassical model. *Journal of Monetary Economics*, 21, 195-232.

[5] Long, J., & Plosser, Ch. (1983). Real business cycles. *Journal of Political Economy*, 91, 1, 39 - 69.

[6] Lucas, R. (1988). On the mechanics of economic development. *JMT*, 22, 3-42.

[7] Sargent, T. (1987). *Dynamic macroeconomic theory.* Harvard University Press.

[8] Stokey, N., Lucas, R, & Prescott, E. (1989). *Recursive methods in economic dynamics.* Harvard University Press.

V

Métodos computacionales: el caso lineal-cuadrático

En la práctica, tanto el método de programación dinámica como el método de Lagrange transforman los problemas de optimización dinámica en problemas equivalentes, pero en ocasiones igualmente difíciles de resolver.[1] Por esta razón, muchas veces es necesario recurrir a aproximaciones numéricas y métodos computacionales que nos permitan resolver los problemas de forma aproximada. Concretamente en el caso del método de programación dinámica, procedimientos para encontrar la función valor o la función de política y en el caso del método de Lagrange, procedimientos para encontrar la sucesión que satisface las condiciones de primer orden.

La característica principal que comparten todos los métodos de este capítulo es que, de una u otra forma, transforman el problema secuencial en un problema en el que la función retorno es cuadrática y las restricciones son lineales. Esta tranformación se hace desde el inicio mismo del planteamineto del problema, como en el método de la siguiente sección o en forma implícita, como en el método de Blanchard y Khan [1980], donde se linearizan las condiciones de primer orden. Como veremos, esta tranformación permite utilizar ténicas relativamente sencillas para resolver los problemas en forma aproximada pero perdiendo información con relación al problema original o limitando el alcance del análisis. Por ejemplo, todos los métodos de este capítulo cumplen con el principio de equivalencia determinística. Esta característica limita la aplicabilidad de los métodos cuando se quiere estudiar ciertos problemas económicos donde la incertidumbre en el ambiente económico cumple un papel esencial; tal es el caso cuando queremos estudiar el motivo precautelativo del ahorro. El próximo capítulo alivia algunas de estas deficiencias a costa de una mayor complejidad en los métodos y en los algoritmos computacionales.

Para comenzar, supongamos que queremos resolver el problema secuencial.

[1] Lo que no podemos interpretar como una falla en los métodos. En general, formular los problemas en formas diferentes, pero equivalentes, permite descubrir nuevas propiedades, encontrar nuevas interpretaciones, probar nuevos teoremas, etc. En particular, las dos técnicas que hemos estudiado hasta ahora para resolver el problema secuencial motivan técnicas numéricas totalmente diferentes para resolver el problema de manera aproximada.

A lo largo de este capítulo vamos a mantener las siguientes hipótesis que sirven como guía para determinar si los métodos numéricos son apropiados para resolver el problema.

1. El problema tiene una solución de estado estacionario.
2. La solución de estado estacionario satisface la propiedad de estabilidad.
3. El plan óptimo está en el interior de Γ.

Lo primero que debemos observar es que estas hipótesis son mucho más generales de lo que parecen a primera vista. La primera condición muchas veces se obtiene haciendo un cambio de variable. Por ejemplo, consideremos el modelo básico de crecimiento con oferta laboral. En particular, el modelo de Long y Plosser estudiado en el capítulo 3. Por completitud, lo reproducimos aquí pero con una ligera modificación. El problema secuencial es:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\gamma \log(c_t) + (1-\gamma)\log(1-n_t)) \\ s.a \quad & : \\ k_{t+1} \quad & = \quad k_t^{\alpha} \left(\phi_t n_t\right)^{1-\alpha} - c_t \end{aligned}$$

donde ϕ_t es una variable exógena que crece a una tasa constante ψ. La variable ϕ_t la podemos interpretar como cambios exógenos en la productividad del trabajo debido a, por ejemplo, aumentos en el capital humano de la población. Es claro que la solución de este modelo va exigir que las variables siempre estén cambiando en el tiempo con excepción probablemente, del tiempo dedicado al trabajo, n_t. Es decir, el modelo no tiene una solución de estado estacionario tal como la definimos anteriormente. Sin embargo, si normalizamos todas las variables por ϕ_t, con excepción de n_t, es claro que el problema va a tener una solución de estado estacionario en las nuevas variables (de manera más general, lo que usualmente hay que hacer es algún tipo de cambio de variables). Para ver esto, sea $\widehat{y}_t = \frac{y_t}{\phi_t}$ donde y es el capital o el consumo. Entonces, en las variables normalizadas, el problema secuencial se puede escribir en forma equivalente como:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\gamma \log(\widehat{c}_t) + (1-\gamma)\log(1-n_t)) \\ s.a \quad & : \\ \psi \widehat{k}_{t+1} \quad & = \quad \left(\widehat{k}_t\right)^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - \widehat{c}_t \end{aligned}$$

problema que ya sabemos resolver. Obsérvese que, por la forma logarítmica de la función de utilidad, el cambio de variable ha sido particularmente sencillo; no fue necesario cambiar el factor de descuento intertemporal, pero este no es siempre el caso por ejemplo, si la función de utilidad es del tipo CES. Sin embargo, esto no hace el problema necesariamente más difícil (véanse ejercicios al final del capítulo). Una vez resuelto el problema en las variables transformadas podemos retornar a las variables originales.

Otro problema relevante con relación a la hipótesis (1) es cómo calcular ese estado estacionario. Como veremos más adelante, algunos modelos pueden tener varios estados estacionarios lo cual es de considerable interés en la literatura económica. Por el momento nos concentraremos en modelos con un estado estacionario estable. En general, una forma de calcularlos es utilizando el método de Lagrange para escribir las condiciones de primer orden. Una vez hecho esto, mediante un inspección de las ecuaciones, determinamos si las ecuaciones requieren algun cambio de variable para el cual el sistema tenga una solución de estado estacionario. Cuando se resuelve el problema del cambio de variable, sustituimos cada una de las nuevas variables por una constante que debemos determinar en estado estacionario. Así, obtenemos un sistema de ecuaciones (estático) no-lineales. Ahora, si encontrar la solución analítica resulta difícil, entonces recurrimos a cualquier método numérico para resolver estos sistemas.

La hipótesis (2) es una característica del problema que no siempre es fácil de verificar. Por lo general lo que se busca es una solución que cumpla con esa característica y posteriormente verificamos que, en efecto, la que hemos encontrado es la única solución posible. Este procedimiento quedará más claro en los ejemplos.

Por último, las restricciones que impone Γ sobre los planes factibles en ocasiones no son verdaderas restricciones para el plan óptimo. Por ejemplo, en el modelo de Long y Plosser, es claro que el plan óptimo de consumo no va a ser igual a cero (por la condición de Inada) como tampoco igual al producto total, pues de lo contrario, se reduciría a cero la producción para todos los períodos posteriores (un argumento similar muestra que la oferta laboral nunca es cero o uno). Sin embargo, en modelos como el modelo básico de crecimiento con inversión irreversible en el cual la inversión no puede ser negativa, las restricciones que impone Γ sí son importantes; supongamos que la economía comienza con un capital suficientemente alto, entonces la dinámica óptima por algunos períodos sería un nivel de inversión igual a cero. Habiendo hecho estas observaciones, vamos introducir algunos de los métodos más relevantes para resolver los siguientes problemas.

A. Programación dinámica

Como mencionamos anteriormente, el ejemplo sobre control óptimo lineal es la base de uno de los métodos más sencillos para resolver computacionalmente algunos problemas de optimización dinámica.

A.1. El caso determinístico

$$
\begin{aligned}
& \max_{\{u_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \\
s.a \quad & : \\
x_{t+1} \quad & = \quad Ax_t + Bu_t \\
x_0 \quad & \in \quad X, \text{ dado.}
\end{aligned}
$$

Obsérvese que la dinámica de las variables de estado es lineal. De nuevo, esta restricción es menos fuerte de lo que a primera vista parece. Cuando la dinámica de las variables de estado es no-lineal, en ocasiones es posible, al introducir algunas variables auxiliares de estado o control, sustituir todas las no-linealidades en la función objetivo r. Por ejemplo, en el modelo básico de crecimiento el problema secuencial es:

$$
\begin{aligned}
& \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
s.a \quad & : \\
k_{t+1} \quad & = \quad k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t - c_t.
\end{aligned}
$$

Introduzcamos la variable de inversión $i_t = k_t^{\alpha} - c_t$ (ésta es una nueva variable de control). Entonces el problema se puede escribir en forma equivalente como:

$$
\begin{aligned}
& \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(k_t^{\alpha} - i_t) \\
s.a \quad & : \\
k_{t+1} \quad & = \quad (1-\delta)k_t + i_t
\end{aligned}
$$

que tiene la forma del problema que queremos resolver.

Sea $y_t = (1, x_t, u_t)'$, donde por conveniencia hemos aumentado el número uno como una variable de estado constante. Sea $y^* = (1, x^*, u^*)'$ una solución de estado estacionario del problema anterior (más adelante veremos una forma general de calcular las soluciones de estado estacionario de un problema de optimización dinámica).

Gracias a la propiedad de estabilidad, podemos utilizar el *teorema de Taylor* para aproximar la función $\widetilde{r}(y_t) = \widetilde{r}(x_t, u_t)$ alrededor de y^* por un polinomio de segundo orden:

$$
\widetilde{r}(y_t) \approx \widetilde{r}(y^*) + \nabla\widetilde{r}(y^*)(y_t - y^*) + \frac{1}{2}(y_t - y^*)' H\widetilde{r}(y^*)(y_t - y^*)
$$

donde $\nabla r(y^*)$ es el gradiente de la funcion retorno que definimos como un vector fila y $H\widetilde{r}(y^*)$ es la matriz hessiana de r. De esta forma, cuando $t \to \infty$

la aproximación es cada vez mejor. Sea e el vector columna de dimensión $(n+m+1)\times 1$, con ceros en todas partes excepto en la primera fila donde tiene el número 1. Entonces $e^{'}y_t = y_t^{'}e = 1$ para todo t.

Es fácil mostrar que la función cuadrática:

$$\widetilde{r}(y^*) + \nabla\widetilde{r}(y^*)(y_t - y^*) + \frac{1}{2}(y_t - y^*)^{'} H\widetilde{r}(y^*)(y_t - y^*)$$

se puede escribir como:

$$y^{'}My$$

donde:

$$\begin{aligned} M \quad = \quad & e[\widetilde{r}(y^*) - \nabla\widetilde{r}(y^*)y^* + \frac{1}{2}y^{*'}H\widetilde{r}(y^*)y^*]e^{'} + \\ & \frac{1}{2}[\nabla\widetilde{r}(y^*)^{'}e^{'} - ey^{*'}H\widetilde{r}(y^*) - H\widetilde{r}(y^*)y^*e^{'} + e\nabla\widetilde{r}(y^*)] + \\ & \frac{1}{2}H\widetilde{r}(y^*) \end{aligned}$$

Es decir, hemos logrado aproximar la función objetivo mediante una forma cuadrática. La matriz M es simétrica (si la matriz hessiana lo es) y la podemos seccionar de la siguiente forma:

$$M = \begin{bmatrix} Q & W \\ W^{'} & R \end{bmatrix}.$$

En conclusión, el problema original lo podemos aproximar por un problema que ya sabemos resolver:

$$\begin{aligned} & \max_{\{u_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\begin{bmatrix} 1 & x_t \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} 1 \\ x_t \end{bmatrix} + u_t^{'}Ru_t + 2\begin{bmatrix} 1 & x_t \end{bmatrix} Wu_t \right) \\ s.a \quad & : \\ \begin{bmatrix} 1 \\ x_{t+1} \end{bmatrix} \quad & = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u_t, \\ & x_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

A.2. El caso estocástico

El problema típico que podemos resolver sin dificultades adicionales es de la forma:

$$\begin{aligned} & \max_{\{u_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \qquad \text{(V.1)} \\ s.a \quad & : \\ x_{t+1} \quad & = \quad Ax_t + Bu_t + \varepsilon_{t+1} \\ x_0 \quad & \in \quad X, \text{ dado,} \end{aligned}$$

donde ε_t es un proceso estocástico i.i.d con media cero y matriz de varianza-covarianza Σ. En este caso, la idea es hacer una aproximación de la función retorno, como explicamos anteriormente, y apelar al principio de equivalencia determinística. Es decir, nos olvidamos temporalmente del proceso ε_t, resolvemos el problema determinístico e incorporamos de nuevo el proceso ε_{t+1} en la dinámica de las variables de estado.

Ejemplo 15. (Brock y Mirman se encuentran con Riccati). Brock y Mirman en el caso estocástico, se puede escribir como el problema V.1 si introducimos una variable auxiliar. Sea $x_t = k_t$, $\varepsilon_t = (0, \theta_t)'$ y u_t, un nuevo control tal que $k_{t+1} = u_t$ (i.e., la inversión). De esta manera, el ejemplo de Brock y Mirman en el caso estocástico es equivalente a:

$$\begin{aligned} & \max_{\{u_t\}} E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(z_t x_t^{\alpha} - u_t)\right] \\ s.a \quad & : \\ \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ z_{t+1} \end{bmatrix} \quad & = \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{t+1} \end{bmatrix} \\ x_0 \quad & \in \quad X, \text{ dado.} \end{aligned}$$

Obsérvese que la solución general del problema de control óptimo lineal se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t &= H\widehat{x}_t \\ \widehat{x}_{t+1} &= M\widehat{x}_t + \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

donde $H = -F$ y $M = A - BF$ (ver el ejemplo 3).

B. El método de Lagrange: linearización

En esta sección estudiaremos brevemente uno de los métodos más sencillos e importantes para resolver las condiciones de primer orden que se obtienen utilizando el método de Lagrange. La característica fundamental del método consiste en utilizar el teorema de Taylor, para aproximar las condiciones de primer orden mediante un polinomio de primer grado, y después aplicar algún método para resolver sistemas de ecuaciones lineales en diferencias finitas bajo incertidumbre. Nosotros nos concentraremos en los métodos de Blanchard y Khan [1980][2] y Klein [2000]. Volvamos al método de Lagrange y retomemos las condiciones de primer orden del capítulo (4):

$$\frac{\partial r(x_t^*, z_t, u_t^*)}{\partial x_i} + \beta E_t\left[\lambda_{t+1} \cdot \frac{\partial g_x\left(x_t^*, z_t, u_t^*, \theta_{t+1}\right)}{\partial x_i}\right] - \lambda_{i,t} = 0,\ i = 1, ...n_s$$

$$\frac{\partial r(x_t^*, z_t, u_t^*)}{\partial u_j} + \beta E_t\left[\lambda_{t+1} \cdot \frac{\partial g_x\left(x_t^*, z_t, u_t^*, \theta_{t+1}\right)}{\partial u_j}\right] = 0,\ j = 1, ...m$$

$$x_{t+1}^* = g_x\left(x_t^*, z_t, u_t^*, \theta_{t+1}\right)$$

$$z_{t+1} = g_z\left(z_t, \theta_{t+1}\right),$$

y por ultimo una condición de transversalidad.

Obsérvese que las variables de coestado, los λ_t, son *forward looking*. Es decir, al no conocer su valor inicial, es necesario analizar su comportamiento asintótico para inferir su valor en $t = 0$.

La siguiente hipótesis facilitará la solución del anterior sistema.

Hipótesis 13. *La función g_x es independiente de θ_{t+1} y $E\left[\theta_t\right] = 0$*

Bajo estas hipótesis, las condiciones de primer orden se pueden escribir de forma compacta como:

$$E_t\left[F_1(x_t, z_t, \lambda_{t+1}, \lambda_t, u_t)\right] = 0 \tag{V.2}$$

$$E_t\left[F_2(x_t, z_t, \lambda_{t+1}, u_t)\right] = 0 \tag{V.3}$$

$$F_3(x_t, x_{t+1}, z_t, u_t) = 0 \tag{V.4}$$

$$z_{t+1} - g_z\left(z_t, \theta_{t+1}\right) = 0 \tag{V.5}$$

donde por simplicidad omitimos los asteriscos $(*)$ de las ecuaciones. Supongamos que hemos hecho un cambio de variables adecuado de tal forma que, en las nuevas variables, existe una solución de estado estacionario del sistema determinístico. Es decir, una solución al problema de optimización determinístico que resulta de reemplazar la variable de estado exógena z_t

[2] Vaughan [1970] es un procursor de estos algoritmos.

por una constante.[3] Una vez hecho este cambio de variable, existen por lo menos tres formas comunes de volver a transformar las variables, de tal forma que el estado estacionario sea cero, característica que será conveniente en lo que resta de esta sección. Éstas son, principalmente, diferencias absolutas, diferencias relativas y diferencias logarítmicas. El ejemplo 19 ilustra el procedimiento para el caso de diferencias logarítmicas.

Denotemos por $(\widehat{x}_t, \widehat{z}_t, \widehat{u}_t, \widehat{\lambda}_t)$ las nuevas variables, de tal forma que el sistema lo podemos escribir como:

$$E_t\left[\widehat{F}_1(\widehat{x}_t, \widehat{z}_t, \widehat{\lambda}_{t+1}, \widehat{\lambda}_t, \widehat{u}_t)\right] = 0$$

$$E_t\left[\widehat{F}_2(\widehat{x}_t, \widehat{z}_t, \widehat{\lambda}_{t+1}, \widehat{u}_t)\right] = 0$$

$$\widehat{F}_3(\widehat{x}_t, \widehat{x}_{t+1}, \widehat{z}_t, \widehat{u}_t) = 0$$

$$\widehat{z}_{t+1} - \widehat{g}_z\left(\widehat{z}_t, \theta_{t+1}\right) = 0$$

donde el vector de cero es una solución del sistema.

Ahora, si linealizamos $\widehat{F}_1$, $\widehat{F}_2$, $\widehat{F}_3$ y $\widehat{F}_4$ alrededor del vector de cero obtenemos un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\widehat{F}_1(\widehat{x}_t, \widehat{z}_t, E_t[\widehat{\lambda}_{t+1}], \widehat{\lambda}_t, \widehat{u}_t) = 0 \tag{V.6}$$

$$\widehat{F}_2(\widehat{x}_t, \widehat{z}_t, E_t[\widehat{\lambda}_{t+1}], \widehat{u}_t) = 0 \tag{V.7}$$

$$\widehat{F}_3(\widehat{x}_t, \widehat{x}_{t+1}, \widehat{z}_t, \widehat{u}_t) = 0 \tag{V.8}$$

$$\widehat{z}_{t+1} - \widehat{g}_z\left(\widehat{z}_t, \theta_{t+1}\right) = 0 \tag{V.9}$$

donde, por simplicidad, hemos utilizado la misma notación para la funciones linealizadas. Obviamente este proceso supone que el nuevo sistema lineal es apenas una aproximación al sistema no-lineal original.

Las anteriores ecuaciones, versiones linealizadas de las condiciones de primer orden y del teorema de Benveniste y Scheinkman, recuerdan el problema de control óptimo lineal. Por lo tanto, igual que en el problema de control óptimo lineal, la solución al anterior sistema de ecuaciones linealizado satisface el principio de equivalencia determinística.

Con este marco analítico de fondo, vamos a introducir dos métodos muy comunes para resolver el sistema de ecuaciones lineales V.6, V.7, V.8 y V.9, y que además, en las variables transformadas, satisfagan la condición de transversalidad.

[3] Otra forma equivalente de definir el estado estacionario determinístico es como una solución constante del sistema de ecuaciones V.2, V.3, V.4 y V.5, donde θ_t se toma como una constante dada.

B.1. El método de Blanchard y Kahn

Ahora nuestro objetivo es utilizar la estructura lineal del sistema para eliminar los controles de todas las ecuaciones. Obsérvese que a partir de la ecuación V.7, en principio, es posible despejar los controles en función de las demás variables (recuerde que este sistema de ecuaciones no es más que la versión linealizada de las condiciones de primer orden en el problema funcional). Para ver esto, escribamos la ecuación V.7 como:

$$M_{cc}\widehat{u}_t = M_{cs}\begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{\lambda}_t \end{bmatrix} + M_{ce}\left[\widehat{z}_t\right] + M_{cs0}\begin{bmatrix} \widehat{x}_{t+1} \\ E_t\left[\widehat{\lambda}_{t+1}\right] \end{bmatrix}, \tag{V.10}$$

donde M_{cc}, M_{cs}, M_{ce} y M_{cs0} son matrices con coeficientes reales y

$$\begin{aligned} M_{cs} &= \begin{bmatrix} M_{cs}^x & 0 \end{bmatrix} \\ M_{cs0} &= \begin{bmatrix} 0 & M_{cs0}^{\lambda} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las ecuaciones V.6 y V.8 pueden escribirse conjuntamente como:

$$M_{ss0}\begin{bmatrix} \widehat{x}_{t+1} \\ E_t[\widehat{\lambda}_{t+1}] \end{bmatrix} + M_{ss1}\begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{\lambda}_t \end{bmatrix} = M_{sc1}\widehat{u}_t + M_{se1}\left[\widehat{z}_t\right] \tag{V.11}$$

Suponiendo que M_{cc} es invertible,[4] la ecuación V.10 la podemos utilizar para eliminar $\widehat{u}_t$ de la última ecuación. Un poco de álgebra matricial nos lleva a una ecuación de la forma:

$$\begin{bmatrix} \widehat{x}_{t+1} \\ E_t[\widehat{\lambda}_{t+1}] \end{bmatrix} = W\begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{\lambda}_t \end{bmatrix} + Q\left[\widehat{z}_t\right] = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{\lambda}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_\lambda \end{bmatrix}\left[\widehat{z}_t\right], \tag{V.12}$$

donde W y Q son matrices que dependen de todas las anteriores matrices, que a su vez dependen de las funciones originales del problema.[5] Ésta es la ecuación que resuelven Blanchard y Kahn [1980].

[4]En general, esto es una consecuencia de la concavidad estricta de la función retorno. Para obtener la siguiente ecuación también es necesario suponer que la matriz $M_{ss0} - M_{sc1}M_{cc}^{-1}M_{cs0}$ es invertible.

[5]Más precisamente, definamos:

$$M_{ss0}^* = M_{ss0} - M_{sc1} * (M_{cc})^{-1} * M_{cs0},$$

$$M_{ss1}^* = M_{ss1} - M_{sc1} * (M_{cc})^{-1} * M_{cs}$$
$$M_{se1}^* = M_{se1} + M_{sc1} * (M_{cc})^{-1} * M_{ce}$$

entonces:

$$W = -\left(M_{ss0}^*\right)^{-1} * M_{ss1}^*,$$
$$Q = \left(M_{ss0}^*\right)^{-1} * M_{se1}^*.$$

Recordemos que para el problema secuencial, tanto x_0 como z_0 están dados. Además, z_t es una variable exógena en principio conocida (o por lo menos conocido el proceso estocástico que la genera); luego, en particular, conocemos $\widehat{x}_0$, $\widehat{z}_0$ y en principio la sucesión $\widehat{z}_t$. Así, si conociéramos λ_t, utilizando la ecuación V.12 sería posible generar toda la sucesión de $\widehat{x}_t$ que resuelve nuestro problema. Sin embargo, la determinación de $\widehat{\lambda}_t$ es justamente el mayor inconveniente. Ahora, la idea es utilizar la condición de transversalidad de manera que $\widehat{\lambda}_t$ sea tal que, al generar una sucesión $\widehat{x}_t$ con la ecuación V.12, ésta satisfaga la condición de transversalidad. En particular, vamos a buscar una solución que satisfaga el principio de estabilidad.

Sea μ igual a la matriz diagonal con los valores propios de la matriz W ordenados de menor a mayor en valor absoluto, y P la matriz de vectores propios correspondientes de modo que $\mu = P^{-1}WP$. Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{x}_t \\ \widetilde{\lambda}_t \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{\lambda}_t \end{bmatrix},$$

el anterior sistema dinámico lo podemos escribir como:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{x}_{t+1} \\ E_t[\widetilde{\lambda}_{t+1}] \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \widetilde{x}_t \\ \widetilde{\lambda}_t \end{bmatrix} + P^{-1}Q\widehat{z}_t \tag{V.13}$$

Nuestro problema ahora es resolver la anterior ecuación, pues si logramos hacer esto, la solución en las variables originales se puede reconstruir fácilmente a partir de la relación:

$$\begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{\lambda}_t \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \widetilde{x}_t \\ \widetilde{\lambda}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{x}_t \\ \widetilde{\lambda}_t \end{bmatrix}$$

La ventaja de la ecuación V.13 es que es un sistema de ecuaciones desacopladas y fácil de resolver, siempre y cuando los valores propios asociados a las ecuaciones en $\widetilde{\lambda}_t$ tengan norma mayor a uno. Sea μ_1 la matriz diagonal de valores propios con norma menor o igual a uno y μ_2 la matriz diagonal de valores propios con norma mayor a uno. Para hacer la exposición más sencilla, vamos a imponer la siguiente hipótesis.

Hipótesis 14. *El número de valores propios con norma mayor que uno es igual al número de variables no predeterminadas y el número de valores propios con norma menor que uno es igual al número de variables de estado endógenas (i.e., variables predeterminadas).*

Teniendo en mente esta hipótesis que utilizaremos más adelante, podemos escribir el sistema V.13 de forma equivalente como:

$$\widetilde{x}_{t+1} = \mu_1 \widetilde{x}_t + \Omega_x \widehat{z}_t$$

y

$$E_t \left[\widetilde{\lambda}_{t+1} \right] = \mu_2 \widetilde{\lambda}_t + \Omega_\lambda \widehat{z}_t$$

donde:

$$\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_\lambda \end{bmatrix} = P^{-1} Q = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} Q,$$

μ_1 es una matriz diagonal con todos los valores propios con norma menor que uno y μ_2 es una matriz diagonal con todos los valores propios con norma mayor que uno.

Nuestro objetivo es encontrar una solución estable del problema escogiendo de manera adecuada la sucesión $\widetilde{\lambda}_t$ (o equivalentemente, escogiendo de manera adecuada $\widehat{\lambda}_t$). Así, la condición de transversalidad se cumpliría trivialmente. Para esto, necesitamos alguna hipótesis sobre las variables exógenas. La siguiente hipótesis garantiza que existe una solución estable que satisface la condición de tranversalidad.

Hipótesis 15. *Las variables exógenas $\widehat{z}_{t+i}$ y las matrices Ω_λ y μ_2 son tales que:*

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \mu_2^{-(i+1)} \Omega_\lambda E_t[\widehat{z}_{t+i}] = 0$$

En particular para cada t, la suma infinita $\sum_{i=0}^{\infty} \mu_2^{-(i+1)} \Omega_\lambda E_t[\widehat{z}_{t+i}]$ existe y es finita.

Utilizando esta hipótesis vamos a demostrar el siguiente resultado.

Teorema 8. *(Blanchard y Kahn [1980]). Bajo las hipótesis 14 y 15 existe una única solución (estable) del sistema V.12 y está dada por las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_{cc} \widehat{u}_t &= \widehat{M}_{cs} \begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{\lambda}_t \end{bmatrix} + \widehat{M}_{ce} \left[\widehat{z}_t \right] && \text{(V.14)} \\
\begin{bmatrix} \widehat{x}_{t+1} \\ \widehat{\lambda}_{t+1} \end{bmatrix} &= \widehat{W} \begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{\lambda}_t \end{bmatrix} + \widehat{Q} \widehat{z}_t + \widetilde{R} \widetilde{\lambda}_{t+1} && \text{(V.15)} \\
\widehat{\lambda}_0 &= P_{21} P_{11}^{-1} \widehat{x}_0 + \left(P_{22} - P_{21} P_{11}^{-1} P_{12} \right) \widetilde{\lambda}_0. && \text{(V.16)} \\
\widetilde{\lambda}_t &= -\sum_{i=0}^{\infty} \mu_2^{-(i+1)} \Omega_\lambda E_t[\widehat{z}_{t+i}]. && \text{(V.17)} \\
\widehat{z}_{t+1} &= \widehat{g}_z(\widehat{z}_t, \theta_{t+1}) && \text{(V.18)} \\
& \quad \widehat{x}_0, \ \widehat{z}_0 \text{ dado.}
\end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
\widehat{M}_{cc} &= M_{cc},\ \widehat{M}_{cs} = \left(M_{cs} + M_{cs0}W\right),\ \widehat{M}_{ce} = \left(M_{ce} + M_{cs0}Q\right). \\
\widehat{W} &= \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ P_{21}P_{11}^{-1}W_{11} & P_{21}P_{11}^{-1}W_{12} \end{bmatrix},\ \widehat{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ P_{21}P_{11}^{-1}Q_x \end{bmatrix}, \\
\widetilde{R} &= \begin{bmatrix} 0 \\ P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Cuando no se cumple la hipótesis 14 pueden existir infinitas soluciones o ninguna que sea estable. Si el número de valores propios con norma mayor que uno es menor que el número de multiplicadores entonces existen infinitas soluciones y si el número de valores propios con norma menor que uno es menor que el número de multiplicadores entonces no existe una solución estable (para los detalles ver Blanchard y Kahn [1980]). Finalmente, obsérvese que la única ecuación en donde aparece θ_{t+1} es en la dinámica de la variable de estado exógena.

Demostración. La ecuación V.14 es trivial, basta con sustituir la ecuacion V.12 en la ecuación V.10. La ecuación V.15 requiere un poco más de trabajo. Obsérvese que, por la ecuación V.12:

$$
\widehat{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{\lambda}_t \end{bmatrix} + Q_x \widehat{z}_t \tag{V.19}
$$

y por la definición del cambio de variable:

$$
\begin{aligned}
\widehat{x}_{t+1} &= P_{11}\widetilde{x}_{t+1} + P_{12}\widetilde{\lambda}_{t+1} && \text{(V.20)} \\
\widehat{\lambda}_{t+1} &= P_{21}\widetilde{x}_{t+1} + P_{22}\widetilde{\lambda}_{t+1}. && \text{(V.21)}
\end{aligned}
$$

Despejando $\widetilde{x}_{t+1}$ de la ecuación V.20 y sustituyendo en la ecuación V.21 obtenemos:

$$
\widehat{\lambda}_{t+1} = P_{21}P_{11}^{-1}\widehat{x}_{t+1} + \left(P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}\right)\widetilde{\lambda}_{t+1}. \tag{V.22}
$$

En particular:

$$
\widehat{\lambda}_0 = P_{21}P_{11}^{-1}\widehat{x}_0 + \left(P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}\right)\widetilde{\lambda}_0;
$$

ésta es la ecuación V.16.

Ahora, al sustituir la ecuación V.19 en la ecuación V.22 obtenemos:

$$
\widehat{\lambda}_{t+1} = P_{21}P_{11}^{-1} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{\lambda}_t \end{bmatrix} + P_{21}P_{11}^{-1}Q_x\widehat{z}_t + \left(P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}\right)\widetilde{\lambda}_{t+1}. \tag{V.23}
$$

Las ecuaciones V.19 y V.23 son idénticas a la ecuación V.15. Falta justificar la ecuación V.17.

Para ver esto, utilizamos el sistema de ecuaciones desacopladas. Del sistema V.13 obtenemos:

$$\widetilde{\lambda}_t = \mu_2^{-1} E_t \left[\widetilde{\lambda}_{t+1} \right] - \mu_2^{-1} \Omega_\lambda \widehat{z}_t$$

luego la sucesión $\left\{ \widetilde{\lambda}_t \right\}$ debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\widetilde{\lambda}_t = \mu_2^{-k} E_t \left[\widetilde{\lambda}_{t+k} \right] - \sum_{i=0}^{k-1} \mu_2^{-(i+1)} \Omega_\lambda E_t[\widehat{z}_{t+i}] \tag{V.24}$$

Sea

$$\widetilde{\lambda}_t = - \sum_{i=0}^{\infty} \mu_2^{-(i+1)} \Omega_\lambda E_t[\widehat{z}_{t+i}].$$

Entonces, por la hipótesis 15 $\widetilde{\lambda}_t$ está bien definida, $\lim\limits_{t \to \infty} \widetilde{\lambda}_t = 0$ y es fácil verificar que $\widetilde{\lambda}_t$ satisface la ecuación V.24. En conclusión, las ecuaciones de la proposición 8 definen una solución estable del sistema de ecuaciones V.12. Que ésta es la única solución estable, se concluye de la ecuación V.24 al tomar el límite cuando k tiende a infinito en ambos lados de la ecuación. □

Ejemplo 16. (El caso determinístico general). Supongamos que no hay incertidumbre, luego $\widehat{z}_t$ es una variable deteminística y por lo tanto:

$$\widetilde{\lambda}_t = - \sum_{i=0}^{\infty} \mu_2^{-(i+1)} \Omega_\lambda \widehat{z}_{t+i}.$$

El punto importante de este ejemplo es que el método de Blanchard y Kahn puede utilizarse en presencia de choques exógenos determinísticos de cualquier tipo.

Ejemplo 17. ($\widehat{z}_t$ sigue un proceso autorregresivo estacionario determinístico de orden 1). Supongamos que $\widehat{z}_i = \rho \widehat{z}_{i-1}$, donde ρ es una matriz diagonal que tiene todos los valores propios con norma menor que uno. Éste es una caso particular del ejemplo anterior. En este caso:[6]

$$\widetilde{\lambda}_t = -\mu_2^{-1} \left(I - \mu_2^{-1} \rho \right)^{-1} \left(P_{21}^* Q_x + P_{22}^* Q_\lambda \right) \widehat{z}_t = \widehat{Z} \widehat{z}_t$$

por lo tanto, las ecuaciones que caracterizan la solución se pueden escribir

[6] Para ver esto, escribir la ecuación matricial en términos de cada uno de sus componentes.

como:

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_{cc}\widehat{u}_t &= \widehat{M}_{cs}\begin{bmatrix}\widehat{x}_t\\ \widehat{\lambda}_t\end{bmatrix} + \widehat{M}_{ce}\left[\widehat{z}_t\right] && \text{(V.25)}\\
\begin{bmatrix}\widehat{x}_{t+1}\\ \widehat{\lambda}_{t+1}\end{bmatrix} &= \widehat{W}\begin{bmatrix}\widehat{x}_t\\ \widehat{\lambda}_t\end{bmatrix} + \widehat{Q}\widehat{z}_t + \widehat{R}\widehat{z}_{t+1} && \text{(V.26)}\\
\widehat{\lambda}_0 &= P_{21}P_{11}^{-1}\widehat{x}_0 + \left(P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}\right)\widetilde{\lambda}_0. && \text{(V.27)}\\
\widehat{z}_{t+1} &= \rho\widehat{z}_t && \text{(V.28)}\\
\widetilde{\lambda}_t &= \widehat{Z}\widehat{z}_t && \text{(V.29)}
\end{aligned}$$

donde $\widehat{R} = \widetilde{R}\widehat{Z}$.

Ésta es la solución de King, Plosser y Rebelo [2001].

Las anteriores ecuaciones podemos simplificarlas considerablemente para obtener una solución de la forma (véase ejercicio al final del capítulo):

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_t &= H\begin{bmatrix}\widehat{x}_t\\ \widehat{z}_t\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\widehat{x}_{t+1}\\ \widehat{z}_{t+1}\end{bmatrix} &= M\begin{bmatrix}\widehat{x}_t\\ \widehat{z}_t\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La primera ecuación es la función de política y la segunda es la dinámica óptima de las variables de estado.

Ejemplo 18. (z_t sigue un proceso autorregresivo estacionario estocástico de orden 1). Supongamos que $\widehat{z}_i = \rho\widehat{z}_{i-1} + \varepsilon_t$, ε_t es i.i.d, $E\left[\varepsilon_t\right] = 0$, $\Sigma = E\left[\varepsilon_t^{'}\varepsilon_t\right]$ y ρ es una matriz diagonal con todos los valores propios con norma menor que uno. Entonces, es fácil ver que la solución es idéntica al ejemplo anterior, excepto por la dinámica de la variable de estado exógenas. Esto es:

$$\widehat{u}_t = H\begin{bmatrix}\widehat{x}_t\\ \widehat{z}_t\end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix}\widehat{x}_{t+1}\\ \widehat{z}_{t+1}\end{bmatrix} = M\begin{bmatrix}\widehat{x}_t\\ \widehat{z}_t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \varepsilon_{t+1}\end{bmatrix}$$

donde H y M son las mismas que en el caso determinístico.

Ejemplo 19. Brock y Mirman (estocástico) se encuentran con Lagrange.

$$\max_{\{u_t\}} E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \log(c_t)\right]$$

$$\begin{aligned}
s.a &:\\
k_{t+1} &= z_t k_t^{\alpha} - c_t\\
& \quad k_0,\ \text{dado.}
\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\beta\alpha E_t[\lambda_{t+1} z_t k_t^{\alpha-1}] = \lambda_t$$

$$\frac{1}{c_t} - \beta E_t[\lambda_{t+1}] = 0$$

$$k_{t+1} - z_t k_t^{\alpha} + c_t = 0$$

El estado estacionario:

$$z^* = 1$$

$$k^* = (\beta\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$c^* = (k^*)^{\alpha} - k^*$$

$$\lambda^* = \frac{1}{\beta c^*}$$

Ahora lo que vamos hacer es una transformación de las variables de tal forma que en las nuevas variables el estado estacionario sea cero. Esto nos permitirá utilizar el método de linearización tal como fue expuesto anteriormente. Básicamente, la idea consiste en cambiar cualquier variable x_t por $x^* \exp(\widehat{x}_t)$, donde $\widehat{x}_t$ son las desviaciones logarítmicas de las variables con respecto a su estado estacionario x^*. Haciendo esto obtenemos:

$$\beta\alpha E_t[\lambda^* \exp(\widehat{\lambda}_{t+1}) z^* \exp(\widehat{z}_t) \left(k^* \exp(\widehat{k}_t)\right)^{\alpha-1}] = \lambda^* \exp(\widehat{\lambda}_t)$$

$$\frac{1}{c^* \exp(\widehat{c}_t)} - \beta E[\lambda^* \exp(\widehat{\lambda}_{t+1})] = 0$$

$$k^* \exp(\widehat{k}_{t+1}) - z^* \exp(\widehat{z}_t) \left(k^* \exp(\widehat{k}_t)\right)^{\alpha} + c^* \exp(\widehat{c}_t) = 0.$$

obsérvese que en las nuevas variables el estado estacionario es cero. Antes de hacer la linealización vamos a simplificar un poco. El sistema anterior se puede escribir como:

$$E_t[\exp(\widehat{\lambda}_{t+1} + \widehat{z}_t + (\alpha-1)\widehat{k}_t)] = \exp(\widehat{\lambda}_t)$$

$$\frac{1}{\exp(\widehat{c}_t)} - E[\exp(\widehat{\lambda}_{t+1})] = 0$$

$$k^* \exp(\widehat{k}_{t+1}) - z^* (k^*)^{\alpha} \exp(\widehat{z}_t + \alpha\widehat{k}_t) + c^* \exp(\widehat{c}_t) = 0.$$

Para hacer la linearización utilizamos la aproximación $e^x \approx 1 + x$ y obtenemos:

$$(\alpha - 1)\,\widehat{k}_t + E[\widehat{\lambda}_{t+1}] - \widehat{\lambda}_t = -\widehat{z}_t \tag{V.30}$$

$$-\widehat{c}_t = E[\widehat{\lambda}_{t+1}], \tag{V.31}$$

$$k^*\widehat{k}_{t+1} - (k^*)^{\alpha}\,\alpha\widehat{k}_t = -c^*\widehat{c}_t + (k^*)^{\alpha}\,\widehat{z}_t \tag{V.32}$$

Obsérvese que en las nuevas variables, el estado estacionario es cero para todas las variables. Luego:

$$M_{cc} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}, M_{cs} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{ce} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, M_{cs0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{ss0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k^* & 0 \end{bmatrix}, M_{ss1} = \begin{bmatrix} \alpha - 1 & -1 \\ -\alpha\,(k^*)^{\alpha} & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{sc1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c^* \end{bmatrix}, M_{se1} = \begin{bmatrix} -1 \\ (k^*)^{\alpha} \end{bmatrix}$$

y por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k^* & -c^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_{t+1} \\ E_t\hat{\lambda}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 1 \\ \alpha\,(k^*)^{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{\lambda}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ (k^*)^{\alpha} \end{bmatrix} \hat{z}_t.$$

Es decir:

$$W = \begin{bmatrix} (k^*)^{\alpha-1} + \alpha - 1 & \frac{c^*}{k^*} \\ 1-\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

B.2. El Método de Klein

El método de Klein [2000] es un algoritmo similar al algoritmo de Blanchard y Kahn para resolver modelos lineales con expectativas racionales. Sin embargo, desde un punto de vista técnico, el algoritmo de Klein supera algunas dificultades encontradas en la práctica con el método de Blanchard y Kahn. En particular, en el procedimiento expuesto en la sección anterior es necesario invertir algunas matrices para dejar el sistema lineal en forma reducida. Por ejemplo, es necesario invertir la matriz M^*_{ss0} para poder encontrar la matrices fundamentales W y Q del método de Blanchard y Kahn. No obstante, no es absolutamente necesario invertir esta matriz para encontrar una solución al sistema:

$$M^*_{ss0} \begin{bmatrix} \widehat{x}_{t+1} \\ E_t[\widehat{\lambda}_{t+1}] \end{bmatrix} = -M^*_{ss1} \begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{\lambda}_t \end{bmatrix} + M^*_{se1}\,[\widehat{z}_t]\,.$$

Klein [2000] resuelve este problema utilizando un tipo de descomposición matricial conocido como la *forma* o *descomposición de Schur*[7]. Este método es más general, más fácil de implementar y computacionalmente más eficiente que el método de Blanchard y Kahn. Vamos a exponer una versión

[7]Específicamente, la forma compleja de la descomposición de Schur. Klein también muestra cómo utilizar la forma real y sugiere que ésta es computacionalmente más eficiente que la forma compleja, aunque más difícil de implementar.

simple del método que permite muchas aplicaciones y remitimos al lector al artículo original para el caso más general (Klein [2000]). Específicamente vamos a suponer que las variables de estado exógenas siguen un proceso AR(1) estacionario.

El método de Klein resuelve sistemas de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} AE_t \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ z_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} &= B \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \\ y_t \end{bmatrix} \\ x_{t+1} - E_t\left[x_{t+1}\right] &= \xi_{t+1} \end{aligned}$$

donde x_t son las variables de estado endógenas, z_t son las variables de estado exógenas y ambas constituyen la totalidad de las variables predeterminadas; y_t son todas aquellas variables no predeterminadas (por ejemplo, variables de control u_t y variables de coestado λ_t), ξ_t es un proceso exógeno dado tal que $E_t\left[\xi_{t+1}\right] = 0$, $E_t\left[\xi_{t+1}\xi_{t+1}^{'}\right] = \Xi$ y las matrices A y B son cuadradas. Por simplicidad vamos a suponer que las variables de estado exógenas siguen un proceso AR(1) estable:

$$z_{t+1} = \Lambda z_t + \theta_{t+1},$$

donde Λ es una matriz tal que todos sus valores propios son, en valor absoluto, menores que uno y θ_t son las innovaciones a las variables exógenas z_t que suponemos son independientes e idénticamente distribuidas con media cero y matriz de varianza-covarianza Σ.

Vamos a resaltar únicamente dos aspectos que hacen que este método sea muy útil en la práctica. Primero, obsérvese que permitimos que la solución del sistema sea tal que el pronóstico de un período de las variables de estado endógenas tenga un error. En el método de Blanchard y Kahn este error es idénticamente cero. En este sentido, el método de Klein es una generalización del método de Blanchard y Kahn. Lo segundo es que la matriz A no tiene que ser invertible. Desde el punto de vista práctico ésta es, sin lugar a dudas, la ventaja más importante del método de Klein. En particular, el método de Klein demanda mucho menos trabajo que el método de Blanchard y Kahn. Obsérvese que a partir del sistema linearizado:

$$\widehat{F}_1(\widehat{x}_t, \widehat{z}_t, E_t[\widehat{\lambda}_{t+1}], \widehat{\lambda}_t, \widehat{u}_t) = 0 \tag{V.33}$$

$$\widehat{F}_2(\widehat{x}_t, \widehat{z}_t, E_t[\widehat{\lambda}_{t+1}], \widehat{u}_t) = 0 \tag{V.34}$$

$$\widehat{F}_3(\widehat{x}_t, \widehat{x}_{t+1}, \widehat{z}_t, \widehat{u}_t) = 0 \tag{V.35}$$

$$\widehat{z}_{t+1} - \widehat{g}_z\left(\widehat{z}_t, \theta_{t+1}\right) = 0 \tag{V.36}$$

es muy fácil identificar las matrices A, B y Λ.

El sistema de Blanchard y Kahn es un caso particular.

$$\begin{bmatrix} \widehat{x}_{t+1} \\ E_t[\widehat{\lambda}_{t+1}] \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{\lambda}_t \end{bmatrix} + Q\left[\widehat{z}_t\right] = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{\lambda}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_\lambda \end{bmatrix} \left[\widehat{z}_t\right], \tag{V.37}$$

$$\begin{aligned} A &= I_{ns+ne+ncs} \\ B &= \begin{bmatrix} W_{11} & Q_x & W_{12} \\ 0_{ne\times ns} & \Lambda & 0_{ne\times ncs} \\ W_{21} & Q_\lambda & W_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La solución que estamos buscando tiene la forma:

$$y_t = F \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ z_{t+1} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t+1} \\ \theta_{t+1} \end{bmatrix}$$

En este método, F es el análogo a H, la función de política, excepto que F también arroja la dinámica óptima de las variables de coestado (recuérdese que la variable y puede incluir tanto las variables de control como las variables de coestado). Finalmente, P es el análogo de la matriz de transición M.

Ejemplo 20. (Control Óptimo Lineal, basado en Klein [2000])

Consideremos el problema:

$$\begin{aligned} & \sup E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (x_t' Q x_t + u_t' R u_t + 2x_t' W u_t)\right] \\ s.a &: \\ x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t + \varepsilon_{t+1} \\ & \quad x_0 \text{ dado,} \end{aligned}$$

donde ε_t es un proceso estocástico i.i.d con media cero y matriz de varianza-covarianza Σ.

Utilizando el método de Lagrange, las condiciones de primer orden de este problema las podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & -\beta B' & 0 \\ 0 & \beta A' & 0 \end{bmatrix} E_t \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ u_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B & 0 & A \\ R & 0 & W' \\ -W & I & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} \\ x_{t+1} - E_t\left[x_{t+1}\right] &= \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

Klein ha escrito códigos en Matlab que implementan esta metodología (véase página en internet del libro).

Las siguientes son las hipótesis básicas para aplicar el método de Klein a nuestro caso particular. Primero necesitamos invocar el teorema de Schur (ver Klein [2000]). Denotemos por C el campo de los números complejos.

Definición 3. *Sean A y B matrices complejas de dimensión $k \times k$.*

1. *Decimos que $P : C \to C^{k\times k}$ definida por $P(z) = Az - B$ es regular si existe $z \in C$ tal que $P(z)$ es invertible.*
2. *λ es un valor propio generalizado de las matrices A y B si existe $z \in C^k$, $z \neq 0$ tal que $\lambda Az = Bz$. El conjunto de valores propios generalizados lo denotamos por $\lambda(A, B)$.*

Teorema 9. *(Schur) Sean A y B matrices complejas de dimensión $k \times k$ tal que $P(z) = Az - B$ es regular; luego existen matrices complejas unitarias Q y Z de dimensión $k \times k$ tal que:*[8]

1. *$QAZ = a$ es triangular superior.*
2. *$QBZ = b$ es triangular superior.*
3. *Para cada i, $a_{i,i}$ y $b_{i,i}$ no son ambos cero.*
4. *$\lambda(A, B)$ se puede representar como $\lambda(A, B) = \left\{ \frac{a_{i,i}}{b_{i,i}} : b_{i,i} \neq 0 \right\}$.*
5. *Las parejas $(a_{i,i}, b_{i,i})_{i=1,\ldots k}$ pueden ordenarse de cualquier forma.*

Demostración. Véase Golub y Van Loan [1996] □

Teorema 10. *(Klein) Supongamos que:*

1. *z_t es estacionario.*
2. *$P(z) = Az - B$ es regular.*
3. *ξ_t es un proceso exógeno dado tal que $E_t\left[\xi_{t+1}\right] = 0$ y $E_t\left[\xi_{t+1}\xi_{t+1}^{'}\right] = \Xi$.*
4. *No existe λ, $|\lambda| = 1$ y $P(z) = 0$*
5. *$Z_{1,1}$ es invertible donde $Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$.*

   Entonces existe una solución única al sistema.

[8]Una matriz compleja A es unitaria si su conjugada transpuesta es su inversa. Esto es, si $\overline{A}^{'} = A^{-1}$.

Demostración. Véase Klein [2000]. □

Ahora vamos a explorar un poco las razones por las cuales el método de Klein funciona.[9] Esto es, vamos a construir informalmente la solución al sistema de ecuaciones.

Por el teorema de Schur existen matrices complejas Q y Z unitarias tales que $QAZ = a$ y $QBZ = b$. Definamos la matriz adjunta Z^H de Z como $Z^H = \overline{Z}^{'}$ Sea $w_t = Z^{'} \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \\ y_t \end{bmatrix}$ entonces el sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$aE_t\left[w_{t+1}\right] = b\left[w_t\right]$$

Supongamos que el número de valores propios que en norma son menores que uno es igual al número de variables predeterminadas y que el número de valores propios que en norma son mayores que uno es igual al número de variables no-predeterminadas. Los ordenamos de mayor a menor.

Sea

$$\begin{aligned} a &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \\ Z &= \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ 0 & z_{22} \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_{22}E_t\left[w_{2,t+1}\right] &= b_{22}\left[w_{2,t}\right] \\ &\Rightarrow \\ b_{22}^{-1}a_{22}E_t\left[w_{2,t+1}\right] &= \left[w_{2,t}\right]. \end{aligned}$$

Puesto que los valores propios generalizados $b_{22}^{-1}a_{22}$ son menores que uno, entonces una condición suficiente para la existencia de una solución estable es que $w_{2,t} = 0$. Esto implica:

1. $$z_{12}^{'}\begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} + z_{22}^{'}\left[y_t\right] = 0 \Rightarrow$$

   $$y_t = \pi \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix}.$$

   donde $\pi = -\left(z_{22}^{'}\right)^{-1} z_{12}^{'}$.

[9] Basado en notas de clase de Martín Uribe.

2.

$$\begin{aligned} a_{11}w_{1,t+1} &= b_{11}w_{1,t} \Rightarrow \\ w_{1,t+1} &= a_{11}^{-1}b_{11}\left[w_{1,t}\right] \Rightarrow \\ w_{1,t+1} &= \left(z_{11}^{'} + z_{21}^{'}\pi\right)\left[\begin{array}{c} x_t \\ z_t \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\left[\begin{array}{c} x_{t+1} \\ z_{t+1} \end{array}\right] = \Phi \left[\begin{array}{c} x_t \\ z_t \end{array}\right],$$

donde

$$\Phi = \left(z_{11}^{'} + z_{21}^{'}\pi\right)^{-1} a_{11}^{-1}b_{11}\left(z_{11}^{'} + z_{21}^{'}\pi\right)^{-1}$$

La matriz Φ se puede simplificar utilizando el hecho de que Z es unitaria (véanse ejercicios al final del capítulo). Un poco de álgebra nos lleva a las siguientes expresiones para π y Φ:

$$\begin{aligned} \pi &= z_{21}z_{11}^{-1} \\ \Phi &= z_{11}a_{11}^{-1}b_{11}z_{11}^{-1} \end{aligned}$$

C. Dinámica de transición, impulso respuesta y simulaciones

Una vez se haya calculado la función de política de un problema dinámico se pueden realizar por lo menos tres experimentos de mucho interés: calcular la dinámica de transición, hacer el análisis de impulso respuesta o hacer una simulación estocástica de la solución. Los dos primeros corresponden a experimentos en ausencia de incertidumbre. Sin pérdida de generalidad utilizaremos la misma notación de la secciones anteriores separando las variables de estado en estados endógenos y exógenos; $\widehat{}$ denotará las variables cuyo valor de estado estacionario es cero y supongamos que $\xi_t \equiv 0$.

En términos generales, la solución a estos problemas la podemos expresar en términos de dos funciones: la función de política,

$$\widehat{u}_t = h(\widehat{x}_t, \widehat{z}_t) \tag{V.38}$$

y la función de transición,

$$(\widehat{x}_{t+1}, \widehat{z}_{t+1}) = (g_x\left(\widehat{x}_t, \widehat{z}_t, \widehat{u}_t, \theta_{t+1}\right), g_z\left(\widehat{z}_t, \theta_{t+1}\right)). \tag{V.39}$$

Ahora vamos a definir en forma general estos experimentos.

1. Dinámica de transición: corresponde al caso en que no hay incertidumbre (i.e. $\theta_t = 0$), no hay choques exógenos (i.e. $\widehat{z}_t = 0$) y nos preguntamos por la dinámica óptima cuando las variables de estado comienzan por fuera de su estado estacionario (i.e. $\widehat{x}_t \neq 0$).

2. Impulso respuesta: corresponde al caso en que no hay incertidumbre (i.e. $\theta_t = 0$), las variables de estado comienzan en su estado estacionario (i.e. $\widehat{x}_t = 0$) y nos preguntamos por la dinámica óptima cuando las variables de estado exógenas toman valores diferentes de su estado estacionario (i.e. $\widehat{z}_t \neq 0$).

3. Simulaciones: la idea consiste en generar artificialmente series largas del choque exógeno θ_t y calcular las respectivas series de las variables endógenas. Si repetimos este procedimiento varias veces obtenemos series de cada una de las variables endógenas, lo cual nos permite deducir, aproximadamente, la distribución conjunta de las variables endógenas. Esto es lo que se conoce como simulación de Montecarlo.

D. Ejercicios

D.1. Ejercicios

Ejercicio 25. Demostrar que:

$$\begin{aligned} y_t^t M y_t \widetilde{r}(y^*) &= \nabla\widetilde{r}(y^*)(y_t - y^*) + \\ & \frac{1}{2}(y_t - y^*)' H\widetilde{r}(y^*)(y_t - y^*) \end{aligned}$$

donde M es como se define en la sección 5.1.1.

Ejercicio 26. Encontrar expresiones para las matrices H y M en términos de las matrices $\widehat{W}$, $\widehat{Q}$, $\widehat{R}$, $\widehat{M_{cc}}$, $\widehat{M_{cs}}$, $\widehat{M_{ce}}$, P y $\widehat{Z}$.

Ejercicio 27. Suponiendo que Z es unitaria, demostrar que:

$$\begin{aligned} \pi &= z_{21} z_{11}^{-1} \\ \Phi &= z_{11} a_{11}^{-1} b_{11} z_{11}^{-1} \end{aligned}$$

Ejercicio 28. (Ljungqvist-Sargent [2000]). Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t(-(c_t - b)^2 - \gamma i_t^2) \\ s.a &: \\ c_t + i_t + a_{t+1} &= (1+r)a_t + y_t \\ y_{t+1} &= \rho_1 y_t + \rho_2 y_{t-1} \\ & y_0, y_{-1}, \text{ dados,} \end{aligned}$$

donde c_t, i_t, a_t y y_t son el consumo, la inversión, los activos y el ingreso laboral exógeno; r es la tasa de interés real y $b > 0, \gamma > 0$ y ρ_1, ρ_2 son parámetros que indican que el ingreso laboral es estable.

Escribir el anterior problema como un problema de control óptimo lineal (Ayuda: es necesario introducir una nueva variable de control para sustituir la dinámica del ingreso laboral por dos ecuaciones de primer orden. Obsérvese que el problema ya es lineal y cuadrático, luego no es necesario utilizar ningún tipo de aproximación).[10]

Ejercicio 29. Considere el modelo de Long y Plosser. Sea $\theta = 0{,}6$ y $\alpha = 0{,}4$.

1. Resolver el modelo utilizando el método Riccati.
2. Graficar diferentes dinámicas de transición para ilustrar el teorema de estabilidad.
3. Repetir la segunda parte utilizando las soluciones exactas al modelo.
4. ¿Qué tanto difieren las soluciones exactas de las numéricas?

[10]Para los siguientes parámetros $(\beta, r, b, \gamma, \rho_1, \rho_2) = \left(0{,}95, \frac{1}{0{,}95} - 1, 30, 1, 1{,}2, -0{,}3\right)$, el problema se puede resolver utilizando la ecuación de Riccati.

Bibliografía

[1] Blanchard, O.L. & Khan, Ch. (1980). The solution of linear difference models under rational expectations. *Econometrica*, 48, 5.

[2] Golub, G. & Van Loan, C.F. (1996). *Matrix computations*. The John Hopkins University Press.

[3] Klein , P. (2000). Using the generalized Schur form to solve a multivariate linear rational expectations model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, 1405, 1423.

[4] Marcet, A., & Marimon, R. (1998). Working paper. Universitat Popeu Fabra.

VI

Métodos computacionales: el caso no-lineal

Los métodos anteriores tienen en común que las ecuaciones que caracterizan la solución del problema secuencial son lineales. Esta característica es ciertamente muy importante porque, como vimos, permite implementar por lo menos dos técnicas diferentes para encontrar la solución óptima. La primera, basada en el método de programación dinámica mediante la ecuación de Riccati, y la segunda basada, cuya base es el método de Lagrange utilizando el algoritmo de Blanchard y Kahn [1980] o su pariente próximo, el método de Klein. También vimos que estas ventajas de tipo matemático no vienen sin ningún costo desde el punto de vista económico, pues, como observamos, para cada uno de los dos métodos la función de política del problema estocástico es la misma que la función de política de su equivalente determinístico. Debería de ser claro que, desde el punto de vista económico, esta característica de las soluciones representa una limitación cuando el interés es modelar fenómenos en donde el grado de incertidumbre sobre el futuro es fundamental. Por ejemplo, el motivo precautelativo del ahorro. Igualmente, los métodos lineales pueden ser muy poco confiables a la hora de hacer análisis de bienestar. Varios autores han mostrado que las no-linealidades pueden desempeñar un papel determinante en las comparaciones de bienestar (véase Kim y Kim [2003]).[1]

El principio de equivalencia determinística así como las dificultades para hacer comparaciones de bienestar no son las únicas limitaciones de los métodos anteriormente expuestos. Otra limitación muy importante es el supuesto de interioridad de los planes óptimos y la diferenciabilidad de la función de política en el espacio de estados endógenos. Por ejemplo, supongamos que en un modelo dinámico en donde los agentes se pueden endeudar existe una restricción exógena sobre el nivel de endeudamiento o los agentes están obligados a tener algún colateral (capital físico) como respaldo de sus deudas. En estos modelos, dependiendo del estado y los choques exógenos a la economía, las soluciones óptimas se dan en las “esquinas”, algo muy similar a las soluciones de esquina en los problemas de optimización estática, como en

[1] Spurious welfare reversals in international business cycles. *Journal of International Economics* [2003].

la teoría del consumidor (véase más adelante el modelo básico de crecimiento con inversión irreversible). En estas circunstancias, no podríamos garantizar que la función de polítca es diferenciable en todas partes y pondríamos en duda la validez de los métodos numéricos expuestos hasta el momento (el supuesto de diferenciabilidad de la función de política está implícito cuando hacemos las linealización del sistema dinámico que caracteriza la solución).

Afortunadamente, los métodos de programación dinámica y el método de Lagrange ofrecen otras alternativas un poco más complejas pero que permiten, en principio, resolver de manera aproximada el problema de optimización con el grado de precisión deseado.

El costo que debemos pagar por la utilización de estos métodos es la complejidad y el tiempo cumputacional. Los tres métodos que expondremos contienen la idea fundamental de la gran mayoría de métodos en la literatura. Su característica fundamental es que no recurren a ningún tipo de aproximación lineal o cuadrática de las funciones relevantes (función objetivo y dinámica de transición) del problema de optimización. Comenzaremos por el arquetipo de los métodos numéricos utilizados para resolver problemas de optimización dinámica en tiempo discreto.

Finalmente, pero no menos importante, en este capítulo haremos una introducción a las ideas principales que surgen cuando tenemos varios agentes distintos resolviendo problemas de optimización interrelacionados. Éste es el caso típico de los modelos de equilibrio general dinámico en presencia de agentes heterogéneos. La importancia del tema no es fácil de cuantificar. Los métodos computacionales en la actualidad apenas están comenzando a hacer curso en la literatura económica aplicada constituyéndose en una herramienta fundamental de análisis.

A. Programación dinámica: discretización del espacio de estados

A manera de motivación consideremos el modelo básico de crecimiento con inversión irreversible y función de utilidad instantánea logarítmica. Esto es, el modelo es idéntico al modelo básico de crecimiento pero con la restricción adicional de que la inversión no puede ser negativa. Adicionalmente, supongamos que los choques de productividad siguen un proceso de Markov de orden uno, de S estados (i.e., $z \in \{z_1, ..., z_S\}$) y con matriz de transición P.

El problema secuencial que queremos resolver es:

$$\begin{aligned} & \max E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\log\left(c_t\right)\right] \\ c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t &= z_t k_t^{\alpha} \\ k_{t+1} - (1-\delta)k_t &\geq 0 \\ k_t, c_t &\geq 0 \\ & k_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Puesto que la restricción de no negatividad de la inversión en ocasiones va a darse con igualdad, entonces no resulta inmediato cómo adaptar el método de Lagrange anteriormente expuesto. Conceptualmente, el método de programación dinámica se aplica sin ningún problema en una gran cantidad de situaciones. La dificultad, sin embargo, radica en el problema que se va resolver en cada una de las iteraciones. Más específicamente, en la n-ésima iteración es necesario resolver el siguiente problema de maximización:

$$v_n(k,z) = \max_{0\leq c\leq zk^{\alpha}}\left\{\log(c) + \beta E\left[v_{n-1}(k',z')\right]\right\},$$

donde v_{n-1} es la función calculada en la iteración anterior y $'$ denota la variable del siguiente período. El principal obstáculo radica en que este problema de optimización estático puede tener su solución sólo en las esquinas y, por lo tanto, dificulta el cálculo de la función v_n. Adicionalmente, si el espacio de estados exógenos fuera continuo, el operador de expectativas sería una integral que, como es bien conocido, requiere métodos numéricos computacionalmente intensivos para su cálculo. Este último problema lo hemos mitigado suponiendo desde el comienzo que la variable de estado exógena z sigue un proceso markoviano de S estados. Luego, nos queda por pensar cómo calcular eficientemente el valor máximo en cada iteración. Una alternativa muy potente en problemas en donde el número de estados no es grande, menores o iguales a 2, es discretizar el espacio de estados y restringir las variables de estado a estar en un *grid* que podemos hacer más y más fino. En el caso del problema anterior, supongamos que k sólo puede tomar un número finito de valores Δ en $[k_{\text{mín}}, k_{\text{máx}}]$, $k_i = k_{\text{mín}} + (i-1)\frac{k_{\text{máx}}-k_{\text{mín}}}{\Delta-1}$, $i = 1,...\Delta$, donde $k_{\text{mín}}$ y $k_{\text{máx}}$ deben ser escogidos de tal forma que, dado k_0 y z_0, la sucesión óptima esté contenida en el intervalo $[k_{\text{mín}}, k_{\text{máx}}]$, y $\frac{k_{\text{máx}}-k_{\text{mín}}}{\Delta-1}$ es la distancia entre cada dos estados consecutivos. Obsérvese que cuando $\Delta\rightarrow\infty$ la distancia entre estados converge a cero. Denotamos por $[k_{\text{mín}}, k_{\text{máx}}]_{\Delta}$ el conjunto $\{k_1,...,k_{\Delta}\}$ (e.g., $[k_{\text{mín}}, k_{\text{máx}}]_{\Delta}\equiv\{k_1,...,k_{\Delta}\}$).

Entonces, la idea es aproximar el problema original mediante el siguiente problema:

$$v_{\Delta}(k_i,z_s) = \max_{k'\in\widetilde{\Gamma}(k_i,z_s)}\left\{\log(z_s k_i^{\alpha} - (k'-(1-\delta)k_i)) + \beta E\left[v_{\Delta}(k',z')\right]\right\},$$

donde

$$\widetilde{\Gamma}\left(k,z\right) = \left\{k'\in[k_{\text{mín}}, k_{\text{máx}}] : k'-(1-\delta)k\geq 0 \text{ y } zk^{\alpha}-(k'-(1-\delta)k\geq 0\right\}.$$

Así, es nuestra esperanza que, si v_Δ y h_Δ resuelven la anterior ecuación de Bellman, entonces cuando $\Delta \to \infty$ estas funciones converjan a aquellas que resuelven el problema original. Utilizando la estructura markoviana del proceso exógeno, la anterior ecuación de Bellman es equivalente a:

$$v_\Delta(k_i, z_s) = \max_{k' \in \widetilde{\Gamma}(k_i, z_s)} \left\{ \log(z_s k_i^\alpha - (k' - (1-\delta)k_i)) + \beta \sum_{s'=1}^{S} P_{s,s'} v_\Delta(k', z_{s'}) \right\}.$$

Ahora, en esta última forma, este problema puede ser fácilmente implementado en un computador.

B. El método de Lagrange: aproximación de segundo orden

En esta sección vamos a estudiar una forma de aproximación muy útil y que, comparada con los otros métodos no lineales, es muy fácil de implementar.[2] El tipo de sistemas de ecuaciones que buscamos resolver tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E_t\left[F(y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t, z_{t+1}, z_t)\right] &= 0 \\ z_{t+1} &= \Lambda z_t + \sigma \eta \varepsilon_{t+1} \\ & \quad x_0, z_0 \text{ dados.} \end{aligned} \tag{VI.1}$$

donde ε_{t+1} es i.i.d, de soporte acotado, media cero, matriz de varianza covarianza igual a la identidad; η es una matriz conocida, σ es un parámetro de escala conocido y todas las demás variables tienen el siginificado usual. F tiene $n+m$ componentes y puede ser una función no lineal. Nuestro objetivo es encontrar soluciones del tipo:

$$\begin{aligned} y_t &= \widetilde{h}(x_t, z_t, \sigma) \\ \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ z_{t+1} \end{bmatrix} &= \widetilde{g}(x_t, z_t, \sigma) + \sigma \widetilde{\eta} \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

donde $\widetilde{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta \end{bmatrix}$ y hemos utilizado $\widetilde{h}$ y $\widetilde{g}$ para diferenciar las soluciones de la función de política y de la función de transición hasta ahora utilizadas.

Luego, por definición, para todo (x, z, σ) :

[2] Véase Schmitt-Grohe y Uribe [2004].

$$\begin{aligned} &\widetilde{F}(x,z,\sigma) \equiv \\ &E\left[F\left(\widetilde{h}\left(\widetilde{g}(x,z,\sigma)+\sigma\widetilde{\eta}\varepsilon',\sigma\right),\widetilde{h}(x,z,\sigma),\widetilde{g}(x,z,\sigma)\sigma\widetilde{\eta}\varepsilon',x,z,\sigma\right)\right] \\ &=0 \end{aligned} \tag{VI.2}$$

donde $'$ representa variables el próximo período. En particular, todas la derivadas de $\widetilde{F}$ con relación a cualquiera de sus argumentos (y de cualquier orden) son cero en cualquier punto que se evalúen. Vamos a utilizar este hecho para encontrar aproximaciones de primer y segundo orden a $\widetilde{h}$ y $\widetilde{g}$ que resuelvan aproximadamente el problema VI.1.

Obsérvese que, cuando $\xi_t \equiv 0$, el sistema de ecuaciones que resuelve el método de Klein es un caso muy particular de este problema en el que la función F es lineal.

Ciertamente, el ejemplo más importante para nosotros es el que se deriva directamente de las condiciones de primer orden del método de Lagrange.

Ejemplo 21. Antes de hacer la linearización de las condiciones de primer orden en el método de Lagrange observamos que éstas se pueden escribir de la siguiente forma

$$\begin{gathered} E_t\left[F_1(x_t,z_t,\lambda_{t+1},\lambda_t,u_t)\right]=0 \\ E_t\left[F_2(x_t,z_t,\lambda_{t+1},u_t)\right]=0 \\ F_3(x_t,x_{t+1},z_t,u_t)=0 \\ z_{t+1}-g_z\left(z_t,\theta_{t+1}\right)=0 \end{gathered}$$

en donde hemos utilizado la hipótesis 13. Si g_z se puede escribir como

$g_z\left(z_t,\theta_{t+1}\right)=\Lambda z_t+\sigma\eta\varepsilon_{t+1}$, entonces las condiciones de primer orden del método de Lagrange son un caso particular del problema que queremos resolver (en particular, obsérvese que $y_t=(u_t,\lambda_t)$).

Supongamos que $(y^*,x^*,0)$ es una solución de estado estacionario del sistema determinístico. Puesto que en lo que resta de esta sección todas las variables de estado, endógenas o exógenas, van a desempeñar un papel simétrico, utilizaremos x_t para denotar el vector de todas las variables predeterminadas (x_t,z_t). En particular, denotamos la solución de estado estacionario determinístico como (y^*,x^*). Por lo tanto, se cumple $y^*=\widetilde{h}(x^*)$ y $x^*=\widetilde{g}(x^*)+\sigma\widetilde{\eta}\varepsilon_{t+1}$.

B.1. Aproximación lineal

Vamos a mostrar que existen funciones lineales $\widetilde{h}$ y $\widetilde{g}$ que, al componer con F, resuelven aproximadamente el problema, y que se pueden expresar como un caso particular de:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\widetilde{h}(x,\sigma)\\ \widetilde{g}(x,\sigma)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\widetilde{h}(x^*,0)\\ \widetilde{g}(x^*,0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\widetilde{h}_x(x^*,0)\\ \widetilde{g}_x(x^*,0)\end{bmatrix}[x-x^*]\\ &+\begin{bmatrix}\widetilde{h}_\sigma(x^*,0)\\ \widetilde{g}_\sigma(x^*,0)\end{bmatrix}\sigma\end{aligned}$$

donde, por definición, $\widetilde{h}(x^*,0)=y^*$ y $\widetilde{g}(x^*,0)=x^*$; y $\widetilde{h}_x(x^*,0)$, $\widetilde{h}_\sigma(x^*,0)$, $\widetilde{g}_x(x^*,0)$ y $\widetilde{g}_\sigma(x^*,0)$ son matrices constantes que debemos determinar.

Sustituyendo estas ecuaciones en $\widetilde{F}$ y conociendo que todas sus derivadas son iguales a cero, es fácil identificar $\widetilde{h}_x,\widetilde{h}_\sigma,\widetilde{g}_x,\widetilde{g}_\sigma$ (donde hemos omitido $(x^*,0)$ por simplicidad en la notación). De hecho, se puede demostrar que si la solución al problema original es única, entonces $\widetilde{h}_\sigma=\widetilde{g}_\sigma=0$ y, por lo tanto, la solución lineal al problema es independiente de la varianza del proceso exógeno. Resumimos esta discusión en la siguiente proposición.

Proposición 7. *Existen funciones lineales de la forma anterior que, compuestas con F, aproximan a $\widetilde{F}$. Más aún, éstas se pueden expresar como:*

$$\begin{bmatrix}\widetilde{h}(x,\sigma)\\ \widetilde{g}(x,\sigma)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\widetilde{h}(x^*,0)\\ \widetilde{g}(x^*,0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\widetilde{h}_x(x^*,0)\\ \widetilde{g}_x(x^*,0)\end{bmatrix}[x-x^*]$$

Para determinar $\widetilde{h}_x(x^*,0)$ y $\widetilde{g}_x(x^*,0)$ utilizamos el hecho de que todas las derivadas de $\widetilde{F}$ son iguales a cero (todas las derivadas de F son conocidas en $(x^*,0)$). A manera de ilustración veamos cómo se demuestra que $\widetilde{h}_\sigma(x^*,0)$ y $\widetilde{g}_\sigma(x^*,0)$ son cero. Utilizaremos la siguiente notación: $[F_y]^i_j\equiv\frac{\partial F^i}{\partial y_j}$ y utilizamos una notación similar para las otras funciones, $\widetilde{h}$, $\widetilde{g}$ y $\widetilde{F}$; y las derivadas, con respecto a y', x', x y σ. También utilizaremos la siguiente convención para ciertas sumatorias.[3] $[F_y]^i_\alpha[F_y]^\alpha_j\equiv\sum_{\alpha=1}^{n_y}\frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial F^\alpha}{\partial y_j}$, $[F_y]^i_\alpha[F_x]^\alpha_j\equiv\sum_{\alpha=1}^{n_y}\frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial F^\alpha}{\partial x_j}$ y $[F_y]^i_\alpha[F_x]^\alpha_\beta[F_{x'}]^\beta_j\equiv\sum_{\alpha=1}^{n_y}\sum_{\beta=1}^{n_x}\frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial F^\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial F^\beta}{\partial x'_j}$. La misma convención se aplica para todas las otras posibilidades. Utilizando esta notación se puede demostrar que (véanse ejercicios al final del capítulo):

$$\begin{aligned}\left[\widetilde{F}_\sigma\right]^i &= [F_{y'}]^i_\alpha[h_x]^\alpha_\beta[g_\sigma]^\beta+[F_{y'}]^i_\alpha[h_\sigma]^\alpha+[F_y]^i_\alpha[h_\sigma]^\alpha+[F_{x'}]^i_\beta[g_\sigma]^\alpha\\ &= 0\\ i &= 1,...n\end{aligned}$$

Obsérvese que este sistema de ecuaciones es lineal y homogéneo de grado en uno $h_\sigma(x^*,0)$ y $g_\sigma(x^*,0)$ luego, $h_\sigma(x^*,0)=0$ y $g_\sigma(x^*,0)=0$ son una solución del sistema.

[3] A veces conocida como convención de Einstein.

B.2. Aproximación de segundo orden

La estrategia para la aproximación de segundo orden es similar. De nuevo, la idea es proponer funciones $\widetilde{h}(x,\sigma)$ y $\widetilde{g}(x,\sigma)$ de segundo orden y mostrar que, excepto por una constante, estas funciones son independientes del factor de escala σ.

Vamos a mostrar que existen funciones lineales $\widetilde{h}$ y $\widetilde{g}$ que, al componer con F, resuelven aproximadamente el problema y que se pueden expresar como un caso particular de:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\widetilde{h}(x,\sigma)\\ \widetilde{g}(x,\sigma)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\widetilde{h}(x^*,0)\\ \widetilde{g}(x^*,0)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\widetilde{h}_x(x^*,0)\\ \widetilde{g}_x(x^*,0)\end{bmatrix}[x-x^*]\\ &+ \begin{bmatrix}\widetilde{h}_\sigma(x^*,0)\\ \widetilde{g}_\sigma(x^*,0)\end{bmatrix}\sigma\\ &+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\widetilde{h}_{x\sigma}(x^*,0)+\widetilde{h}_{\sigma x}(x^*,0)\\ \widetilde{g}_{x\sigma}(x^*,0)+\widetilde{g}_{\sigma x}(x^*,0)\end{bmatrix}[x-x^*]\,\sigma\\ &+\frac{1}{2}[x-x^*]'\begin{bmatrix}\widetilde{h}_{xx}(x^*,0)\\ \widetilde{g}_{xx}(x^*,0)\end{bmatrix}[x-x^*]\\ &\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\widetilde{h}_{\sigma\sigma}(x^*,0)\\ \widetilde{g}_{\sigma\sigma}(x^*,0)\end{bmatrix}\sigma^2\end{aligned}$$

donde $\widetilde{h}(x^*,0)=y^*$ y $\widetilde{g}(x^*,0)=x^*$ por definición; y $\widetilde{h}_x(x^*,0)$, $\widetilde{h}_\sigma(x^*,0)$, $\widetilde{g}_x(x^*,0)$, $\widetilde{g}_\sigma(x^*,0)$, $\widetilde{h}_{x\sigma}(x^*,0)$, $\widetilde{h}_{\sigma x}(x^*,0)$, $\widetilde{g}_{x\sigma}(x^*,0)$, $\widetilde{g}_{\sigma x}(x^*,0)$, $\widetilde{h}_{xx}(x^*,0)$, $\widetilde{g}_{xx}(x^*,0)$, $\widetilde{h}_{\sigma\sigma}(x^*,0)$ y $\widetilde{g}_{\sigma\sigma}(x^*,0)$ son matrices constantes que debemos determinar. Un argumento similar al utilizado en el caso lineal permite demostrar que podemos escoger $\widetilde{h}_\sigma(x^*,0)=0$, $\widetilde{g}_\sigma(x^*,0)=0$, $\widetilde{h}_{x\sigma}(x^*,0)=0$, $\widetilde{h}_{\sigma x}(x^*,0)=0$, $\widetilde{g}_{x\sigma}(x^*,0)=0$ y $\widetilde{g}_{\sigma x}(x^*,0)=0$. Resumimos esta discusión en el siguiente teorema, el resultado principal de Schmitt-Grohé y Uribe [2004].

Teorema 11. *Existen funciones de segundo orden que, compuestas con F, aproximan a $\widetilde{F}$. Más aún, éstas se pueden expresar como:*

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\widetilde{h}(x,\sigma)\\ \widetilde{g}(x,\sigma)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\widetilde{h}(x^*,0)\\ \widetilde{g}(x^*,0)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\widetilde{h}_x(x^*,0)\\ \widetilde{g}_x(x^*,0)\end{bmatrix}[x-x^*]\\ &+\frac{1}{2}[x-x^*]'\begin{bmatrix}\widetilde{h}_{xx}(x^*,0)\\ \widetilde{g}_{xx}(x^*,0)\end{bmatrix}[x-x^*]\\ &+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\widetilde{h}_{\sigma\sigma}(x^*,0)\\ \widetilde{g}_{\sigma\sigma}(x^*,0)\end{bmatrix}\sigma^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de segundo orden difiere de la solución en el caso determinístico por una constante, $\frac{1}{2}\widetilde{h}_{\sigma\sigma}(x^*,0)\sigma^2$ para la "función de política" y $\frac{1}{2}\widetilde{g}_{\sigma\sigma}(x^*,0)\sigma^2$ para la "función de transición" de los estados endógenos.

B.3. El método de Lagrange: expectativas parametrizadas

Vamos a ilustrar las ideas principales del método de expectativas parametrizadas por medio de un ejemplo.[4] De nuevo, el modelo básico de crecimiento en el caso estocástico. Recordemos las condiciones de primer orden del método de Lagrange:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \beta E_t \left[u'(c_{t+1}) \left(z_t f'(k_{t+1}) + 1 - \delta \right) \right] \\ k_{t+1} &= z_t f(k_t) + (1-\delta) k_t - c_t \\ \log(z_{t+1}) &= \rho \log(z_t) + \theta_{t+1} \\ & k_0, \theta_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

La idea fundamental es la siguiente. Queremos aproximar el operador de expectativas (i.e., la parte de la derecha de la ecuación de Euler) por una función polinomial con ciertos parámetros que sea lo suficientemente general para aproximar cualquier función "bien" comportada y que al mismo tiempo sea computacionalmente manejable. Obsérvese que la función de política es una función únicamente de los estados. Luego, por la ecuación de Euler, el operador de expectativas, $E_t \left[u'(c_{t+1}) \left(z_t f'(k_{t+1}) + 1 - \delta \right) \right]$, lo podemos escribir como una función de los estados de la economía k_t y z_t.

En ese orden de ideas, lo primero es encontrar un conjunto de parámetros $\widehat{\omega}$ tal que:

$$\psi(k_t, z_t; \widehat{\omega}) \approx E_t \left[u'(c_{t+1}) \left(z_t f'(k_{t+1}) + 1 - \delta \right) \right]$$

donde $\psi(k_t, z_t; \omega)$ es una función que depende únicamente de los parámetros ω y que aproxime bien cualquier función bien comportada. Puesto que $\psi(k_t, z_t; \omega) \geq 0$ entonces un buen candidato es:

$$\psi(k_t, z_t; \omega) \approx \exp\left(P_n(\log(k_t), \log(z_t); \omega) \right)$$

donde P_n es un polinomio de grado n en $\log(k_t)$ y $\log(z_t)$. En particular, vamos a ilustrar el procedimiento con un polinomio de grado 1. Concretamente,

$$P_1(\log(k_t), \log(z_t); \omega) = \log(\omega_1) + \omega_2 \log(k_t) + \omega_3 \log(z_t).$$

Luego el problema fundamental es calcular $\widehat{\omega}$. A continuación exponemos el algoritmo del método de expectativas parametrizadas utilizando regresiones no-lineales (RNL).[5]

1. Sea $\omega^0 = \left(\omega^1, \omega^2, \omega^3 \right)$ un candidato inicial (esta escogencia es, por supuesto, bien importante, una posibilidad es utilizar como valores

[4] Véase Den Haan y Marcet [1990].
[5] Véase Heer y Maussner [2005] para un algoritmo que no utiliza RNL.

iniciales la solución del modelo de Brock y Mirman) y $\{z_t\}_{t=0,....,T}$ una realización lo suficientemente larga (qué tan larga quedará claro más adelante).

2. Calcular la sucesión $\{c_t(\omega^0), k_{t+1}(\omega^0)\}_{t=0,..T}$ consistente con (si es preciso utilizar algun método no lineal para resolver el sistema de ecuaciones):

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \beta\psi(k_t, z_t; \omega^0) \\ k_{t+1} &= z_t f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \end{aligned}$$

3. Definir el operador S tal que:

$$S(\omega) = \arg\min_{\omega'} E_t\left[\left(u'(c_{t+1}(\omega))(z_t f'(k_{t+1}(\omega)) + 1 - \delta) - \psi(k_t, z_t; \omega')\right)^2\right]$$

4. Intuitivamente $\widehat{\omega}$ es un punto fijo del operador S. Debemos ahora aprender a calcular el punto fijo y para eso es necesario que aprendamos a resolver eficientemente el problema de optimización anterior.[6]

5. (Solución al problema de optimización). Obsérvese que el problema de minimización anterior es equivalente a estimar una RNL en donde la variable dependiente es $u'(c_{t+1}(\omega))(z_t f'(k_{t+1}(\omega)) + 1 - \delta)$ y las variables independientes son $\log(k_t)$ y $\log(z_t)$.

   Existen métodos bastante conocidos para realizar esta estimación en forma eficiente.

6. (Cálculo del punto fijo). Para calcular el punto fijo utilizamos el siguiente procedimiento conocido como homotopía. Sea $\lambda \in (0,1]$ un parámetro de velocidad de ajuste y calculemos la sucesión:

$$\omega^{n+1} = (1-\lambda)\omega^n + \lambda S(\omega^n)$$

   Luego, si λ es igual a 1 tenemos una velocidad de ajuste alta que nos recuerda las iteraciones de una contracción, pero corremos el riesgo de que la sucesión no converja. [7] Entonces nuestra esperanza es que $\widehat{\omega} = \lim_{t\to\infty} \omega^n$.

Ésta es la idea fundamental del método de expectativas parametrizadas.

Ahora, vistos los métodos en perspectiva, el lector podrá reflexionar sobre algunas de las ventajas y desventajas que saltan a la vista. El primer método es particularmente útil cuando la dimensionalidad del problema es baja (en términos de la totalidad de variables estado). Teóricamente, este método

[6] Véase Heer y Maussner [2005] para entender la conexión con los modelos de racionalidad limitada o aprendizaje.

[7] Para este caso particular, la secuencia converge para $\lambda = 1$.

es el más general (afirmación que debemos cualificar cuando el objetivo es resolver modelos de equilibrio general en donde, ciertamente, este método resulta más engorroso que sus competidores; véase la última sección de este capítulo) y en particular, es el más fácil de implementar en presencia de soluciones de "esquina" o, cuando sospechamos que la función de política no es diferenciable. El segundo método es bastante fácil de implementar sin importar la dimensionalidad del problema; es mucho más fácil que el primero cuando buscamos resolver problemas de equilibrio general pero no es conveniente en el caso de soluciones de esquina.[8] El tercer método es relativamente fácil de implementar (entre el primero y el segundo), es fácilmente adaptable a problemas de equilibrio general pero puede sufrir del problema de dimensionalidad del primer método.[9]

C. Ejercicios

C.1. Ejercicios

Ejercicio 30. Mostrar que

$$\begin{aligned} \left[\widetilde{F}_{\sigma}\right]^i &= [F_{y'}]^i_{\alpha} [h_x]^{\alpha}_{\beta} [g_{\sigma}]^{\beta} + [F_{y'}]^i_{\alpha} [h_{\sigma}]^{\alpha} + [F_y]^i_{\alpha} [h_{\sigma}]^{\alpha} + [F_{x'}]^i_{\beta} [g_{\sigma}]^{\alpha} \\ &= 0 \\ i &= 1, ...n \end{aligned}$$

donde todas las derivadas están evaluadas en el estado estacionario $(x^*, 0)$.

[8] Independientemete de si podemos escribir las condiciones de primer orden para un problema con soluciones de esquina, una aproximación por funciones diferenciables (cuadráticas) a la solución no es probablemente apropiado.

[9] Con relación a las soluciones de esquina, su adaptibilidad depende del uso adecuado del método de Lagrange. Una vez hecho esto es, en principio, fácil de implementar con funciones no diferenciables. Véase Heer y Maussner [2005] para una aplicación al modelo básico de crecimiento con inversión irreversible.

VII

Problemas no recursivos y agentes heterogéneos

A lo largo del libro, principalmente en los primeros capítulos, hemos resaltado la importancia de la recursividad del problema de optimización para la aplicación de los métodos de solución, en particular para el método de Programación Dinámica. Esto quiere decir, intuitivamente, que el problema que los agentes enfrentan hoy es equivalente al problema que enfrentan en el futuro una vez controlamos por el conjunto de información disponible en los dos períodos. Sin embargo, en muchas situaciones, el problema en cuestión no es un problema recursivo. Un ejemplo importante que estudiaremos en este capítulo es el llamado problema de Ramsey, en el cual, sujeto a que las asignaciones de recursos sean un equilibrio competitivo y que la política de tributación permita financiar el plan de gastos del gobierno, éste debe escoger la política tributaria que mayor bienestar le brinde a la sociedad. Otros ejemplos importantes aparecen en situaciones en donde los agentes están sujetos a restricciones de compatibilidad de incentivos. Por ejemplo, supongamos que un país puede decidir si entrar o no en cesación de pagos. En caso de que lo haga, los inversionistas extranjeros lo castigarán excluyéndolo indefinidamente del mercado de capitales internacional. Decimos que su decisión es compatible en incentivos si el bienestar del país bajo esta decisión es mayor que el bienestar máximo en autarquía. La característica principal de estos problemas es que las restricciones sobre las variables de control dependen de las variables futuras que, a su vez, dependen de las decisiones que se tomen hoy.

De otra parte, en todos los métodos de optimización introducidos así como en los métodos computacionales, hemos supuesto que hay un agente único o planificador central que optimiza. Es decir, hemos desconocido que en muchos problemas de interés realmente tenemos varios agentes que optimizan y las decisiones de unos afectan las decisiones de los otros. Esto puede ocurrir al menos de dos formas que estudiaremos más adelante. En la primera de ellas pueden existir varios problemas de optimización en el que las restricciones de los agentes dependen de variables endógenas y exógenas al problema de todos ellos, que a su vez dependen de las decisiones de los demás pero que son tomadas como dadas en el problema individual de optimización. Una vez los agentes resuelven su problema individual, contingente al valor que estas variables tomen, las variables endógenas se determinan mediante restricciones adicionales de consistencia. Por ejemplo, en el marco de la teoría del equilibrio general, las variables en cuestión se refieren principlamente a los precios de bienes y factores y las restricciones de consistencia se refieren a las condiciones de equilibrio. Sin embargo, excepto por esta atomización del problema, los agentes pueden ser idénticos. En este sentido, el problema no es el de agentes heterogéneos pero sí el de múltiples problemas de optimización atados mediante algunas relaciones de consistencia. En este capítulo haremos una breve incursión a este problema sólo con el ánimo de aislar sus características específicas, que también aparecerán cuando introduzcamos el caso de agentes heterogéneos.

Finalmente, la otra forma importante como pueden resultar varios problemas de optimización es en el caso en que los agentes son heterogéneos. Es decir, consumidores o firmas que tienen preferencias, dotaciones o tecnologías distintas o, por ejemplo, que estén sujetos a choqes exógenos idiosincráticos. Todos los métodos estudiados anteriormente pueden adaptarse para resolver este tipo de problemas, aunque su extensión a este caso no es trivial y por lo general, es computacionalmente compleja. En efecto, el problema de la dimensionalidad del espacio se vuelve casi inmanejable en muchas circunstancias, aun con las capacidades de los computadores modernos. Una vez más, la diferenciación entre soluciones de estado estacionario y soluciones por fuera del estado estacionario son determinantes a la hora de plantear el problema y el método de solución. En este capítulo nos vamos a restringir al caso más sencillo que consiste en encontrar la solución a un problema con agentes heterogéneos en estado estacionario. Esta es en la actualidad una área de investigación muy promisoria en economía, que ha tenido un auge importante gracias al desarrollo de métodos computacionales más eficientes y computadores más rápidos que los de hace unas décadas. A pesar de la importancia del tema, haremos apenas una introducción que prepara y abre los ojos del lector a un universo nuevo de herramientas matemáticas y computacionales útiles para resolver problemas tan diversos como la distribución del ingreso de una economía, los efectos redistributivos de la política fiscal, etc.

A. Problemas No-Recursivos

Las dificultades para resolver los problemas no recursivos con las técnicas desarrolladas a lo largo de este libro no son insuperables. En efecto, en muchos casos relevantes introduciendo nuevas variables de estado es posible, en ocasiones, reducir un problema no recursivo a uno que sí lo es pero en donde tenemos más variables de estado. Una vez más veremos como el concepto de variable de estado desempeña un papel fundamental en la forma correcta de plantear un problema de optimización.

Formalmente, muchos problemas no recursivos pueden escribirse de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
\text{máx}\, E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \right] \qquad\qquad (\text{VII.1}) \\
s.a \quad & : \\
\widetilde{g}_1\left(x_t, u_t, \theta_t\right) + E_t\left[\widetilde{g}_2\left(x_{t+1}, u_{t+1}, \theta_{t+1}\right)\right] \quad & = \quad 0 \\
& \quad\; x_0,\ \theta_0 \text{ dados.}
\end{aligned}$$

Al conjunto de reestricciones al que está sujeto el problema de optimización lo llamamaremos reestricciones de *implementación*. Vamos a mostrar que el problema anterior es equivalente a un problema de la forma:

$$\begin{aligned}
& \text{máx}\, E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \widetilde{r}(x_t, \chi_t, u_t, \mu_t) \right] \\
s.a \quad & : \\
\chi_{t+1} \quad & = \quad \frac{\mu_t}{\beta} \\
\chi_0 \quad & = \quad 0. \\
& \quad\; x_0,\ \theta_0 \text{ dados.}
\end{aligned}$$

donde,

$$\widetilde{r}(x_t, \chi_t, u_t, \mu_t) = r(x_t, u_t) + \left(\chi_t \widetilde{g}_1\left(x_t, u_t\right) + \mu_t \widetilde{g}_2\left(x_t, u_t\right)\right),$$

χ_t es una nueva variable de estado que corresponde al multiplicador de Lagrange de las restricciones de implementación y μ_t es una nueva variable de control.

Para ver esto, escribamos el lagrangiano del problema anterior:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \quad = \quad & E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \right] \\
& + E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} \chi_{t+1} \left(\widetilde{g}_1\left(x_t, u_t, \theta_t\right) + E_t\left[\widetilde{g}_2\left(x_{t+1}, u_{t+1}, \theta_{t+1}\right)\right]\right) \right]
\end{aligned}$$

Si separamos los términos de cada una de las sumatorias, agrupamos y utilizamos la ley de expectativas iteradas,[1] este problema es equivalente a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = {} & E_0\left(r(x_0,u_0)+\mu_0\widetilde{g}_1\left(x_0,u_0,\theta_0\right)\right)+\chi_0 E_{-1}\left[\widetilde{g}_2\left(x_0,u_0,\theta_0\right)\right] \\
& +E_0\left(\beta r(x_1,u_1)+\beta\mu_1\widetilde{g}_1\left(x_1,u_1,\theta_1\right)+\beta\chi_1\widetilde{g}_2\left(x_1,u_1,\theta_1\right)\right) \\
& +E_0\left(\beta^2 r(x_1,u_1)+\beta^2\mu_2\widetilde{g}_1\left(x_2,u_2,\theta_2\right)+\beta^2\chi_2\widetilde{g}_2\left(x_2,u_2,\theta_2\right)\right) \\
& +...
\end{aligned}$$

donde $\chi_{t+1}=\frac{\mu_t}{\beta}$ y $\chi_0=0$.

En conclusión, introduciendo una variable de estado χ y una variable de control μ, hemos reescrito el problema original como un problema recursivo. El significado del valor inicial de la variable de estado χ_0 es muy importante desde el punto de vista económico y marca la diferencia entre los problemas que son consistentes dinámicamente y aquellos que no lo son. Para una discusión detallada del método de contratos recursivos para resolver problemas dinámicos el lector puede consultar Marcet y Marimon [1998].

A.1. El problema de Ramsey

Consideremos el modelo básico de crecimiento pero supongamos ahora que existe un gobierno que tributa al agente representativo mediante impuestos al consumo y que éste los utiliza para finanziar su plan de gastos. Por simplicidad supongamos que el gasto del gobierno es en un bien público del cual el agente deriva directamente utilidad. Formalmente, supongamos que el gobierno tiene un plan de gastos para cada período g_t que debe financiar con impuestos al consumo. Sea τ_t la tasa de tributación al consumo para cada período. Luego, el problema del agente representativo es:

$$\max_{\{k_{t+1},c_t\}_{t=0,\dots}} \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t+g_t)$$

sujeto a,

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &= (1-\delta)k_t+i_t, \\
(1+\tau_t)c_t+i_t &= f(k_t), \\
c_t,k_t &\geq 0 \text{ para todo } t, \\
& \quad k_0 \text{ dado.}
\end{aligned}$$

[1] La ley de expectativas iteradas afirma que si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son dos conjuntos de informacíon (i.e., $\sigma-$álgebras sobre un mismo conjunto) y $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}'$, entonces para cualquier variable aleatoria x,

$$E\left[E[x|\mathcal{F}']|\mathcal{F}\right]=E\left[x|\mathcal{F}\right].$$

donde g_t, el gasto en el bien público del gobierno y τ_t, la tasa de tributación del consumo, las toma el agente como dadas. Las condiciones de primer orden de este problema se pueden reducir a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{u_1(c_t+g_t)}{1+\tau_t} &= E_t\left[\beta\frac{u_1(c_{t+1}+g_{t+1})}{1+\tau_{t+1}}(1+f'(k_{t+1})-\delta)\right],\\
k_{t+1} &= (1-\delta)k_t+i_t,\\
(1-\tau_t)c_t+i_t &= f(k_t).
\end{aligned}$$

En principio, si el agente tuviera conocimiento del plan de gasto del gobierno y las tasas de tributación, él podría utilizar este sistema de ecuaciones para determinar su escogencia óptima de consumo, acumulación de capital e inversión. Ahora, por hipótesis, todo el gasto del gobierno en el bien público se financia con la tributación al consumo, luego:

$$g_t = \tau_t c_t$$

Sustituyendo y eliminando la inversión, en las condiciones de primer orden podemos reescribir estas ecuaciones como:

$$\begin{aligned}
\frac{u_1(c_t)}{1+\tau_t} &= E_t\left[\beta\frac{u_1(c_{t+1})}{1+\tau_{t+1}}(1+f'(k_{t+1})-\delta)\right],\\
k_{t+1} &= (1-\delta)k_t+f(k_t)-c_t-g_t
\end{aligned}$$

Luego, si el gobierno escoge una sucesioón de tasas de tributación $\{\tau_t\}_{t=0,1,\ldots}$ el anterior sistema de ecuaciones caracteriza (salvo por la condición de transversalidad) la dinámica óptima (estacionaria) de consumo y capital. La pregunta natural es: ¿existe un plan de tributación tal que el bienestar del agente sea máximo? Este es el llamado problema de Ramsey, que formalmente, podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
& \max_{\{k_{t+1},c_t\}_{t=0,\ldots}} \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t+g_t)\\
k_{t+1} &= (1-\delta)k_t+f(k_t)-c_t-g_t,\\
\frac{u_1(c_t)}{1+\tau_t} &= E_t\left[\beta\frac{u_1(c_{t+1})}{1+\tau_{t+1}}(1+f'(k_{t+1})-\delta)\right],\\
c_t,k_t &\geq 0 \text{ para todo } t,\\
& k_0 \text{ dado.}
\end{aligned}$$

Obsérvese que este problema es idéntico al problema de optimización del modelo básico de crecimiento, excepto por una nueva reestricción. Las reestricciones de implementación son las ecuaciones que caracterizan el *equilibrio* *competitivo* en el modelo básico de crecimiento.[2] En pocas palabras, podemos decir que el problema de Ramsey para esta economía consiste en escoger el plan de tributación que máximiza el bienestar del agente representativo sujeto a que las asignaciones de recursos sean *implementables* como un equilibrio competitivo. Claramente, el problema no tiene la misma forma que el problema secuencial general del Capítulo 3. Éste, sin embargo, es un caso particular del problema VII.1.

B. Múltiples problemas de optimización

Hasta este punto, todos los métodos computacionales que hemos desarrollado resuelven el problema de optimización de un único agente o planificador central. En principio, estos métodos pueden adaptarse para resolver problemas en los que varios agentes optimizan y en los que las decisiones de cada uno de ellos afectan directa o indirectamente las restricciones o función objetivo de los demás agentes. Como observamos en la introducción, éste puede ser el caso, aún cuando los agentes no son estrictamente distintos en ninguna de las características que los definen. Para aclarar este punto, antes de entrar de lleno en el problema de agentes heterogéneos formalmente, vamos a estudiar un ejemplo importante[3] en el que aparecen múltiples problemas de optimización, aunque todos los agentes son idénticos. En términos generales, en los problemas con agentes heterogéneos surgen dos complicaciones: de una parte está el problema de cómo éstos interactúan, y de otra parte, el hecho de ser distintos. Luego, en función de aclarar lo que es fundamental de cada uno de éstos, haremos una exposición tangencial sobre cómo aislar el problema de múltiples optimizaciones del problema estricto de heterogeneidad.[4]

El ejemplo más elemental consiste en el problema que resulta de descentralizar la economía del modelo básico de crecimiento con oferta laboral (el modelo de crecimiento de Long y Plosser, ejemplo 2). Para ver esto modelemos la economía reconociendo explícitamente la existencia de varios agentes, una firma y tres mercados donde intereactúen. La economía tiene la siguiente forma: existe una infinidad de agentes idénticos en preferencias y capital inicial que denotamos por k_0. Sin pérdida de generalidad, supongamos que los indexamos de modo uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Los agentes son dueños del capital y existe una firma que produce el único bien de consumo y que utiliza como factores de producción capital y trabajo. Existen tres mercados centralizados ideales donde los agentes se presentan para demandar el único bien de consumo, ofertar horas de trabajo a la firma y rentarle su capital.

[2] Véase la siguiente sección para la defición formal del equilibrio competitivo.

[3] Éste es el arquetipo de los problemas de equilibrio general dinámico en el cual varios agentes interactúan racionalmente en una economía descentralizada.

[4] Véase Prescott y Mehra [1980] para una introducción formal al primer problema en la teoría del equilibrio general dinámico, y Prescott y Hansen, Recursive methods for computing equilibria of business cycle models, en Cooley, T. [1995]

Sean w y r los precios de los factores de producción en unidades del bien de consumo. Suponemos que el capital se deprecia completamente cada período, que no hay crecimiento en la población y que las preferencias de los agentes y la tecnología son las mismas que en el ejemplo 2. Luego, el problema de cada agente es:

$$\max_{\{(c_t,n_t)\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t(\gamma \log(c_t) + (1-\gamma)\log(1-n_t)) \quad \text{(VII.2)}$$
$$\begin{aligned} s.a &: \\ c_t + k_{t+1} &= r_t k_t + w_t n_t \\ & k_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Donde c_t, k_t y n_t denotan cantidades individuales y r_t y w_t son los precios de los factores que los agentes enfrentan en el mercado centralizado, que son los mismos para todos los agentes.

Por otro lado, la firma resuelve el siguiente problema estático:[5]

$$\max_{K_t,\ N_t \geq 0} K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - r_t K_t - w_t N_t$$

donde K_t, N_t son, respectivamente, la demanda de capital agregado y la demanda de tiempo de trabajo agregado de todos los agentes.[6] Obsérvese que en este problema la firma, además de las reestricciones de no negatividad del capital y el trabajo agregados, no enfrenta ningún otro tipo de restricción. En particular, la firma no tiene en consideración que la demanda total de sus factores debe ser igual a la oferta total. Esta restricción de consistencia agregada es, de hecho, una restricción de equilibrio.

En los problemas de optimización expuestos (un problema para la firma y uno para cada agente), los precios de los factores r_t, w_t se toman como dados. Sin embargo, estos se determinan endógenamente cuando imponemos las restricciones de equilibrio, que es el objeto de la siguiente definición.

Definición 4. *Dado k_0, un equilibrio competitivo simétrico de la economía descrita en esta sección, son sucesiones de asignaciones $\{(c_t, k_{t+1})\}_{t=0,\ldots,}$ una para cada agente y una sucesión de precios de factores $\{(r_t, w_t)\}_{t=0,\ldots,}$ tal que:*

1. *Optimalidad del problema de los agentes: la sucesión de asignaciones $\{(c_t, k_{t+1})\}_{t=0,\ldots,}$ resuelve el problema VII.2 para cada agente, cuando los precios de los factores son $\{(r_t, w_t)\}_{t=0,\ldots,}$.*

[5] Alternativamente, podríamos plantear la economía como una en la cual la firma es dueña del capital, los agentes son dueños de la firma (en proporciones idénticas) y ésta les reparte sus utilidades cada período. En este caso, la firma resuelve un problema dinámico (véanse ejercicios al final del capítulo).

[6] Como los agentes se distribuyen uniformemente en el intervalo $[0,1]$ y la oferta de trabajo está normalizada entre $[0,1]$, entonces el trabajo agregado N_t está en el intervalo $[0,1]$.

2. *Optimalidad del problema de la firma: sea* $K_t = k_t$ *y* $N_t = n_t$ *para todo* $t = 0, ...,$ *entonces la sucesión* $\{(K_t, N_t)\}_{t=0,...,}$ *resuelve el problema de la firma cuando los precios de los factores son* $\{(r_t, w_t)\}_{t=0,...,}$.

3. *La oferta es igual a la demanda en todos los mercados: sea* $C_t = c_t$

$$\begin{aligned} K_t &= k_t \\ N_t &= n_t \\ C_t + K_{t+1} &= K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \end{aligned}$$

La razón por la cual denominamos este equilibrio un equilibrio simétrico es porque en él todos los agentes hacen exactamente lo mismo. Enfocarse en este tipo de equilibrio es bastante natural, dado que los agentes son por hipótesis idénticos en preferencias y dotaciones iniciales de capital.

Como puede observarse, el problema de calcular un equilibrio competitivo (simétrico) consiste en resolver dos problemas de optimización interrelacionados. En el caso que estamos considerando es posible mostrar que el problema es equivalente a resolver el ejemplo 2 y calcular los precios de los factores de producción a partir de las productividades marginales de los factores. Esto es consecuencia de la hipótesis de competencia perfecta, ausencia de otras distorsiones de la economía como externalidades, homogeneidad de los agentes y que nos estamos concentrando en el equilibrio simétrico. Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones no es posible reducir un problema con múltiples agentes a un único problema de optimización. En cualquier caso, todos los métodos desarrollados en este libro pueden extenderse para calcular el equilibrio competitivo definido anteriormente en forma directa sin reducir el problema a uno de un agente representativo.[7]

En lo que resta de este capítulo vamos a ilustrar las ideas básicas de un método de solución basado en una combinación del método de Lagrange y el método de programación dinámica. Como veremos, el ejemplo que vamos a resolver comparte varias características de la economía anterior, pero adicionalmente los agentes son heterogéneos, pues éstos pueden estar en uno de tres estados que determinan todas sus características.

C. Agentes heterogéneos

Supongamos que tenemos una economía con una infinidad de agentes idénticos en preferencias. Sin perdida de generalidad, supongamos que los indexamos de manera uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Cada período los agentes pueden estar en uno de tres estados de la naturaleza $s \in \{f, i, u\}$. El primer estado lo interpretamos como un estado en el que el agente es un empleado

[7] Para una introducción a estos métodos el lector puede consultar Prescott y Hansen, Recursive methods for computing equilibria of business cycle models, en Cooley, T. [1995]).

en el sector formal. El segundo representa un agente empleado en el sector informal y el tercero uno desempleado. La variable de estado sigue un proceso markoviano caracterizado por una matriz de transición que denotamos por $p(\cdot|s)$, donde $p(s'|s)$ es la probabilidad de que, estando en el estado s, el próximo período el agente se encuentre en el estado s'. Dependiendo del estado en el que se encuentre, el agente puede o no realizar ciertas actividades. En particular, el ser empleado formal le permite tener acceso a un activo denominado en unidades del bien de consumo y le obliga a pagar impuestos. Al ser empleado en el sector informal no tiene acceso al activo financiero, no paga impuestos pero recibe subsidios del gobierno en la forma de transferencias de suma fija. Finalmente, si es desempleado, tiene las mismas características de los empleados informales excepto que no tiene ingresos laborales. Asumimos que el único factor de producción son las horas de trabajo. Formalmente, el problema de los agentes es:

$$
\begin{aligned}
& \text{máx}\, E\left[\sum_{t=0}^{\infty} u(c_t, n_t)\right] \\
c_t &= (1+r_t)\,a_t + \left(1-\tau^f\right) s^f w_t n_t - a_{t+1},\ \ a_{t+1} \geq \underline{a}, \\
c_t &= (1+r_t)\,a_t + b_t + s^i w_t n_t - a_{t+1},\ \ a_{t+1} \geq 0, \\
c_t &= (1+r_t)\,a_t + b_t - a_{t+1},\ \ a_{t+1} \geq 0
\end{aligned}
$$

donde la primera reestricción corresponde al caso en que el agente comienza el período en el estado de empleado en el sector formal, la segunda cuando está en el estado de empleado en el sector informal y la tercera cuando está en el estado de desempleado. Las variables s^i y s^f representan constantes que reflejan la productividad de los agentes en cada estado. La variable r_t representa el costo de oportunidad, en términos reales, de la economía; las variables c_t, w_t, n_t, b_t y a_{t+1} son, respectivamente, el consumo del agente (en cada estado), el salario por unidad de productividad (que, en equilibrio, debe ser el mismo en cada estado), las horas dedicadas al trabajo (en cada estado), las transferencias del gobierno (que, por simplicidad las suponemos iguales en ambos estados) y la acumulación de activos. La constante $\underline{a}$ tiene como objeto evitar juegos de Ponzi. Obsérvese que en el estado informal y en el estado de desempleado el agente no puede ahorrar por no tener acceso al activo financiero en ese estado, pero sí desacumular ahorros hechos cuando estaba en el sector formal.[8] Las variables de estado de este problema son el estado exógeno de la economía y la acumulación de activos. Las variables de control son el consumo y las horas de trabajo.

Existe una firma representativa que utiliza capital y trabajo agregado para

[8]La solución de estado estacionario de este problema en realidad muestra que la distribución de activos es tal que éstos son siempre positivos. Es decir, el activo sirve como forma de ahorro y por esta razón las reestricciones de no negatividad de los activos en los estados informal y desempleado (es decir, no tener acceso al endeudamiento), no son relevantes en equilibrio.

producir el único bien de consumo de esta economía. El problema de la firma es:

$$\max_{K_t,\ H_t \geq 0} K_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} - r_t K_t - w_t H_t$$

donde K_t es el capital agregado y H_t es el capital humano agregado de la economía.[9] Obsérvese que la única fuente de incertidumbre de esta economía es el estado exógeno que caracteriza la heterogeneidad de los agentes. Luego la incertidumbre en esta economía es de carácter idiosincrático y no agregado. Esta observación será importante en nuestra definición de equilibrio de estado estacionario.

Por simplicidad, vamos a concentrarnos en la solución de estado estacionario que consiste fundamentalmente en encontrar la distribución de activos de estado estacionario (entre los agentes de la economía). Formalmente, definimos este equilibrio de la siguiente forma.

Definición 5. *Dada una tasa de tributación τ, un equilibrio de estado estacionario es:*

1. *Un conjunto de reglas de decisión individual: $c(s,a)$, $n(s,a)$, $a'(s,a)$ para el consumo, el tiempo de trabajo, los activos el siguiente período y una constante b.*

2. *Una función valor $V(s,a)$.*

3. *Una función de densidad para los activos en cada estado exógeno, $f(s,a)$*

4. *Una constante w que representa el salario por unidad de tiempo y productividad.*

5. *Unas constantes H, K, C y B que representan, respectivamente, el nivel agregado de capital humano, el nivel agregado de capital, el consumo agregado y los impuestos agregados B.*[10]

tal que se cumplen las siguientes condiciones:

1. *Optimalidad de las reglas de decisión.*

   a) *Las reglas de decisión, $c(s,a)$, $n(s,a)$, $a'(s,a)$ y la función valor*

[9] El capital humano individual es el producto entre la productividad y el tiempo de trabajo.

[10] Estas constantes ponen de manifiesto que nos estamos concentrando en el equilibrio de estado estacionario y que no existe riesgo agregado.

$V(s,a)$ satisfacen la ecuación de Bellman:

$$\begin{aligned}
V(s,a) &= \max_{c,n,a'} \{u(c, 1-n) + \beta E\left[V(s',a')\right]\} \\
& s.a \\
c_t &= (1+r_t)\, a_t + \left(1-\tau^f\right) s^f w_t n_t - a_{t+1},\ a_{t+1} \geq \underline{a}, \\
c_t &= (1+r_t)\, a_t + b_t + s^i w_t n_t - a_{t+1},\ a_{t+1} \geq 0, \\
c_t &= (1+r_t)\, a_t + b_t - a_{t+1},\ a_{t+1} \geq 0
\end{aligned}$$

b*) Las firmas maximizan sus beneficios cuando los precios de los factores son w y r y los capitales agregados son K y H, respectivamente.*

2. La demanda agregada y la oferta agregada en los mercados de consumo, trabajo y capital se igualan.

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{s\in\{s_i,s_f\}} \int_{\underline{a}}^{\infty} sn(s,a) f(s,a) da \\
C &= \sum_{s\in\{s_u,s_i,s_f\}} \int_{\underline{a}}^{\infty} c(s,a) f(s,a) da = wH + rK \\
K &= \sum_{s\in\{s_u,s_i,s_f\}} \int_{\underline{a}}^{\infty} a f(s,a) da
\end{aligned}$$

3. La reestricción presupuestal del gobierno se satisface:

$$B = \tau w H = \sum_{s\in\{s_u,s_i\}} \int_{\underline{a}}^{\infty} b f(s,a) da.$$

4. La distribución de los activos es estacionaria:

$$f\left(s',a'\right) = \sum_{s\in\{s_u,s_i,s_f\}} \pi(s' \mid s) f(s,a)$$

C.1. Algoritmo

Los estados de esta economía son el nivel de activos acumulados y el estado exógeno en el cual se encuentra el agente (empleado formal, informal, desempleado). Al ser los activos una variable continua, y dado que el método a utilizar requiere evaluar la ecuación de Bellman, aproximamos la solución discretizando el espacio de estados a través de una malla .

El algoritmo sigue a Heer y Maussner (2006) y se puede resumir en:

1. Construir una malla para discretizar el estado continuo (nivel de activos). Es decir, definir $\mathcal{A} = \{a_1 = a_{min}, a_2, \ldots, a_m = a_{max}\}$. Eso implica especificar un nivel mínimo de activos, un nivel máximo de activos y el número de elementos de la malla m.

2. Definir valores iniciales para el capital (nivel agregado de activos) K_0, el capital humano H_0, el beneficio de desempleo b_0 y la función valor para cada estado laboral v_s (cada $v_s \in \mathbb{R}^m$).

3. Dados los parámetros de la función de utilidad y la función de producción, el nivel de capital inicial K_0 (acumulación agregada de activos), capital humano, beneficio de desempleo y la función valor inicial, iterar la ecuación de Bellman hasta converger a la función valor adecuada. También se obtienen funciones de política para el trabajo, la acumulación de activos y el consumo (véase sección abajo).

4. Dada la función de política para la acumulación de activos, calcular la distribución invariante de activos (véase sección abajo).

5. Una vez obtenida la distribución puede calcularse el nuevo nivel de capital de la economía K_{i+1}^*. Si el nuevo nivel está lejos del utilizado en el paso 2 (con algún criterio de convergencia), se actualiza según una regla de ajuste progresivo $K_{i+1} = \rho K_i + (1-\rho) K_{i+1}^*$ (promedio ponderado entre el nuevo capital y el capital anterior) y se retorna al paso 2, utilizando como función valor inicial la función valor obtenida del paso 3, y recalculando el capital humano (proveniente de la función de política de horas de trabajo obtenida en el paso 3), el salario y la rentabilidad del capital (a partir de las condiciones de primer orden de la firma) y el beneficio de desempleo (obtenido de la reestricción presupuestal del gobierno).

6. Una vez que el nivel de capital converja, termina el procedimiento, obteniéndose la función valor y la distribución invariante para cada estado exógeno (formal, informal, desempleado).

Algoritmo para calcular la función valor

Para hallar la función de política de las horas trabajadas utilizamos una malla para las horas. La alternativa es utilizar la condición de primer orden de las horas, pero ese procedimiento implica la resolución de una ecuación no lineal que puede ser muy demandante en términos computacionales. Además, en el estado de desempleo no hay horas trabajadas. Por tanto, utilizar la condición de primer orden llevaría a tener procedimientos diferentes para hallar la función valor en los estados de empleado y desempleado.

El algoritmo se inícia con los parámetros capital, capital humano, la función valor inicial y la malla de activos (por lo tanto, se tiene el nivel mínimo y máximo de activos). El nivel de capital humano y el capital permiten calcular el salario y la tasa de interés, que son parámetros para la obtención de la función valor.

1. Construir la malla para discretizar las horas trabajadas. Definir $\mathcal{N} = \{n_1 = 0, n_2, \ldots, n_{mn} = 1\}$.

2. Para cada estado del agente $s \in \{f, i, u\}$ y nivel de activos $a \in \mathcal{A}$ en el período presente se calcula, utilizando la restricción presupuestaria, el nivel máximo de activos que podría acumularse en cada estado respectivamente (haciendo el consumo tan cercano a cero como sea posible y trabajando la totalidad del tiempo disponible):
$$\begin{aligned} a^i_{max} &= (1+r)\,a + \left(1-\tau^f\right) s^f w \\ a^i_{max} &= (1+r)\,a + b + s^i w \\ a^i_{max} &= (1+r)\,a + b \end{aligned}$$
Si el nivel máximo $a^i_{max}(s,a)$ es menor que el nivel mínimo de activos utilizado para construir la malla de activos a_{min}, la función valor en ese estado es un número negativo de norma suficientemente grande. Si no es asi, el algoritmo continúa.

3. Dado el estado del agente $s \in \{f, i, u\}$ y el nivel de activos presente $a \in \mathcal{A}$ (para evaluar la función valor en ese punto), para cada posible nivel de activos del período siguiente $a' \in \mathcal{A}$ y para cada posible nivel de horas de trabajo $n \in \mathcal{N}$ se evalúa la ecuación de Bellman, utilizando la función valor inicial, la restricciones de presupuesto y la función de utilidad:
$$v^*_{i+1}(s,a) = \\ u\left(c\left(s,a,a',n\right),n\right) + \beta\left[p_{sf} v_i\left(f,a'\right) + p_{si} v_i\left(i,a'\right) + p_{su} v_i\left(u,a'\right)\right]$$
donde
$$\begin{aligned} c\left(f,a,a',n\right) &= (1+r)\,a + \left(1-\tau^f\right) s^f wn - a' \\ c\left(i,a,a',n\right) &= (1+r)\,a + b + s^i wn \\ c\left(u,a,a',n\right) &= (1+r)\,a + b \end{aligned}$$
y $p_{sf} = p\left(s' = f|s\right)$, $p_{si} = p\left(s' = i|s\right)$, $p_{su} = p\left(s' = u|s\right)$.

4. Se escoge el máximo de la función valor y el nivel de consumo c^*, horas de trabajo n^* y activos a'^* que son utilizados para construir las funciones de política.

5. Se realiza una interpolación lineal de la función valor y se utiliza un algoritmo de optimización para hallar con mayor precisión la acumulación de activos y el consumo. El algoritmo de optimización es de "búsqueda dorada" (véase Heer y Maussner) y permite obtener un valor más confiable de la función valor.

6. Se actualiza la función valor utilizando un promedio ponderado entre la nueva función valor y la función valor inicial $v_{i+1} = \rho_v v_i + (1 - \rho_v) v_{i+1}^*$ (esto para asegurar la convergencia del algoritmo), y se compara esta actualización con la función valor inicial. Si son similares, termina el algoritmo. Si son diferentes, se vuelve al paso 3.

En el paso 3 se hace uso del hecho que la función de política de acumulación de activos y la función de política del consumo son crecientes, y la función de política del trabajo es decreciente para evitar evaluar todos los puntos de la malla en cada iteración.

Algoritmo para calcular la distribución invariante

Este algoritmo inicia con los parámetros, la función valor, la malla de activos, el nivel de activos y el capital humano. Para calcular la distribución invariante utilizamos el algoritmo de iteración sobre la función de densidad. Para una discusión detallada, véase Heer y Maussner (capítulo 5). En particular, el algoritmo utilizado es exactamente el propuesto por Heer y Maussner, página 274:

1. Construir una malla (grid) para discretizar el nivel de activos. Esta malla debe ser más fina que la utilizada para calcular las funciones de política. Es decir, definir $\mathcal{A} = \{a_1 = a_{min}, a_2, \ldots, a_{mf} = a_{max}\}$.

2. Escoger funciones de densidad discretas iniciales $f_0(s, a)$, una para cada estado exógeno.

3. Para cada $a \in \mathcal{A}$, $s \in \{f, i, u\}$ se calcula el nivel de activos óptimo del siguiente período $a_{j-1} \leq a' = a'(s, a) < a_j$ y para cada $a' \in \mathcal{A}$ y $s' \in \{f, i, u\}$ las siguientes sumatorias:

$$f_{i+1}\left(s^j, a_{j-1}\right) = \sum_{s=f,i,u} \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ a_{j-1} \leq a'(s,a) < a_j}} p(s'|s) \frac{a_j - a'}{a_j - a_{j-1}} f_i(s, a)$$

$$f_{i+1}\left(s^j, a_j\right) = \sum_{s=f,i,u} \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ a_{j-1} \leq a'(s,a) < a_j}} p(s'|s) \frac{a' - a_{j-1}}{a_j - a_{j-1}} f_i(s, a)$$

4. Iterar hasta alcanzar la convergencia.

D. Ejercicios

Ejercicio 31. Resolver el problema anterior utilizando como función de utilidad instantánea:

$$u(c,n) = \frac{c^{1-\eta}}{1-\eta} + \gamma_0 \frac{(1-n)^{1-\gamma_1}}{1-\gamma_1}$$

Apéndice

En este apéndice repasamos algunos conceptos de análisis necesarios para la comprensión del libro.[1] Para mayores detalles el lector puede consultar los excelentes libros de Rudin [1976], para las nociones básicas de análisis y espacios métricos; Stokey y Lucas [1989] capítulo 3, para una introducción rápida a la teoría de correspondencias y los espacios de funciones utilizados en programación dinámica; Apostol [1967] para los elementos básicos de álgebra lineal y Apostol [1967] capítulo 13, Stokey y Lucas [1989] capítulo 7, y Shiryaev [1996] capítulo 1 para las ideas fundamentales de teoría de la probabilidad utilizadas en el texto. Este apéndice se concentra en los elementos básicos de análisis y espacios de funciones. Por razones de espacio hemos dejado de lado la introducción de los conceptos necesarios de álgebra lineal y probabilidad para los cuales remitimos al lector a las referecias mencionadas.

A. Nociones básicas de análisis

Partimos de la base de que el lector está familiarizado con el conjunto de los números reales y su orden estándar al nivel de los primeros cursos universitarios de cálculo para ciencias sociales o ingeniería. Denotamos por $\mathbf{R}$ el conjunto de los números reales, por $\mathbf{N}$ el conjunto de los números naturales sin incluir el cero, $\mathbf{N} = \{1, 2, ...,\}$ y por $\leq$ la relación de orden estándar (débil) en $\mathbf{R}$.

A.1. Conjuntos acotados y supremo

Definición 6. *Cota superior y supremo en* $\mathbf{R}$. *Sea* $S \subseteq \mathbf{R}$. *Si existe un elemento* $b \in \mathbf{R}$ *tal que para todo elemento* $x \in S$ *se cumple*

$$x \leq b$$

decimos que b *es una cota superior de* S. *Decimos que* S *está acotado superiormente si existe alguna cota superior de* S. *Si existe un elemento* $m \in \mathbf{R}$ *tal que* m *es una cota superior de* S *y ningún elemento menor que* m *es cota superior de* S *(o equivalentemente, si existe otro elemento* $v \in \mathbf{R}$ *tal que para*

[1] Este apéndice ha sido escrito con la colaboración de Juan David Prada.

todo x, $x \leq v$, entonces $m \leq v$), decimos que m es la mínima cota superior, o supremo, de S. Se denota $m = \sup S$. Si además $m \in S$, entonces decimos que m es el máximo de S en $\mathbf{R}$ y lo denotamos por $m = \text{máx}\, S$.

Ejemplo 22. Sea $S = (a, b)$, entonces b es el supremo de S, pero S no tiene máximo en $\mathbf{R}$. Si $S = (a, b]$, entonces b es el supremo de S y, además, es el máximo de S en $\mathbf{R}$.

Los conceptos de *cota inferior S*, *conjunto acotado inferiormente*, *ínfimo* de S ($\text{ínf}\, S$) y *mínimo* de S ($\text{mín}\, S$) se definen de forma análoga.

Obsérvese que $m = \sup S$ si y sólo si para cada $x \in R$ tal que $x < m$ se tiene que existe un $y \in S$ tal que $x < y \leq m$.

El siguiente es uno de los teoremas fundamentales del análisis. En efecto, la propiedad que se anuncia en el teorema es una de las características que definen de forma unívoca al conjunto de los números reales.

Teorema 12. *Sea $S \subseteq \mathbf{R}$ tal que $S \neq \emptyset$. Si el conjunto S está acotado superiormente, entonces existe un $b \in \mathbf{R}$ tal que $b = \sup S$. Es decir, todo conjunto no vacío de los números reales que esté acotado superiormente tiene un supremo en $\mathbf{R}$.*

La demostración de este teorema está fuera del alcance del libro. El lector puede consultar el libro de Rudin [1976]. Ahora, es fácil ver que el supremo de un subconjunto de números reales, cuando existe, es único.

A.2. Funciones, sucesiones y series

Definición 7. *Funciones. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Una función f de A en B que denotamos por $f : A \to B$, es una regla de asociación de elementos A con elementos de B, de tal forma que a cada elemento $a \in A$ le asocia un único elemento $f(a) \in B$. El conjunto A se denomina el dominio de f y B el codominio. Los elementos de B de la forma $f(a)$ para algún $a \in A$ son los valores de f y el conjunto de todos los valores de f se denomina el rango de f. Si $C \subseteq B$ definimos la preimagen de C por f como el subconjunto $f^{-1}(C)$ de A definido como $f^{-1}(C) = \{a \in A : f(a) \in C\}$.*

Definición 8. *Sucesión. Sea X un conjunto cualquiera. Decimos que una función $x : \mathbf{N} \to X$ que a cada número natural le asigna un elemento $x_n \in X$ es una sucesión en X. Al rango de la sucesión lo denotamos por $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$.*

Definición 9. *Subsucesión. Sean X un conjunto cualquiera, $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión en X y $k : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ una función tal que k es creciente: si $m > n$, entonces $k(m) > k(n)$. Decimos que la función compuesta $s = x \circ k$ que forma una sucesión $s = x \circ k : \mathbf{N} \to X$ tal que $s_n = x_{k(n)}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$.*

Una subsucesión es simplemente una sucesión formada con los elementos de la sucesión original sin cambiar su orden con relación a la sucesión original.

Definición 10. *Límite de una sucesión. Sea $X = \mathbf{R}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en X. Decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es convergente a un punto $x \in R$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que si $n > N$, $|x_n - x| < \varepsilon$. Denotamos esto por $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge o tiende a ∞ $(-\infty)$ si y sólo si para todo $M \in \mathbf{N}$ existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que si $n > N$, $x_n > M$ $(x_n < -M)$. Denotamos esto por $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ $(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty)$.*

Definición 11. *Límite superior e inferior. Sea $X = \mathbf{R}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en X. Sea E el conjunto de todos los números $s \in \mathbf{R}$ (incluidos ∞ y $-\infty$) tales que existe una subsucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Definimos el límite superior $\limsup_{n\to\infty} x_n$, de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ como:*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \sup E$$

De forma análoga, definimos el límite inferior $\liminf_{n\to\infty} x_n$, como

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \inf E$$

Obsérvese que siempre se tiene

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Además,

$$-\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} (-x_n).$$

Más adelante mostraremos que el conjunto E de la definición anterior es siempre no vacío y, por lo tanto, el límite superior e inferior simpre existen (pudiendo ser ∞ o $-\infty$).

Si el límite superior es un número real, $M = \limsup_{n\to\infty} x_n$, entonces éste es el menor número real tal que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que $x_n < M + \varepsilon$ para todo $n > N$. Cualquier número mayor que el límite superior es eventualmente una cota superior de la sucesión y únicamente un número finito de elementos de la sucesión son mayores que $M + \varepsilon$.

Análogamente, si el límite inferior es un número real, $m = \liminf_{n\to\infty} x_n$, entonces m es el mayor número real tal que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que $x_n > m - \varepsilon$ para todo $n > N$. Cualquier número menor que el límite inferior es eventualmente una cota inferior de la sucesión y únicamente un número finito de elementos de la sucesión son menores que $M - \varepsilon$.

Es fácil ver que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe si y sólo si el límite superior e inferior son iguales.

Definición 12. *Series. Sea* $X = \mathbf{R}$ *y* $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *una sucesión en* X *y consideremos la sucesión de sumas parciales:*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_n$$

Definimos el límite superior de la sumatoria de $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *como el* $\limsup_{n\to\infty} S_n$. *La definición del límite inferior de la sumatoria de* $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *es análoga. Decimos que la sumatoria de* $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *existe cuando el límite de la sucesión de sumas parciales* $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *existe. En ese caso escribimos:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

B. Espacios métricos

Definición 13. *Sea* X *un conjunto no vacío. Decimos que una función* $d : X \times X \to \mathbf{R}$ *es una métrica sobre* X *si satisface para todo* x, y *y* z *en* X*:*

1. $d(x,x) = 0$, $d(x,y) \geq 0$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Al par ordenado (X, d), *el conjunto* X *dotado de la métrica* d, *lo llamaremos espacio métrico. Omitiremos la referencia a la métrica* d *cuando ésta sea clara del contexto.*

El espacio métrico más familiar es $X = \mathbf{R}^n$, con la métrica euclideana:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \equiv \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Otro ejemplo importante que discutiremos más adelante es el conjunto de funciones continuas y acotadas con la métrica del supremo.

B.1. Elementos básicos de topología

Definición 14. *Conjunto abierto y cerrado. Sean* X *un espacio métrico,* $x \in X$ *y* $r > 0$. *Definimos la bola abierta con centro en* x *y radio* r *como el conjunto*

$$B(x; r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

Decimos que S es un conjunto abierto en el espacio métrico (X,d) si para todo $x \in S$ existe una bola abierta $B(x;r)$ tal que $B(x;r) \subset S$. Decimos que S es un conjunto cerrado en X si y sólo si $X \backslash S$ es un conjunto abierto en X.

En el caso de $\mathbf{R}$, si $x, y \in \mathbf{R}$ se tiene que los intervalos cerrados $[x,y]$ son conjuntos cerrados, ya que su complemento $\mathbf{R} \backslash [x,y] = (-\infty, x) \cup (y, \infty)$ es un conjunto abierto. Es fácil demostrar que X y $\emptyset$ son conjuntos cerrados y abiertos al mismo tiempo, la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado y la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Utilizando el concepto de métrica, es fácil definir el concepto de conjuntos acotados en espacios métricos.

Definición 15. *Conjuntos acotados. Decimos que un subconjunto S de un espacio métrico X es un conjunto acotado si existe un $x \in X$ y $r \in R$ tal que $B(x;r) \supset S$.*

Definición 16. *Sucesión convergente. Sea X un espacio métrico y $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión. Decimos que la sucesión converge a $x \in X$ si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N \in \mathbf{N}$ tal que para cualquier $n \geq N$ se tiene $x_n \in B(x;\varepsilon)$. En este caso usamos la notación $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ para representar que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge a $x \in X$.*

Definición 17. *Puntos límites. Sea S un subconjunto de un espacio métrico X. Decimos que $x \in X$ es un punto límite de S si toda bola abierta $B(x;r)$ contiene al menos un punto del conjunto S diferente a x. Es decir, si para toda $B(x;r)$; existe $y \in B(x;r) \cap S$, $y \neq x$.*

La demostración de la siguiente afirmación queda como ejercicio para el lector. Sean X un espacio métrico y $S \subseteq X$. Entonces S es un conjunto cerrado si y sólo si todos los puntos límites de S están en S.

B.2. Recubrimientos abiertos y conjuntos compactos

Definición 18. *Recubrimiento abierto. Sean X un espacio métrico y $S \subseteq X$. Una colección de subconjuntos abiertos $\mathcal{A}$ de X es un recubrimiento abierto de S si $S \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$.*

Sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento abierto de S. Decimos que la colección de conjuntos $\mathcal{B}$ es un subrecubrimiento de $\mathcal{A}$ si se tiene que $\mathcal{B}$ recubre a S y además $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Definición 19. *Conjunto compacto. Sean X un espacio métrico y $K \subseteq X$. Si todo recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de K tiene un subrecubrimiento finito, decimos que K es un subconjunto compacto de X.*

Ejemplo 23. Sea $X = \mathbf{R}$, el intervalo abierto $(0,1)$ no es compacto. Considere el recubrimiento $\mathcal{A} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbf{N},\, n > 3\right\}$. No existe un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}$, por lo que $(0,1)$ no es compacto en $\mathbf{R}$. Sin embargo, el intervalo cerrado $[0,1]$ sí es compacto aunque la demostración de este hecho no es del todo trivial.

Teorema 13. *Todo subconjunto del espacio euclideano $\mathbf{R}^n$ de la forma $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ es compacto.*

La demostración del siguiente teorema se deja como ejercicio para el lector.

Teorema 14. *Sea S un subconjunto infinito de un conjunto compacto K, entonces S tiene un punto límite en K.*

Los dos teoremas siguientes son dos resultados fundamental del análisis.

Teorema 15 (Heine-Borel)**.** *Sea $X = \mathbf{R}^n$ espacio métrico con la métrica euclideana. Entonces $K \subseteq \mathbf{R}^n$ es un conjunto compacto en $\mathbf{R}^n$ si y sólo si es un conjunto cerrado y acotado.*

Teorema 16 (Weierstrass)**.** *Todo subconjunto S acotado infinito de $\mathbf{R}^n$ tiene un punto límite en $\mathbf{R}^n$.*

Demostración. Como S es acotado está contenido en un conjunto de la forma $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$. Luego por el teorema 14 S tiene un punto límite en $\mathbf{R}^n$. □

Por el teorema de Weierstrass, es fácil ver que toda sucesión tiene un límite superior e inferior (posiblemente ∞ o $-\infty$): si la sucesión es no acotada es claro que E en la definición 11 es no vacío y, por lo tanto, el límite inferior y superior de la sucesión existe; si la sucesión es acotada, por el teorema de Weierstrass la sucesión tiene un punto límite luego claramente E es no vacío.

Una sucesión converge a $x \in X$ si cualquier bola abierta con centro en x, sin importar lo pequeño que pueda ser su radio ε, deja sólo finitos puntos por fuera. Eso indica que cada vez los elementos de la sucesión son más y más cercanos a x.

Naturalmente, si una sucesión converge, su rango es acotado. Además x es un punto límite de $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$. Esto implica en particular que cualquier sucesión convergente definida en un conjunto cerrado converge a un punto perteneciente al conjunto. Una pregunta natural es, ¿si una sucesión tiene rango acotado y puntos límite en X, entonces converge? La compacidad es el concepto clave para responder a esta pregunta.

Proposición 8. *Sean X espacio métrico y $K \subseteq X$. K es compacto en X si y sólo si para toda sucesión en K existe un subsucesión convergente a un elemento de K.*

B.3. Espacios métricos completos

Definición 20. *Sucesión de Cauchy. Sean X un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión. Decimos que la sucesión es de Cauchy si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N \in \mathbf{N}$ tal que para cualquier $m, n \geq N$ se tiene $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Intuitivamente, los puntos de la sucesión se van acercando entre sí. Sin embargo, no es cierto en general que los puntos de una sucesión de Cauchy siempre converjan a un punto. El converso, sin embargo, sí es cierto.

Teorema 17. *Sean X un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión. Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión converge a $x \in X$, existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualquier $n \geq N$. Entonces por la desigualdad triangular, para cualquier $n, m \geq N$ se tiene

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon$$

y la sucesión es de Cauchy. □

Definición 21. *Espacio métrico completo. Sea X un espacio métrico. Decimos que X es un espacio métrico completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

La siguiente afirmación la dejamos como ejercicio para el lector. Sean X un espacio métrico y $C \subseteq X$ un conjunto cerrado. Entonces el espacio C con la misma métrica de X es un espacio métrico completo.

C. Funciones y correspondencias

Definición 22. *Funciones acotadas. Sean X un conjunto cualquiera, (Y, d) un espacio métrico y $f : X \to Y$ una función. Decimos que la función f es acotada en X si $f(X)$ (el rango de f) es un conjunto acotado en Y bajo la métrica d.*

Definición 23. *Función continua. Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que la función f es continua en el punto $x \in X$ si y sólo si la preimagen de cualquier conjunto abierto que contenga a $f(x)$ en Y es un conjunto abierto en X.*

Naturalmente, esta definición de continuidad es equivalente a la definición tradicional: f es continua en el punto $x \in X$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B(x; \delta)$ se tiene $f(y) \in B(f(x); \varepsilon)$.

En términos de secuencias, la definición de continuidad se puede expresar de la siguiente forma. Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$. Entonces f es continua en el punto $x \in X$ si y sólo si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ que converge a x se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge a $f(x)$.

Otro concepto básico en teoría económica es el concepto de correspondencia. Definimos una correspondencia como función cuyo codominio es un conjunto de subconjuntos de un conjunto dado. Para formalizar esta idea utilizaremos la siguiente notación. Dado un conjunto cualquiera X denotamos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos de X: $\mathcal{P}(X) = \{A \subseteq X\}$.

Definición 24. *Correspondencia. Sea $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$ y $\Phi : X \to \mathcal{P}(Y)$ una función tal que a cada elemento $x \in X$ le asigna un subconjunto no vacío de $\mathcal{P}(Y)$, $\Phi(x) = A \subseteq Y$. Decimos que Φ es una correspondencia de X en Y y la denotamos por $\Phi : X \rightrightarrows Y$.*

Si para cada x se tiene que $\Phi(x)$ es un singleton (un conjunto con un sólo elemento), entonces podemos interpretar de forma natural a Φ como una función de X en Y.

Definición 25. *El grafo de una correspondencia se define como:*

$$G = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \Phi(x)\}$$

y decimos que el grafo es cerrado si para toda sucesión $x_n \in X$, $y_n \in \Phi(x_n)$ tal que $x_n \to x \in X$ y $y_n \to y \in Y$ se tiene que $y \in \Phi(x)$.

En muchas aplicaciones es conveniente tener un concepto de continuidad para correspondencias. Definimos la imagen de un conjunto $S \subset X$ por una correspondencia $\Phi : X \rightrightarrows Y$ como el conjunto $\underset{x\in S}{\cup}\Phi(x) \subset Y$.

Definición 26. *Hemicontinuidad superior. Sea Y un conjunto cerrado. Una correspondencia es hemicontinua superior si y sólo si el grafo es cerrado y la imagen de conjuntos compactos es acotada.*

Definición 27. *Hemicontinuidad inferior. Sea Y compacto, una correspondencia es hemicontinua inferior si para cada sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $x_n \to x \in X$ y para cada $y \in \Phi(x)$ se tiene que existe una sucesión $y_m \to y$ tal que existe $M \in \mathbf{N}$ que satisface que para cada $m \geq M$, $y_m \in \Phi(x_m)$.*

Decimos que la correspondencia es continua si es hemicontinua inferior y hemicontinua superior.

Es fácil ver que si la correspondencia es una función (una correspondencia tal que sus valores son conjuntos singleton) continua (como función), los conceptos de hemicontinua superior y hemicontinua inferior son equivalentes al concepto de continuidad de una función.

En la teoría de optimización es importante el concepto de función convexa (cóncava). Repasamos las definiciones básicas de este tipo de funciones.

Decimos que un conjunto $X \subseteq \mathbf{R}^n$ es *convexo* si para todo $\lambda \in [0,1]$ y para todo $x, y \in X$ se tiene $\lambda x + (1-\lambda) y \in X$. El elemento $\lambda x + (1-\lambda) y$ lo denominamos una combinación convexa de x y y.

Teorema 18. *Función convexa (cóncava). Sean $X \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto convexo y $f : X \to \mathbf{R}$. Decimos que f es una función convexa si y sólo si para todo $\lambda \in [0,1]$ y para todo $x, y \in X$ se tiene*

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Además, la función es estrictamente convexa si y sólo si para todo $\lambda \in (0,1)$ y para todo $x, y \in X$, $x \neq y$ se tiene

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Las definiciones de función cóncava y función estrictamente cóncava son análogas pero con el signo de las desigualdades invertido.

Intuitivamente, una función convexa es aquella que tiene un valor en la combinación convexa de dos puntos menor a la combinación convexa de los valores en los puntos $x, y \in X$. Obsérvese que si f es estrictamente convexa, entonces es convexa. Además, si f es convexa, $-f$ es cóncava.

D. Optimización

Definición 28. *Mínimo local y mínimo global para funciones de valor real. Sean X un espacio métrico y $f : X \to \mathbf{R}$ una función. Decimos que $x^* \in X$ es un minimizador global (y que $f(x^*)$ es el mínimo global de f en X) si se tiene que para todo $x \in X$ es cierto que $f(x^*) \leq f(x)$. Obsérvese que, si existe, el mínimo global es único. Decimos que $x^* \in X$ es un minimizador local (y que $f(x^*)$ es un mínimo local de f en X) si existe un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $x^* \in U$ y para todo $x \in U$ es cierto que $f(x^*) \leq f(x)$.*

Definiciones análogas se tienen para maximizador global, máximo global, maximizador local y máximo local. La importancia del concepto de conjunto compacto la ejemplifica el siguiente teorema.

Teorema 19. *Teorema de valores extremos de Weierstrass. Sean X un espacio métrico, $K \subseteq X$ un conjunto compacto y $f : K \to \mathbf{R}$ una función continua. Entonces existen maximizadores y minimizadores locales de f en K.*

Una de las razones por las que las funciones convexas y cóncavas desempeñan un papel importante en la teoría de la optimización es el siguiente teorema.

Teorema 20. *Sean $X \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto convexo y $f : X \to \mathbf{R}$ una función convexa (cóncava). Si existe un minimizador (maximizador) local $x^* \in X$, entonces x^* es un minimizador (maximizador) global de f en X.*

Demostración. Sea $x^* \in X \subseteq \mathbf{R}^n$ un minimizador local. Entonces existe una bola abierta $B(x^*; r) \subseteq X$ con $r > 0$ tal que para todo $x \in B(x^*; r)$ es cierto que $f(x^*) \leq f(x)$. Suponga ahora que $y^* \in X$ es un minimizador global. En ese caso, $f(y^*) \leq f(x^*)$. Si $y^* \in B(x^*; r)$, se tiene entonces $f(x^*) = f(y^*)$. Así, suponga que $y^* \notin B(x^*; r)$.

Considere $\lambda < \frac{r}{\|x^* - y^*\|}$. Se tiene que $\|(\lambda y^* + (1-\lambda) x^*) - x^*\| < r$ y además $\lambda \in [0,1]$. Por lo tanto, $\lambda y^* + (1-\lambda) x^* \in B(x^*; r)$, y por la convexidad de f se tiene

$$f(x^*) \leq f(\lambda y^* + (1-\lambda) x^*) \leq \lambda f(y^*) + (1-\lambda) f(x^*)$$

de donde $f(x^*) \leq f(y^*)$ y se concluye que $f(x^*) = f(y^*)$.

Para demostrar el teorema en el caso de un maximizador local de una función cóncava, se aplica el mismo argumento a $-f$. $\square$

Los conceptos de correspondencia y hemicontinuidad cumplen un papel fundamental en economía gracias al teorema del máximo. Nos enfocamos en problemas de maximización restringida. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^m$, $X \subseteq \mathbf{R}^n$, $f : X \times U \to \mathbf{R}$ una función objetivo y $\Phi : X \to U$ una correspondencia que representa las restricciones del problema:

$$\sup_{u \in \Phi(x)} f(x, u)$$

Si se tiene que para cada $x \in X$ la función $f(x, u)$ es continua en la variable u y el conjunto $\Phi(x)$ es no vacío y compacto, entonces para cada x el supremo se realiza como un máximo (teorema de valores extremos de Weierstrass). En ese caso podemos definir:

$$v(x) = \max_{u \in \Phi(x)} f(x, u)$$

$$\boldsymbol{u}(x) = \{u \in \Phi(x) : f(x, u) = v(x)\}$$

y se tiene que v es una función bien definida y que $\boldsymbol{u}$ es una correspondencia no vacía. La función v es llamada la *función valor* y $\boldsymbol{u}$ es la "correspondencia de política" asociadas al problema de maximización. Con estas definiciones podemos enunciar el teorema del máximo.

Teorema 21. *Teorema del máximo. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^m$, $X \subseteq \mathbf{R}^n$, $f : X \times U \to \mathbf{R}$ una función continua y $\Phi : X \to U$ una correspondencia continua de valores compactos. Entonces la función $v(x) = \max_{u \in \Phi(x)} f(x, u)$ es continua, y la correspondencia $\boldsymbol{u}(x) = \{u \in \Phi(x) : f(x, u) = v(x)\}$ es no vacía, de valores compactos y hemicontinua superior.*

E. Espacios de funciones

Los espacios de funciones continuas son importantes para múltiples aplicaciones en economía y matemáticas. Lo primero que necesitamos es entender el concepto de convergencia de funciones.

Definición 29. *Convergencia puntual y convergencia uniforme. Sean X un conjunto cualquiera y (Y, d) un espacio métrico. Considere una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tal que $f_n : X \to Y$. Decimos que la sucesión converge puntualmente hacia la función $f : X \to Y$ si para cada $x \in X$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon; x) \in \mathbf{N}$ tal que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ si $n \geq N(\varepsilon; x)$. Si un mismo N sirve para todo punto de X, decimos que la convergencia es uniforme. Así, la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente hacia la función $f : X \to Y$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tal que para cualquier $x \in X$ se tiene $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ si $n \geq N(\varepsilon)$ (N depende sólo de ε).*

El lector puede intentar demostrar el siguiente resultado.

Proposición 9. *Sean X, y Y espacios métricos y $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de funciones continuas tal que $f_n : X \to Y$. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente a la función $f : X \to Y$, entonces f es continua.*

Finalmente, introducimos los espacios de funciones que son fundamentales para la teoría de programación dinámica.

Definición 30. *El espacio de funciones acotadas con la métrica del supremo. Sean X un conjunto cualquiera y (Y, d) un espacio métrico. Definimos el conjunto de funciones acotadas $\mathcal{B}(X, Y)$ de X en Y como:*

$$\mathcal{B}(X, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ es una función acotada}\}.$$

Este conjunto lo podemos dotar de una métrica denominada la métrica del supremo d_∞, definida por:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} \{d(f(x), g(x))\}.$$

El lector puede verificar fácilmente que d_∞ es en efecto una métrica en el conjunto $\mathcal{B}(X, Y)$. El conjunto de las funciones acotadas de X en Y tiene una estructura matemática bastante más rica que la mencionada. En efecto, no es sólo un espacio métrico sino además un espacio vectorial real. Esta estructura está implícita en algunas de las aplicaciones que haremos en el texto de los principales teoremas de esta sección del apéndice.

La siguiente proposición caracteriza la convergencia de sucesiones de funciones en la métrica del supremo. La demostración queda como ejercicio para el lector.

Proposición 10. *Sean X un conjunto cualquiera y (Y, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ en $\mathcal{B}(X, Y)$ converge a f bajo la métrica d_∞ si y sólo si las funciones f_n convergen uniformemente a la función f bajo la métrica d.*

Una propiedad clave del espacio de funciones acotadas es que cuando Y es un espacio métrico completo, éste también es un espacio métrico completo bajo la métrica del supremo.

Proposición 11. *Sean X un conjunto cualquiera y (Y, d) un espacio métrico. Si (Y, d) es espacio métrico completo, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ es completo bajo la métrica del supremo.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(X, Y)$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbf{N}$ tal que para todo $m, n \geq N$ se tiene $d_\infty(f_m, f_n) < \varepsilon$.

Para un $x \in X$ fijo, se tiene que la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ en Y es de Cauchy bajo la métrica d, porque

$$d(f_m(x), f_n(x)) \leq \sup_{x\in X}\{d(f_m(x), f_n(x))\} < \varepsilon \text{ si } m, n \geq N.$$

Como (Y, d) es un espacio métrico completo, entonces la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge, y existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Así, se puede definir la función $f : X \to Y$ como $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Debe verse que esta función f es el límite en $\mathcal{B}(X, Y)$ de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ bajo la métrica d_∞.

Por convergencia en Y, para cada $x \in X$ existe $m(x) \geq N$ tal que

$$d\left(f_{m(x)}(x) - f(x)\right) < \varepsilon.$$

Para cualquier $n \geq N$ se tiene entonces

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d\left(f_n(x), f_{m(x)}(x)\right) + d\left(f_{m(x)}(x), f(x)\right) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

porque $m(x), n > N$ y la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ es de Cauchy. Esto es válido para cualquier $x \in X$ y cualquier $n > N$ (note que N no depende de x) y por lo tanto es válido también para el supremo:

$$d_\infty(f_n(x), f(x)) = \sup_{x\in X}\{d(f_n(x), f(x))\} \leq 2\varepsilon < 3\varepsilon$$

y se tiene que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge a f en la métrica d_∞.

Finalmente comprobamos que $f \in \mathcal{B}(X, Y)$. Para $x, y \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f_N(x), f(x)) + d(f_N(x), f_N(y)) + d(f_N(y), f(y)) \\ &< 4\varepsilon + d(f_N(x), f_N(y)) < \infty \end{aligned}$$

y la función f es acotada, ya que f_N es acotada. □

Para poder aplicar el teorema de punto fijo para contracciones (ver siguiente sección) con el fin de encontrar la solución al problema funcional (capítulo 2), es necesario que el espacio de funciones continuas y acotadas sea un espacio métrico completo con la métrica del supremo. Esto es lo que demostramos a continuación.

Definición 31. *Funciones continuas acotadas. Sean X y Y espacios métricos. Definimos el conjunto de funciones continuas y acotadas como*

$$\mathcal{C}_a = \{f : X \to Y : f \text{ es una función continua y acotada}\}$$

Proposición 12. *Sean X y Y espacios métricos. Si (Y, d) es espacio métrico completo, entonces $\mathcal{C}_a$ es completo bajo la métrica del supremo.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}_a$. Dado que $\mathcal{C}_a \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ se sabe que existe una función $f : X \to Y$ definida como $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ que es el límite en $\mathcal{B}(X, Y)$ de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Falta entonces demostrar que f es continua. Como f es el límite bajo d_∞, se sabe que las funciones f_n convergen uniformemente a f bajo la métrica d. Entonces por el teorema de continuidad bajo convergencia uniforme sabemos que f es continua. Así $f \in \mathcal{C}_a$. □

Corolario 2. *Sean X y Y espacios métricos, $K \subseteq X$ conjunto compacto y (Y, d) un espacio métrico completo. El conjunto*

$$\mathcal{C}(K, Y) = \{f : K \to Y : f \text{ es función continua}\}$$

es completo con la métrica del supremo d_∞.

E.1. Contracciones y el teorema del punto fijo

Finalmente presentamos uno de los teoremas más relevantes para la teoría de programación dinámica: el teorema de punto fijo para contracciones.

Definición 32. *Contracción. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Si existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que para cualquier elementos x, y en X,*

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \alpha d_X(x, y)$$

se dice que f es una contracción.

Una contracción es siempre una función continua (queda como ejercicio para el lector).

Teorema 22. *Teorema de punto fijo para contracciones. Sean X un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una contracción. Entonces existe un único punto fijo de f en X (i.e., existe un único $p \in X$ tal que $f(p) = p$).*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ cualquier elemento de X. Definimos la siguiente sucesión: $y_0 = x_0$, $y_1 = f(x_0)$, $y_2 = f(f(x_0))$ y en general $y_n = f(y_{n-1})$. Se va a mostrar que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es de Cauchy. Se tiene que $d(y_{n+1}, y_n) = d(f(y_n), f(y_{n-1})) \leq \alpha d(y_n, y_{n-1})$ por definición de la sucesión y por ser f contracción. Por inducción resulta que $d(y_{n+1}, y_n) \leq \alpha^n d(y_1, y_0)$.

Para cualquier $m \geq n$ se tiene, por desigualdad triangular: $d(y_m, y_n) \leq d(y_m, y_{m-1}) + \cdots + d(y_{n+1}, y_n) = \sum_{k=n}^{m-1} d(y_{k+1}, y_k)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m-1} d(y_{k+1}, y_k) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k d(y_1, y_0) = \\
d(y_1, y_0) \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k &= \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1-\alpha} d(y_1, y_0) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(y_1, y_0)
\end{aligned}$$

Como $\alpha^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces la desigualdad muestra que la sucesión es de Cauchy. Al ser X un espacio métrico completo, la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge a algún punto $p \in X$. Al ser f continua:

$$f(p) = f\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = p$$

Para probar la unicidad, suponga que $p \in X$ y $\tilde{p} \in X$ son dos puntos fijos de la contracción. Se tiene entonces $d(f(p), f(\tilde{p})) = d(p, \tilde{p})$, pero al ser f contracción también se tiene $d(f(p), f(\tilde{p})) \leq \alpha d(p, \tilde{p})$ con $\alpha \in (0,1)$. Así, $(1-\alpha) d(p, \tilde{p}) \leq 0$, lo cual es cierto si y sólo si $d(p, \tilde{p}) \leq 0$. Así $p = \tilde{p}$. □

Obsérvese que este teorema no solamente asegura la existencia del punto fijo, sino que además nos provee de un método para hallarlo explícitamente: iterar la contracción desde cualquier punto inicial arbitrario $x_0 \in X$ genera una sucesión que converge al único punto fijo. Ésta es la idea para demostrar la existencia de la función valor y la formalización matemática de algunos métodos utilizados para hallarla.

Bibliografía

[1] Apostol, T. (1986). *Calculus.* Volumen II. Editorial Reverté.

[2] Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill.

[3] Shyryaev, A. N. (1996). *Probability.* Segunda edición. Graduate Texts in Mathematics. Springer.

[4] Stokey, N & Lucas, R. (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Harvard.

[5] Cooley, T. (1995). Frontiers of business cycles research. Princeton University Press.

[6] Heer, B. y Maussner, A. (2005). Dynamic general equilibrium modelling: computational methods and applications. Springer.

[7] Prescott, y Mehra, E. R. (1980). Recursive competitive equilibrium: the case of homogeneous agents. Econometrica, 48, (6).