Microeconomía Avanzada: Teoría de Juegos (Examen Final)

Profesor: Alvaro J. Riascos Villegas

14 de mayo de 2013

Los estudiantes de maestría deben responder (únicamente) las primeras cinco preguntas. Los estudiantes de doctorado deben responder la pregunta 5 y 6 y escoger tres de las restantes.

1. (25 puntos). Para cada una de las siguientes preguntas determine si es falsa o verdadera y escriba una corta justificación de su respuesta. La nota depende de qué tan buena sea su justificación.

   a) Todo equilibrio correlacionado es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

   b) Toda evaluación de un juego secuencialmente racional es un equilibrio de Nash.

   c) Considere el modelo estándar de subastas y específicamente la subasta al primer precio con precio de reserva. Por el teorema de equivalencia del ingreso esperado para el subastador, esta subasta genera los mismos ingresos esperados que los formatos estándar.

   d) Suponga que estamos bajos las hipótesis del modelo estándar de subastas. Considere la subasta al tercer precio. Esta es una subasta donde gana el que más oferta pero paga la tercer oferta más alta. Por el teorema de equivalencia del ingreso esperado para el subastador, esta subasta genera el mismo ingreso esperado para el subastador.

   e) En el problema del Rey Salomón, no existe un mecanismo que implementa en un equilibrio de Nash la función de elección social del Rey Salomón pero sí existe un mecanismo que implementa en estrategias dominantes débilmente la función de elección social.

2. (25 puntos). Competencia imperfecta. Supongamos que J firmas identicas compiten en un mercado por un bien homogéneo.

   Vamos a suponer que los costos de las firmas son:

$$c(q^j) = cq^j + F \tag{1}$$

donde $c \geq 0$ y q^j es el nivel de producción de la firma j y F es un costo fijo.

Supongamos que la demanda agregada inversa es lineal y la podemos escribir como:

$$p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} q^j \tag{2}$$

donde a y b son positivos.

Por lo tanto, los beneficios de una firma j son:

$$\Pi^j(q^1, ...q^J) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} q^j\right) q^j - cq^j - F. \tag{3}$$

a) Calcualr el equilibrio (simétrico) de Nash en Competencia a la Cournot.

b) Calcular los beneficios individuales en equilibrio de cada firma y los beneficios agregados.

c) Mostrar que los beneficios agregados de las firmas disminuyen con el número de firmas.

d) Cuál es su intepretación de este fenómeno.

3. (25 puntos) Subastas. Supongamos que $K = 6$ y tenemos 3 agentes participando. Supongamos que las ofertas son:

$$\begin{aligned} b^1 &= (50, 47, 40, 32, 15, 5) \\ b^2 &= (42, 28, 20, 12, 7, 3) \\ b^3 &= (45, 35, 24, 14, 9, 6) \end{aligned}$$

a) Calcular el precio de cierre de la subasta de múltiples uniades cuando este se define como el más alto perdedor.

b) Calcular las unidades ganadas de cada jugador y cuánto debe pagar en cada uno de los tres formatos principales estudiados: discriminatoria, uniforme y Vickrey.

4. (25 puntos). Juegos repetidos. Considere el dilema de los prisioneros repetido una infinidad de veces y suponga que la función de utilidad es $\pi_i = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \pi_i^t$ donde π_i^t es como en la figura.

Demuestre de forma directa (mostrando que no hay incentivos a desviarse) que si los jugadores son suficientemente pacientes (δ cerca a 1) la siguiente estrategia para cada jugador es un equilibrio de Nash: Jugar cooperara (C) en el primer período y después en cualquier período $t + 1$ jugar lo mismo que juegue el adversario en el período t.

Table 8.1: *Prisoner's dilemma*

1 \ 2	D	C
D	$-10, -10$	$0, -12$
C	$-12, 0$	$-1, -1$

5. (25 puntos) Juegos dinámicos I. Considere el juego la figura abajo.

   a) Calcular todos los equilibrios de Nash y los equilibrios perfectos en subjuegos en estrategias puras.

   b) Mostrar que el equilibrio de Nash del numeral anterior (A, b, U) es un equilibrio perfecto Bayesiano débil (Ayuda: Defina un sistema de expectativas tal que (A, b, U) sea secuecialmente racional. Para esto obsérvese que solo es necesario tener cuidado con las expectativas del jugador 3 en su conjunto de información. Ahora, muestre que si el jugador 3 cree estar con una probababilidad suficientemente alta (superior a cierto umbral) en el nodo $\overline{x}$, entonces esta expectativa soporta el equilibrio como un equilibrio perfecto Bayesiano débil. Cuál es este umbral?).

   c) Es este equilibrio perfecto Bayesiano débil del numeral anterior creíble?

   d) Hay algún equilibrio créible?

6. (25 puntos) Juegos dinámicos II. Este ejercicio es una continuación del ejercicio número 5. Considere el juego de la figura abajo y las siguinete sucesión de estrategias de comportamiento para cada jugador.

   El jugador 1, tiene la sucesión de estrategias $\gamma_k^1 = (1 - (1 + \rho)\epsilon_k^1, \epsilon_k^1, \rho\epsilon_k^1)$ donde $k = 1, 2, ...$ y $\rho \in (0, 1)$ y ϵ_k^1 es cualquier sucesión de números reales positivos tal que $\epsilon_k^1 \to 0$.

   El jugador 2, tiene la sucesión de estrategias $\gamma_k^2 = (\epsilon_k^2, 1 - \epsilon_k^2)$ donde $k = 1, 2, ...$ y ϵ_k^2 es cualquier sucesión de números reales positivos tal que $\epsilon_k^2 \to 0$.

   El jugador 3, tiene la sucesión de estrategias $\gamma_k^3 = (1 - \epsilon_k^3, \epsilon_k^3)$ donde $k = 1, 2, ...$ y ϵ_k^3 es cualquier sucesión de números reales positivos tal que $\epsilon_k^3 \to 0$.

   a) Dada una estrategia comportamiento $(\gamma_k^1, \gamma_k^2, \gamma_k^2)$ tiene todos los conjuntos de información de todos los jugadores probabuilidad positiva de ser visitados con estas estrategias de comportamiento?

   b) Mostrar que $(\gamma_k^1, \gamma_k^2, \gamma_k^2) \to (A, b, U)$

c) Usar la regla de Bayes para mostrar que para cada k el único sistema de expectativas consisten con la regla de Bayes es para el jugador 2, $p_2(x) = \frac{1}{1+\rho}$, $p_2(y) = 1 - \frac{1}{1+\rho}$ y para 3, $p_3(\overline{x}) = \epsilon_k^2$, $p_3(\overline{y}) = 1 - \epsilon_k^2$.

d) Muestre que las expectativas del numeral para el jugador 3 convergen a $p_3(\overline{x}) = 0$ y $p_3(\overline{y}) = 1$.

e) Es el resultado del item anterior consistente con las expectativas necesarias que debe tener el jugador 3 para que el equilibrio (A, b, U) sea un equilbrio perfecto Bayesiano débil?

f) Como intepreta usted este ejercicio?

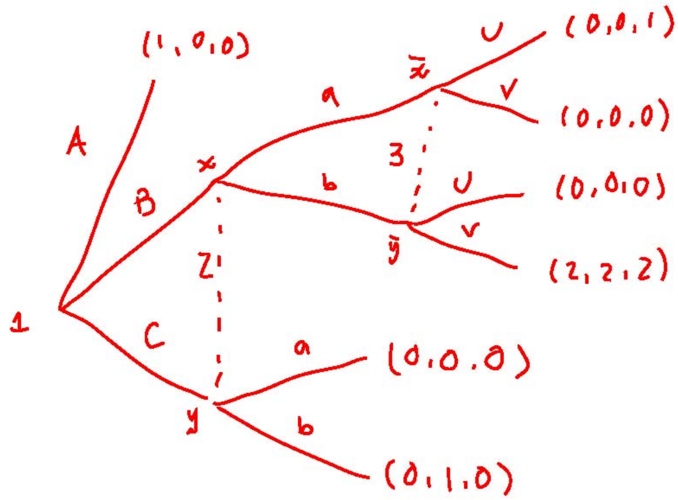

FIGURA H