Juegos de información incompleta*

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes

Marzo de 2016

Índice

1. Introducción **2**

2. Juegos estáticos **2**

3. Soluciones de un juego **5**

4. Juegos dinámicos **12**
4.1. Señalización 15

5. Aplicación: Teoría de subastas **19**
5.1. El modelo básico de subastas 20
5.2. Subasta al segundo precio 21
5.3. Subasta al primer precio 23
5.4. Subastas abiertas y la relación entre los diferentes formatos de subastas 25
5.5. Equivalencia del ingreso esperado para el subastador 25
5.6. Precio reserva 26
5.6.1. Subasta al segundo precio 27
5.6.2. Subasta al primer precio 27
5.6.3. Optimalidad para el subastador 27

6. Aplicación: Diseño de mecanismos **28**
6.1. Elementos básicos 29
6.2. Conceptos de solución 30
6.3. Implementación y el principio de revelación 31

7. Aplicación: Economía de la Información **32**

*Notas de clase basadas en Mas-Colell et.al [1995], Myerson , R. [1990] y Vega - Redondo,F [2003].

1. Introducción

- Existen muchas situaciones económicas en las que las partes tienen información diferente o asimétrica y donde esta información es relevante para los agentes.
- En general los agentes tienen información privada que es valiosa para los demás y tienen creencias sobre la información de los demás.
- Los problemas de información asimétrica son muy difíciles de resolver debido a esta multiplicidad de creencias que los agentes pueden tener sobre las creencias de los demás y viceversa. Esto sugiere la introducción de alguna hipótesis de consistencia entre las creencias o conjeturas de los agentes y su información privada.
- Para convertir un problema de estos en uno más manejable, Harsany introdujo una forma de pensar muy útil sobre este tipo de situaciones. El resultado final es un juego de información incompleta. A diferencia del caso de información asimétrica, cuando la información es incompleta los agentes tienen información privada pero se supone que existe una relación estrecha entre las creencias que todos tienen de la información privada de los demás y la información misma de cada uno. Además, este supuesto de consistencia es conocimiento común.
- En las próximas secciones formalizamos el concepto de juego de información incompleta. Vamos a hacer especial énfasis en juegos estáticos y haremos una breve introducción a los juegos dinámicos de información incompleta, específicamente al caso particular de juegos de señalización.

2. Juegos estáticos

- Un juego de información incompleta BG (o Juego Bayesiano) en forma normal es:
$$BG = \left(I, (A_i)_{i\in I}, (T_i)_{i\in I}, (\pi_i)_{i\in I}, F\right)$$
    - I es un conjunto de jugadores (finito).
    - A_i es un conjunto de acciones para cada jugador.
    - T_i es un conjunto de información para cada jugador.
    - $\pi_i : A \times T \to R$ es la utilidad de cada jugador, $A = \prod_{i\in I} A_i$, $T = \prod_{i\in I} T_i$.
    - F es una distribución de probabilidad sobre T con densidad f.
- La distribución F es el modelo probabilístico del espacio de información de todos los agentes.
- Asumimos que todos los elementos del juego son conocimiento común.

- Esto convierte un problema de información asimétrica en uno de información incompleta.
- Las tres últimas observaciones son la propuesta original de Harsany.
- La pregunta sobre si todo juego en el cual los jugadores tienen incertumbre sobre el conocimiento que los demás jugadores tienen puede ser modelado como un juego de información incompleta, ha sido respondida en forma positiva por Mertens y Zamir (1985).
- Es posible dar una reintepretación de un juego Bayesiano basado en un espacio de estados y una probabilidad común a todos los agentes y en las que estos reciben señales privadas, a través de una variable aleatoria (funcion de información), sobre cuál es el verdadero estado de la naturaleza. Esta formulación es equivalente a la anterior.
- Los juegos de información incompleta se pueden clasificar según la forma específica de los pagos de los jugadores o según la estructura de información. En términos de la función de pagos estos pueden ser de valoración privada, interdependiente o común. El primer caso quiere decir que la función de pago de cada jugador es independiente de la información de los demás jugadores. La segunda quiere decir que la función de pago de cada jugador depende de la información de los demás jugadores y la tercera quiere decir que la función de pago es común a todos los jugadores. En términos de información estos pueden ser de información independiente o información correlacionada (*affiliated*).
- Para simplificar la exposición, vamos a suponer que la estructura de información es independiente. Esto es:
    - La densidad de F se puede expresar como $f = \prod_{i \in I} f_i$ donde f_i es una densidad sobre T_i.
    - La interpretación es la siguiente. El jugador i utiliza la distribucion $\prod_{j \neq i} f_j$ para evaluar la información de los demás agentes.
    - Este supuesto quiere decir que la información de los jugadores es independiente. En particular, la información es puramente privada y no afecta cómo los demás cuantifican su propia información.
    - Esto no quiere decir que la información de los demás agentes no tenga consecuencias sobre su utilidad. Los dos ejemplos siguientes esclarecen este punto.

Ejemplo 1 (Batalla de los sexos modificado) *Este ejemplo es una modificación de la batalla de los sexos estudiado en las notas anteriores (obsérvese que este ya no es un juego de coordinación).*

- $I = \{1, 2\}$.

- $A_M = A_H = \{B, S\}$.
- *Dependiendo del estado de ánimo la mujer puede tener preferencias distintas por ir al partido o de compras.*
- $T_M = \{B, S\}$, $T_H = \{N\}$.
- *Solo la mujer sabe al levantarse cual es su estado de ánimo. El hombre sabe el de él pero no el de ella.*
- $\pi_M, \pi_H : A_M \times A_H \times T_M \times T_H \to R$
- *El hombre tiene las mismas preferencias independientemente del estado de ánimo de la mujer. Formalmente* π_1 *no cambia de valor en su tercera componente.*
- *Las preferencias de la mujer dependen de su estado de ánimo:*
- $\pi_M(\cdot, \cdot, B, \cdot) : A_M \times A_H \times T_H \to R$
- $\pi_M(\cdot, \cdot, S, \cdot) : A_M \times A_H \times T_H \to R$
- $\pi_H : A_M \times A_H \times T_M \times T_H \to R$

Hombre *Mujer*	*B*	*S*
B	*3,2*	*2,1*
S	*0,0*	*1,3*
Ánimo de ir al partido		

Hombre *Mujer*	*B*	*S*
B	*1,2*	*0,1*
S	*2,0*	*3,3*
Ánimo de ir de compras		

- *El hombre le atribuye una probabilidad subjetiva* p *a que la mujer amanezca con ánimo de ir al partido.*
- *Formalmente* f_M, f_H *son densidades discretas sobre* $\{B, S\}$, $\{N\}$ *respectivamente.*

$$\begin{aligned} f_{-H}(B) &= f_M(B) = p \\ f_{-H}(S) &= f_M(S) = 1 - p \\ f_{-M}(N) &= f_H(N) = 1 \end{aligned}$$

- $f = f_M \times f_H$.

- *Obsévese que en este caso la información no solo es puramente privada (independiente) sino que la información privada de ninguno de los dos afecta el pago del otro (los valores son privados).*

Definición 1 (Estrategia) *Una estrategia es una función $\alpha_i : T_i \to A_i$. Una estrategia conjunta es una estrategia para cada jugador.*

3. Soluciones de un juego

Definición 2 *Una estrategia $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ domina (débilmente) a una estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$ si para toda estrategia $\alpha_{-i} : T_{-i} \to A_{-i}$ y $t \in T$:*

$$\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \alpha_{-i}(t_{-i})) \geq \pi_i(\alpha_i(t_i), \alpha_{-i}(t_{-i}))$$

con desigualdad estricta por lo menos un α_{-i} y t.

- Obsérvese que la definición anterior es equivalente a la siguiente. Una estrategia $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ domina (débilmente) una estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$ si para toda acción $a_{-i} \in A_{-i}$ y $t_i \in T_i$:

  $$\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), a_{-i}) \geq \pi_i(\alpha_i(t_i), a_{-i})$$

  con desigualdad estricta por lo menos para un a_{-i} y t_i.

- Una estrategia $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ es dominante (débilmente) si domina (débilmente) a toda estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$.

Ejemplo 2 (Batalla de los sexos modificado)

- *Las estrategias son:*

  $$\begin{aligned} \alpha_M &: \{B, S\} \to \{B, S\}. \\ \alpha_H &: \{N\} \to \{B, S\}. \end{aligned}$$

- *La estrategia $\alpha_M(B) = B$, $\alpha_M(S) = S$ domina débilmente cualquier otra estrategia para la mujer luego es una estrategia dominante débilmente.*

Definición 3 (Equilibrio en estrategias dominantes) *Un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente) es un conjunto de estrategias $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ una para cada jugador tal que para todo $i \in I$, $\widehat{\alpha}_i$ es una estrategia dominante (débilmente).*

- Más adelante daremos un ejemplo de un equilibrio en estrategias dominantes en juegos de información incompleta (el equilibrio en la subasta al segundo precio).

- La importancia del concepto de equilibrio en estrategias dominantes es doble. De una parte supone una forma débil de racionalidad y de otra, es independiente de la estructura de información.

Definición 4 (Equilibrio de Nash-Bayesiano) *Un equilibrio Bayesiano es un conjunto de estrategias $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ una para cada jugador tal que para todo jugador $i \in I$ y para todo estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$ y $t_i \in T_i$:*

$$E_{-i}[\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})|t_i] \geq E_{-i}[\pi_i(\alpha_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})|t_i]$$

- En el caso particular en que la estructura de información es independiente, la última desigualdad la podemos escribir como:

$$E_{-i}[\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})] \geq E_{-i}[\pi_i(\alpha_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})]$$

  donde el valor esperado se calcula utilizando la densidad f_{-i}.

Ejemplo 3 (Batalla de los sexos modificado)

- *Supongamos que:*

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_M &: \{B, S\} \to \{B, S\}. \\ \widehat{\alpha}_H &: \{N\} \to \{B, S\}. \end{aligned}$$

  es un equilibrio de Nash-Bayesiano.

- *Para la mujer, ella no tiene ninguna incertidumbre sobre el estado de ánimo del hombre. Entonces debe cumplirse:*

$$\pi_M(\widehat{\alpha}_M(t_M), \widehat{\alpha}_H(N), t_M, N) \geq \pi_M(\alpha_M(t_M), \widehat{\alpha}_H(N), t_M, N)]$$

- *Como ella tiene una estrategia dominante débilmente esta es, independiente de lo que el hombre haga, su mejor respuesta.*

- *Luego el candidato a $\widehat{\alpha}_M$ es:*

$$\widehat{\alpha}_M(B) = B, \widehat{\alpha}_M(S) = S.$$

- *Para el hombre, él tiene que calcular su mejor reacción a esta estrategia:*

$$E_{-H}[\pi_H(\widehat{\alpha}_H(N), \widehat{\alpha}_M(T_M), N, T_M)] \geq E_{-H}[\pi_H(\alpha_H(N), \widehat{\alpha}_M(T_M), N, T_M)]$$

$$\begin{aligned} & p\pi_H(\widehat{\alpha}_H(N), B, N, B) + (1-p)\pi_H(\widehat{\alpha}_H(N), S, N, S) \\ \geq & \\ & p\pi_H(\alpha_H(N), B, N, B) + (1-p)\pi_H(\alpha_H(N), S, N, S) \end{aligned}$$

- *Supongamos que $\widehat{\alpha}_H(N) = B$*

$$\begin{aligned} & p\pi_H(B, B, N, B) + (1-p)\pi_H(B, S, N, S) \\ \geq & \\ & p\pi_H(S, B, N, B) + (1-p)\pi_H(S, S, N, S) \end{aligned}$$

  es fácil mostrar que $p \geq \frac{3}{4}$.

- *Si $p \leq \frac{3}{4}$, la estrategia óptima es $\widehat{\alpha}_H(N) = S$.*
- *Obsérvese que si $p = \frac{3}{4}$ ambas estrategias para el hombre son una mejor respuesta. Por lo tanto cuando $p = \frac{3}{4}$ cualquier estrategia para el hombre es una mejor respuesta (en particular, tenemos dos equilibrios en puras y una infinidad en mixtas).*

Nota técnica 1 *Decimos que un juego de información incompleta es finito si tiene un número finito de jugadores, el espacio de acciones es finito y el espacio de tipos es finito. Una aplicación del teorema de Nacs implica que, en este caso, siempre existe un equilibrio de Nash - Bayesiano en estrategias mixtas.*

Ejemplo 4 (Paradoja de TKCD) *Considere el siguiente juego.* [1] *Alicia selecciona aleatoriamente dos números reales y los escribe en dos papeles que introduce en dos sobres cerrados. Después Bob lanza una moneda para escoger uno de los dos sobres. Alicia le muestra el número del sobre seleccionado. Ahora Bob debe adivinar si el otro sobre tiene un número mayor o menor que el del sobre que le acaban de mostrar. Si acierta gana* 1000. *Si pierde, pierde* 1000. *La pregunta es, existe una estrategia para Bob cuyo beneficio esperado sea estrictamente mayor que cero?*

Considere la siguiente estrategia mixta. Sea $f : R \to (0,1)$ cualquier función estrictamente creciente. Dado el número x del sobre que le muestran a Bob, éste utiliza la siguiente estrategia mixta $(f(x), 1 - f(x))$ donde $f(x)$ es la probabilidad de afirmar que el otro sobre tiene un número menor a x y $1 - f(x)$ es la probabilidad afirmar que el otro sobre tiene número mayor a x. Sean x y x' los dos números reales que elige Alicia. Supongamos que $x < x'$. Ahora, la probabilidad de que a Bob le salga el sobre con el menor valor x es $\frac{1}{2}$. Luego condicional a que le salió x su pago esperado de usar la estrategia mixta es:

$$-1000 \times f(x) + 1000 \times (1 - f(x)) \tag{1}$$

De otra parte, la probabilidad de que le haya salido el mayor valor x' es también $\frac{1}{2}$ y, condicional a que le salió x', su pago esperado de usar la estrategia mixta es:

$$1000 \times f(x') - 1000 \times (1 - f(x')) \tag{2}$$

por lo tanto el pago esperado para Bob es (obsérvese que cada uno de los eventos anteriores ocurre con probabilidad 0,5*):*

$$1000 \times (f(x') - f(x)) > 0 \tag{3}$$

y por lo tanto, el beneficio esperado de esta estrategia es estrictamente mayor que cero.

[1] Tomado de http://www.xkcd.com/

Ejercicio 1 *Escriba el anterior juego entre Bob y Alicia como un juego de información incompleta.*

Ayuda: El espacio de estrategias de Bob puede ser $\{C, NC\}$ *con* C *quiere decir el otro sobre tiene un número mayor (cambiar de sobre) y* NC *quiere decir el otro sobre tiene un número menor (no cambiar de sobre). Alice tiene un espacio de estrategias trivial (no tiene estrategias). El espacio de tipos de Alice y Bob son los número reales (el tipo de Alice es el sobre que Bob no elige y el de Bob es el sobre que él elige).*

Ejemplo 5 (Competencia imperfecta I)

- *Las firmas tienes funciones de costos:*

$$c_i(q_i) = cq_i$$

  $c \in \{1, 2\}$.

- *El valor de* c *es común a ambas firmas y la firma* 2 *le atribuye una probabilidad subjetiva* p *de que el costo sea* 1.

- *La firma* 1 *está informada del costo pero la firma* 2 *no.*

- *Intuitivamente ambas firmas operan la misma tecnología, la primera firma puede saber si está operando a costos marginales altos o bajos mientra que la segunda no lo puede saber pero sabe que tiene los mismo costos que la primera.*

- *La función de demanda inversa es:*

$$P(Q) = \text{máx}\{M - dQ, 0\}$$

- $I = \{1, 2\}$

- $A_1 \times A_2 = R_+ \times R_+$.

- $T_1 = \{1, 2\}$, $T_2 = \{t\}$.

- $\pi_i : R_+^2 \times \{1, 2\} \times \{t\} \to R$ *es el payoff de cada jugador.*

- *Para la firma* 1*:*

$$\begin{aligned} \pi_1(q_{11}, q_2, 1, t) &= (M - d(q_{11} + q_2) - 1)q_{11} \\ \pi_1(q_{12}, q_2, 2, t) &= (M - d(q_{12} + q_2) - 2)q_{12} \end{aligned}$$

- *Para la firma* 2*:*

$$\begin{aligned} \pi_2(q_{11}, q_2, 1, t) &= (M - d(q_{11} + q_2) - 1)q_2 \\ \pi_2(q_{12}, q_2, 2, t) &= (M - d(q_{12} + q_2) - 2)q_2 \end{aligned}$$

- *Obsérvese que el payoff de la firma* 2 *depende de la información de la firma* 1. *Sin embargo, la información es puramente privada. Esto no sucedia en el caso de la batalla de los sexos.*

- *Esto pone de manifiesto que en un juego de información incompleta la información puede ser completamente privada aún cuando la información privada de cada jugador afecte el payoff de los demás jugadores.*

- f_1 *y* f_2 *son probabilidades discretas sobre* $\{1, 2\}$ *y* $\{t\}$ *respectivamente.*

$$\begin{aligned} f_{-2}(\{1\}) &= f_1(\{1\}) = p \\ f_{-2}(\{2\}) &= f_1(\{2\}) = 1 - p \\ f_{-1}(\{t\}) &= f_2(\{t\}) = 1 \end{aligned}$$

- *Una estrategia para la firma* 1 *son dos niveles de producción* q_{11} *y* q_{12} *y para la firma* 2 *es un nivel de producción* q_2.

- *Supongamos que* $(\widehat{q}_{11}, \widehat{q}_{12}, \widehat{q}_2)$ *es un equilibrio de Nash - Bayesiano. Entonces deben cumplirse las siguinetes condiciones.*

- *Para la firma* 1, *para todo* $\overline{q}_{11} \in R_+$ *y* $\overline{q}_{12} \in R_+$,

$$\begin{aligned} (M - d(\widehat{q}_{11} + \widehat{q}_2) - 1)\widehat{q}_{11} &\geq (M - d(\overline{q}_{11} + q_2) - 1)\overline{q}_{11} \\ (M - d(\widehat{q}_{12} + \widehat{q}_2) - 2)\widehat{q}_{12} &\geq (M - d(\overline{q}_{12} + q_2) - 2)\overline{q}_{12} \end{aligned}$$

- *Para la firma* 2, *para todo* $\overline{q}_2 \in R_+$,

$$\begin{aligned} & p(M - d(\widehat{q}_{11} + \widehat{q}_2) - 1)\widehat{q}_2 + (1 - p)(M - d(\widehat{q}_{12} + \widehat{q}_2) - 2)\widehat{q}_2 \\ \geq & \\ & p(M - d(\widehat{q}_{11} + \overline{q}_2) - 1)\overline{q}_2 + (1 - p)(M - d(\widehat{q}_{12} + \overline{q}_2) - 2)\overline{q}_2 \end{aligned}$$

- *Suponiendo que existe una solución interior a los tres problemas de maximización es fácil mostrar que la solución es:*

$$\begin{aligned} \widehat{q}_{11} &= \frac{2M - 1 - p}{6d} \\ \widehat{q}_{12} &= \frac{2M - 4 - p}{6d} \\ \widehat{q}_2 &= \frac{M - 2 + p}{3d} \end{aligned}$$

Ejercicio 2 (Competencia imperfecta II) *Considere el modelo de competencia imperfecta de Cournot. Supongamos que tenemos dos firmas que producen un bien homogéneo y compiten en cantidades. La función de demanda inversa está dada por* $p = 1 - Q$ *donde* Q *es la suma de las cantidades producidas por cada firma. Los costos de producción son constantes pero desconocidos (son información privada). Sin embargo, ambas firmas saben que los costos de* *producción tienen que ser c_l o c_h (intuitivamente, costos bajos y, costos altos). Supongamos que la distribución de probabilidad que genera los costos es:*

$$F(c_h, c_h) = F(c_h, c_l) = F(c_l, c_l) = F(c_l, c_h) = \frac{1}{4}.$$

1. *¿Cúal es el espacio de estrategias de cada firma?*
2. *Escribir el problema de optimización (interim) de cada firma.*
3. *Calular el equilibrio de Nash - Bayesiano simétrico de este juego.*

- Obsévese que existe otra definición natural de equlibrio. En esta definición suponemos que los agentes no han observado la realización de su propia información.

Definición 5 (Equilibrio exante) *Un equilibrio de Nash-Bayesiano exante es un conjunto de estrategias $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ tal que para todo jugador $i \in I$ y para todo estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$,*

$$E[\pi_i(\widehat{\alpha}_i(T_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), T_i, T_{-i})] \geq E[\pi_i(\alpha_i(T_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), T_i, T_{-i})]$$

- Teniendo en cuenta ésta diferenciación entre los conceptos de equilibrio, al primero que introdujimos lo llamaremos equilibrio de Nash - Bayesiano interim y éste último, equilibrio exante.
- Es obvio que si $\widehat{\alpha}$ es un equilibrio interim entonces este es un equilibrio exante. El converso también vale bajo condiciones muy débiles. Luego, prácticamente podemos decir que los dos conceptos de equilibrio son equivalentes.
- También es fácil de ver que un equilibrio en estrategias dominates es un equilibrio de Nash - Bayesiano.

Definición 6 (Equilibrio expost) *Un equilibrio expost es un conjunto de estrategias $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ una para cada jugador tal que para todo jugador $i \in I$ y para todo estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$,*

$$\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i}) \geq \pi_i(\alpha_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i})$$

Ejercicio 3 (Relación entre los conceptos de equilibrio) *Mostrar que el conjunto de equilibrios en estrategias dominates es un subconjunto del conjunto de equilibrios expost que a su vez es un subconjunto del conjunto de equilibrios de Nash-Bayesianos que es un subconjunto del conjunto de equilibrios exante.*

Ejemplo 6 (Pavimentación carretera: Mecanismo estático)

- *Dos individuos que viven en lugares remotos y aislados consideran pavimentar la única carretera de acceso.*
- *Hacer esto cuesta 20.*

- *La única razón para que los individuos estén interesados es si planean comprar un carro.*
- *Para cada individuo la valoración de la carretera, suponiendo que va comprar carro es 30.*
- *Mecanismo A (juego simultáneo).*
- *Envian una carta a un tercero manifestando el deseo de tener una carretera pavimentada.*
- *En caso de manifestar interés se intepreta la señal como si el individuo tuviera una valoración de 30 (intención de comprar carro) de lo contrario cero.*
- *Si los agentes manifiestan interés se construye la carretera y se comparte el costo (10 cada uno). Si solo uno manifiesta interes se construye y él la paga (20). Si ninguno manifiesta interés no se construye.*
- *El espacio de acciones es* $A_i = \{0, 30\}$.
- *El espacio de tipos es* $T_i = \{0, 30\}$.
- *La probabilidad de que la valoración sea alta es p y los tipos son independientes.*
- *Los pagos son (obsérvese que este es un juego de valores privados):*

$$\begin{aligned}
\pi_i^A(a_1, a_2, x_1, x_2) &= x_i - 20, \ \textit{si } a_i > a_j \\
\pi_j^A(a_1, a_2, x_1, x_2) &= x_j \\
\pi_i^A(a_1, a_2, x_1, x_2) &= x_i - 10, \ \textit{si } a_i = a_j = 30 \\
\pi_i^A(a_1, a_2, x_1, x_2) &= 0, \ \textit{si } a_i = a_j = 0
\end{aligned}$$

- *Si permitimos estrategias mixtas entonces una estrategia de equilibrio es:*

$$\gamma_i : T_i \to \Delta(A_i)$$

- *Vamos a buscar una estrategía simétrica de equilibrio que denotamos por:*

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= (u, 1-u) \\
\gamma(30) &= (w, 1-w)
\end{aligned}$$

- *Es claro que en equilibrio* $u = 1$ *con un pago esperado mayor o igual a cero. Un individuo con valoración cero no va mandar un mensaje distinto pues con probabilidad positiva puede suceder que le toque construir al él solo la carretera (en ninguna circunstancia gana y si puede perder con probabilidad positiva).*

- *Por ahora, en equilibrio:*

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= (1,0)\\ \gamma(30) &= (w,1-w)\end{aligned}$$

- *Ahora en un equilibrio simétrico $w<1$. De lo contrario el pago va ser cero para ambos con seguridad. Pero si un individuo con valoración alta piensa que el otro va enviar un mensaje de que su valoración es baja entonces su mejor respuesta es mandar un mensaje de que su valoración es alta.*

- *Por ahora, en equilibrio:*

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= (1,0)\\ \gamma(30) &= (w,1-w)\end{aligned}$$

  con $w<1$.

- *Ahora, es fácil verificar que si $p \leq \frac{1}{2}, w=0$ es el único equilibrio simétrico (ejercicio).*

- *De otra, si $p>\frac{1}{2}$ entonces $w>0$ y por un argumento ya conocido $\gamma(30)=(1,0)$ y $\gamma(30)=(0,1)$ deben generar la misma utilidad para el individuo 1 cuando este conjetura que el individuo 2 va jugar $\gamma(0)=(1,0), \gamma(30)=(w,1-w)$. En este caso, no es difícil demostrar que $w=1-\frac{1}{2p}$.*

- *En conclusión el equilibrio simétrico de Nash - Bayesiano es:*

$$\begin{aligned}\gamma^*(0) &= (1,0)\\ \gamma^*(30) &= \left(\text{máx}\left\{0,1-\frac{1}{2p}\right\},1-\text{máx}\left\{0,1-\frac{1}{2p}\right\}\right)\end{aligned}$$

- *Por lo tanto, si $p>\frac{1}{2}$, con probabilidad $\left(1-\frac{1}{2p}\right)^2$ no se construye la carretera a pesar de que ambos tengan valoración alta.*

- *Si por lo menos uno de ellos tiene valoración alta, algo que sucede con mayor probabilidad que el evento que los dos tengan valoración alta, en cuyo caso es eficiente construir la carretera, con probabilidad mayor a $1-\frac{1}{2p}$ no se construye.*

- *Es decir, entre mayor sea la probabilidad de que sea eficiente la construcción con menos probabilidad se construye!*

4. Juegos dinámicos

Ejemplo 7 (Pavimentación carretera: Mecanismo dinámico)

- *Mecanismo B (juego secuencial).*

- *El primer individuo envia un mensaje sobre su disponibilidad a pagar por la construcción* $\xi_1 \in [0, 20]$.

- *En la segunda etapa, si* $\xi_1 < 20$, *el segundo individuo debe tomar la decisión sobre si financia el resto necesario para la construcción:* $\xi_2 = 20 - \xi_1$. *En cuyo caso se construye la carretera. Si* $\xi_1 = 20$ *también se construye.*

- *Este mecanismo se pueden interpretar como juegos de información incompleta en donde la información privada es la valoración de la carretera (que depende de si piensa o no comprar carro).*

- *Sea* $X_i = \{0, 30\}$ *y* p *la probabilidad de que la valoración de un individuo sea* 30. *Suponemos que esta es la misma para ambos individuos y es independiente. Luego, la distribución de probabilidad sobre el espacio de tipos (valoraciones) es:*

  1. $P(30, 30) = p^2$
  2. $P(30, 0) = P(0, 30) = p\,(1 - p)$
  3. $P(0, 0) = (1 - p)^2$

- *El espacio de acciones del primer individuo es* $A_1^B = [0, 20]$.

- *El espacio de estrategias del segundo individuo es,* $A_2^B = \{a_2 : [0, 20) \to \{Y, N\}\}$

- *Los pagos son:*

$$
\begin{aligned}
\pi_1^B(a_1, a_2, x_1, x_2) &= x_1 - a_1, \ \textit{si } a_1 = 20 \ \textit{o } a_2(a_1) = Y \\
\pi_1^B(a_1, a_2, x_1, x_2) &= 0, \ \textit{si } a_1 < 20 \ \textit{y } a_2(a_1) = N \\
\pi_2^B(a_1, a_2, x_1, x_2) &= x_2 - (20 - a_1), \ \textit{si } a_1 = 20 \ \textit{o } a_2(a_1) = Y \\
\pi_2^B(a_1, a_2, x_1, x_2) &= 0, \ \textit{si } a_1 < 20 \ \textit{y } a_2(a_1) = N
\end{aligned}
$$

- *Una estrategia para el jugador* 1 *es:*

$$\gamma_1 : T_1 = \{0, 30\} \to \Delta([0, 20])$$

- *Para el jugador* 2 *es:*

$$\gamma_2 : T_2 = \{0, 30\} \to \{a : [0, 20) \to \Delta(\{Y, N\}))$$

- *Este juego tiene una multiplicidad de equilibrios. Vamos a concentrarnos en equilibrios perfectos en subjuegos.*

- *Considere el problema que enfrenta el segundo jugador. Obsérvese que estrictamente este no es un subjuego (pues* 2 *no sabe el tipo de* 1*) sin embargo es claro que tiene a su disposición toda la información relevante para tomar una decisión.*

- *Si el jugador 2 tiene valoración baja es obvio que su respuesta a cualquier mensaje de* 1 *es* N.

- *Lo contrario sucede si su valoración es alta.*

- *Ahora* 1 *anticipa esto. Si su valoración es baja claramente su mensaje es cero.*

- *Si su valoración es alta su estrategia depende de su expectativa de qué va jugar* 2.

- *Sea* $\sigma = (\alpha, 1-\alpha)$ *la estrategia mixta que juega cuando su valoración es alta. Su pago esperado es:*

$$
\begin{aligned}
& p\overline{\pi}_1(\sigma, \gamma_2, 30, 30) + (1-p)\overline{\pi}_1(\sigma, \gamma_2, 30, 0) \\
= \; & p(\alpha\pi_1(0, Y, 30, 30) + (1-\alpha)\pi_1(20, Y, 30, 30)) + \\
& (1-p)(\alpha\pi_1(0, N, 30, 0) + (1-\alpha)\pi_1(20, N, 30, 0)) \\
= \; & p(\alpha(30) + (1-\alpha)10) + (1-p)(0\alpha + (1-\alpha)10) \\
= \; & p\alpha(30) + (1-\alpha)10 \\
= \; & 10 + \alpha(30p - 10)
\end{aligned}
$$

- *Luego, si* $p = \frac{1}{3}, \alpha$ *puede tomar cualquier valor. Si* $p > \frac{1}{3}, \alpha = 1$. $p < \frac{1}{3}, \alpha = 0$.

- Existen otros equilibrios de Nash Bayesianos que no satisfacen este criterio adicional de ser perfectos en subjuegos. Incluso son equivalentes en términos del resultado (véase Vega Redondo página 203).

- A diferencia del primer mecanismo, este mecanismos garantiza una asignación eficiente cuando el segundo jugador tiene valoración alta.

- Cuando el segundo jugador tiene una valoración baja, el segundo mecanismo asigna ineficientemente con certeza (cuando p es lo suficientemente grande). Este no es el caso en el primer mecanismo aún cuando $p = 1$.

- El rango de valores de p para los que el mecanismo B es ineficiente es mayor que el rango de valores de A: $[\frac{1}{3}, 1]$ contra $[\frac{1}{2}, 1]$. Sin embargo, para p grande la probabilidad exante de que en el mecanismo B ocurra una asignación ineficiente es muy baja compardo con el mecanismo A.

4.1. Señalización

- En ciertos juegos dinámicos ciertas acciones de los agentes a lo largo del juego se pueden interpretar como señales que revelan información relevante para la contraparte. Sin embargo, la señal puedo no revelar perfectamente la información de interés. Por ejemplo, cuando una persona quiere comprar un carro usado le interesa la calidad del carro que es información privada del vendedor. Ahora, si el vendedor hace una oferta ésta puede intepretarse como una señal imperfecta de la calidad del carro.

- El siguiente modelo ilustra las ideas prinicipales. Supongamos que hay dos jugadores. El primer jugador (jugador 1) puede ser de diferentes tipos. Su tipo es información privada y la distribución de probabilidad sobre su verdadero tipo es P que es conocimiento común. El jugador 1 envía un mensaje (señal) que usa el jugador 2 para condicionar sus acciones.

- Los pagos para los dos jugadores son:

  $u_i : T \times M \times A \to R$

  donde T representa el espacio de tipos del jugador 1, M el espacio de estrategias del jugador 1 y A el espacio de acciones del jugador 2.

- Una estrategia para el jugador 1 es una función $\gamma_1 : T \to M$ (o $\Delta(M)$) y una estrategia para el jugador 2 es una función $\gamma_2 : M \to A$ (o $\Delta(A)$).

- Sea $I = \{1, 2\}$. Un juego de señalización entre dos jugadores es $SG = (I, T, P, M, A, (u_i)_{i \in I})$.

Definición 7 (Equilibrio Señalización en Mixtas) *Un equilibrio de señalización es un conjunto de estrategias (γ_1, γ_2) y una función de conjeturas $\mu : M \to \Delta(T)$ tal que:*

1. *La estrategia del jugador 1 es una mejor respuesta a la estrategia del jugador 2. Para todo t y $\nu \in \Delta(M)$:*

$$\sum_m \gamma_1(t)(m)(\sum_a \gamma_2(m)(a)u_1(t,m,a)) \geq \sum_m \nu(m)(\sum_a \gamma_2(m)(a)u_1(t,m,a)) \tag{4}$$

2. *Dada la función de conjeturas que el jugador 2 tiene sobre el tipo del jugador 1, la estrategia del jugador 2 es una mejor respuesta a la estrategia del jugador 1 . Para todo m y $\alpha \in \Delta(A)$:*

$$\sum_a \gamma_2(m)(a)(\sum_t \mu(m)(t)u_2(t,m,a)) \geq \sum_a \alpha(a)(\sum_t \mu(m)(t)u_2(t,m,a)) \tag{5}$$

3. *Consistencia de la función de conjeturas y la estrategia que el jugador 2 supone que 1 va utilizar. Dado m suponga que* $\{t \in T : \gamma_1(t)(m) > 0\} \neq \phi$. *Entonces para todo* $t' \in T$

$$\mu(m)(t') = \frac{P(t')\gamma_1(t')(m)}{\sum_t P(t)\gamma_1(t)(m)} \tag{6}$$

cuando la fórmula hace sentido, caso contrario $\mu(m)(t')$ *no tiene restricciones. Intuitivamente el lado derecho de esta última condición representa la probabilidad de que el tipo sea* t' *dado que el mensaje es* m.

Definición 8 (Equilibrio Señalización en Puras) *Un equilibrio de señalización es un conjunto de estrategias* (γ_1, γ_2) *y una función de conjeturas* $\mu : M \to \Delta(T)$ *tal que:*

1. *La estrategia del jugador 1 es una mejor respuesta a la estrategia del jugador 2. Para todo* t *y* $\nu \in M$*:*

$$u_1(t, \gamma_1(t), \gamma_2(\gamma_1(t))) \geq u_1(t, \nu, \gamma_2(\nu))) \tag{7}$$

2. *Dada la función de conjeturas que el jugador 2 tiene sobre el tipo del jugador 1, la estrategia del jugador 2 es una mejor respuesta a la estrategia del jugador 1 . Para todo* m *y* $\alpha \in A$*:*

$$\sum_t \mu(m)(t)u_2(t, m, \gamma_2(m)) \geq \sum_t \mu(m)(t)u_2(t, m, \alpha) \tag{8}$$

3. *Consistencia de la función de conjeturas y la estrategia que el jugador 2 supone que 1 va utilizar. Dado m sea* $T_m = \{t \in T : \gamma_1(t) = m\}$. *Entonces para todo* $t' \in T$

$$\mu(m)(t') = \frac{P(t')\gamma_1(t')(m)}{\sum_{t \in T_m} P(t)\gamma_1(t)(m)} \tag{9}$$

cuando la fórmula hace sentido, caso contrario $\mu(m)(t')$ *no tiene restricciones. Intuitivamente el lado derecho de esta última condición representa la probabilidad de que el tipo sea* t' *dado que el mensaje es* m.

Ejemplo 8 *Considere una versión dinámica de la batalla de los sexos modificada en la que la mujer juega primero. En este caso el equilibrio de señalización es para la mujer su estrategia dominante, para el hombre* $\gamma_2(B) = B, \gamma_2(C) = C$ *y lo sustenta una función de conjeturas* $\mu(B)(B) = 1, \mu(S)(S) = 1$.

- Ahora, cuando un jugador tiene una estrategia dominante, no siempre esta es su estrategia óptima en un equilibrio de señalización. El siguiente ejemplo ilustra esta situación. En éste, a pesar de que el primer jugador tiene una estrategia dominante, al anticipar la reacción del segundo jugador prefiere jugar una estrategia dominada.

Ejemplo 9 (Equilibrio separador) *Considere la siguiente versión de la batalla de los sexos.*

Hombre / *Mujer*	*B*	*S*
B	*1,2*	*3,1*
S	*0,0*	*2,3*
Ánimo de ir al partido		

Hombre / *Mujer*	*B*	*S*
B	*2,2*	*0,1*
S	*3,0*	*1,3*
Ánimo de ir de compras		

En el juego simultáneo la mujer usa utiliza una estrategia dominante. Sin embargo, en el juego dinámico en el que la mujer juega primero, la mujer no juega la estrategia dominante del juego estático. Obsérvese que el jugador 2 *juega* $\gamma_H(B) = B, \gamma_H(S) = S$ *y la mujer juega* $\gamma_M(B)(S) = 1, \gamma_M(S)(B) = 1$ *y la siguiente función de conjeturas sustenta el equilibrio de señalización es:* $\mu(B)(S) = 1, \mu(S)(B) = 1$.

Obsérvese que en los dos juegos dinámicos que acabamos de discutir los dos equilibrios son separadores en el sentido de que la función de conjeturas revela perfectamente el tipo del jugador (en cada caso está concentrada en un solo tipo).

Ejemplo 10 (Equilibrio agrupador) *Considere la siguiente versión de la batallas de los sexos.*

Hombre / *Mujer*	*B*	*S*
B	*3,2*	*2,1*
S	*0,0*	*1,3*
Ánimo de ir al partido		

Hombre / *Mujer*	*B*	*S*
B	*2,2*	*0,1*
S	*3,0*	*1,3*
Ánimo de ir de compras		

En este caso el equilibrio señalización es de la forma $\gamma_1(B) = B, \gamma_1(S) = B, \gamma_2(B) = B, \gamma_2(S) = S$ *y* $\mu(B)(B) = p, \mu(B)(S) = 1-p$. *Es decir, el mensage* *no revela nada nuevo sobre el tipo del primer jugador (obsérvese que la condición de consistencia no implica ninguna restricción sobre la función de conjeturas del jugador* 1*).*

Verifiquemos que la tercera condición de la definición de equilibrio de señalización se cumple. Supongamos que $m = B$ *entonces* $T_m = \{B, S\}$ *y la función de conjeturas es tal que* $\mu(B)B = p, \mu(B)S = 1 - p$. *De otra parte si* $t' = B$

$$\frac{P(B)\gamma_M(B)(B)}{\sum_{t \in T_m} P(t)\gamma_M(t)(m)} = \frac{p}{p\gamma_M(B)(B) + (1-p)\gamma_M(S)(B)} \tag{10}$$

$$= \frac{p}{p + (1-p)} \tag{11}$$

Cuando $t' = S$ *la verificación es análoga. El caso en el que* $m = S$ *se deja como ejercicio.*

- Consideremos el siguiente ejemplo debido a Kreps y Wilson que resalta las dificultades de surgen en este tipo de interacciones estratégicas.

Ejemplo 11 (Kreps y Wilson)

5. Aplicación: Teoría de subastas

Las subastas son un mecanismo de asignación de recursos y formación de precios.[2] Son un mecanismo universal y anónimo. Es decir, en general no dependen de los detalles específicos del bien a ser subastado ni de las identidades de los participanytes. Vamos a considerar primero el caso en que es un único objeto indivisible el que va ser subastado. Las subasta se pueden clasificar por:

- Tipo de bien (unitarias, multiunidades, paqutes de objetos, etc.).
- Estructura de información (independiente o afiliadas).
- Estructura de valoración (privada, interdependiente, común).

Para subastas de un único objeto existen cuatro subastas básicas.

- Primer precio (cerrada)
- Segundo precio (cerrada)
- Inglesa (abierta)
- Holandesa (abierta)

Otros ejemplos de subastas son: Subastas al tercer precio, todos pagan, guerra del desgaste. Una loteria es un mecanismo de asginación e recursos pero no es una subasta (estándar). Una subasta es estándar cuando el ganador es el que más ofrece por el bien. Hay muchos ejemplos de subastas que no son estándar. EN el mercado de compras públicas de las BMC, algunas licitaciones de infrestructura en varios países del mundo o algunas que ha utilizado algunas empresas en Bogotá para contratar servicios.

Las preguntas fundamentales que se hace la teoría son:

- Existencia de equilibrio del juego Bayeasiano inducido.
- Equivalencia en asignación de recursos y precios de equilibrio.
- Optimalidad para el subastador.
- Eficiencia productiva y asignativa (eficiencia en el sentido de Pareto).

  Cuando la asignación de recursos mediante una subasta resulta en una asignación ineficiente? Una pregunta fundamental es, ¿Cuál es la pérdida en eficiencia por utilizar una subasta como mecanismo de asignación? En la literatura especializada este problema se conoce como el precio de la anarquía (o el precio de la competecia o descentralización).[3]
- Incentivos para participar (se conoce como racionalidad individual).

[2]Notas de clase basadas principalmente en Krishna, V. 2002. Auction Theory. Academic Press. (2) Athey, S. y P. Haile. 2005. Nonparametric Approaches to Auctions.

[3]Veáse Algorithmic Game Theory [2007].

- Incentivos a coludir.
- Simplicidad de las reglas.
- ¿Es posible identificar los fundamentales de juego con base en observables?
- ¿Es posible refutar la teoría?

5.1. El modelo básico de subastas

El modelo estándar tiene la siguiente estructura:

- Estructura de información independiente y simétrica.
- Estructura de valoración privada y agentes neutros al riesgo.
- En particular, agentes simétricos (esto tiene dos componentes: información y valoración).

El modelo estándar es un juego de información incompleta con la siguiente estructura:

$$BG = \left\langle I, (R_+)_{i\in I}, [0,\omega], (\pi_i)_{i\in I}, F\right\rangle$$

donde

- I es un conjunto de jugadores (finito).
- El conjunto de acciones es el mismo para todos: $A_i = R_+$.
- El supuesto de estructura de información independiente lo formalizamos de la siguiente forma.

  El conjunto de información es el mismo para todos: $T_i = [0,\omega]$. En este caso interpretamos el conjunto de información como la valoración privada que del objeto tiene el agente.

  La función de probabilidad sobre el conjunto de información $T = [0,\omega]^I$, que caracteriza los juegos Bayesianos, suponemos que es de la forma F^N donde F es una distribución de probabilidad sobre $[0,\omega]$ y que ésta tiene densidad f (aquí nos alejamos ligeramente de la notación introducida en las notas anteriores donde F era la distribución sobre T. Sin embargo, como forma de recordar este caso especial el del modelo estándar de subastas, obsérvese que en la especificación del juego Bayesiano sólo especificamos un conjunto de información $[0,\omega]$ y una sola función de distribución F sobre $[0,\omega]$)

  La interpretación es la siguiente. En el modelo estándar de subastas el jugador i utiliza la densidad $\prod_{j\neq i} f = f^{n-1}$para evaluar la información de los demás agentes.

  Este supuesto quiere decir que la información de los jugadores es independiente. En particular, la información es puramente privada y no afecta cómo los demás cuantifican su propia información.

- $\pi_i : R_+^I \times [0,\omega]^I \to R$ es el pago de cada jugador y su forma específica depende del tipo de subasta que estemos considerando.

- π_i no depende de x_{-i} y es de la forma $\pi_i(b_i, b_{-i}, x_i) = x_i - t_i(b_i, b_{-i})$ donde $t_i(b_i, b_{-i})$ representa la transferencia de cada jugador al subastador.

Notación 1 *Para resumir, utilizaremos T para denotar el conjunto de información $[0,\omega]^I$ y F^n para denotar la función de distribución sobre T.*

5.2. Subasta al segundo precio

En esta subasta cada agente observa su valoración $t_i \in T_i = [0,\omega]$ y escribe en un sobre su oferta por el bien. Gana el jugador que más ofrezca y paga la segunda oferta más alta. En caso de empate se asigna el objeto aleatoriamente entre los ganadores (y paga el valor ofertado).

El payoff de los agentes es:

$$\begin{array}{rcl} \pi_i & : & R_+^I \times [0,\omega]^I \to R \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) & = & t_i - \max\limits_{j \neq i} \{b_j\} \text{ si } b_i > \max\limits_{j \neq i} \{b_j\} \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) & = & 0 \text{ si } b_i < \max\limits_{j \neq i} \{b_j\} \end{array}$$

La expresión del payoff pone en evidencia algunos de los supuestos que hicimos anteriormente (valoración privada y neutralidad al riesgo).

Proposición 1 *En la subasta al segundo precio la estrategia de revelar la verdadera valoración es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente).*

Prueba. Una estrategia para cada jugador es una función $\mathbf{b}_i : [0,\omega] \to R_+$. Vamos a demostrar que la estrategia de revelar la verdad para cada jugador, $\mathbf{b}^{II}(t_i) = t_i$ es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente).

- Supongamos que cada agente observa su valoración privada y hace una oferta por el bien.

- Fijemos un agente, digamos el agente i y concentremonos en su estrategia. Sea $Y_1 = \max\limits_{j \neq i} \{b_j\}$. Y_1 determina si el agente i gana o no.

- Primero algunas observaciones: $\mathbf{b}_i(t_i) > t_i$ no es racional (en el sentido débil) pues la estrategia $\overline{\mathbf{b}}_i$ que es igual $\mathbf{b}_i$ en todas partes excepto en t_i, donde es revelar la verdadera valoración, la domina débilmente - cuando la valoración es t_i, el payoff del agente nunca es menor y con probabilidad positiva es mayor.

- El argumento es independiente de las estrategias utilizadas por los demás jugadores.

- Si $\mathbf{b}_i(t_i) < t_i$ pueden suceder tres cosas:

	Payoff		
	Estrategia $\mathbf{b}_i$		Estrategia $\mathbf{b}^{II}$
$Y_1 \leq b_i < t_i$	i gana	$t_i - Y_1$	$t_i - Y_1$
$b_i < Y_1 < t_i$	i pierde	0	$t_i - Y_1$
$b_i < t_i \leq Y_1$	i pierde	0	0

- Comparando con el resultado que hubiera tenido de utilizar la estrategia de revelar la verdad es claro que ésta últma la domina.

- Formalmente lo que hemos hecho es demostrar que la estrategia $\mathbf{b}^{II}(t_i) = t_i$ domina a cualquier otra estrategia $\mathbf{b}_i$. Esto es:

$$\pi_i(t_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) \geq \pi_i(\mathbf{b}_i\left(t_i\right), b_{-i}, t_i, t_{-i})$$

  para todo $t \in T$ y b_{-i}

■

- Obsérvese que en ninguna parte utilizamos la estructura de información y que la estrategia es la misma para cada jugador. Esto es lo que se conoce como un equilibrio simétrico. Este equilibrio es independiente de la estructura de información y de que el espacio de valoración sea $[0, \omega]$. En particular, vale aún en el caso en que la información sea correlacionada o los conjuntos de información sean diferentes. Adicionalmente, el resultado no depende de la aversión al riesgo de los participantes.

- Esta subasta es eficiente desde el punto de vista social (cuando se excluye al subastador del conjunto de agentes).

- Ahora, el *pago esperado* (pago esperado interim en este equilibrio) de un agente con valoración t, $m^{II}(t)$ es:

$$m^{II}(t) = G(t) E_{-i}\left[Y_1 \mid t > Y_1\right]$$

  donde $G(t)$ es a probabiidad de ganar (la probabilidad que el agente le atribuye al conjunto $\left[t > Y_1\right]$, es decir, la distribución de Y_1 y $E_{-i}\left[Y_1 \mid t > Y_1\right]$ es el pago esperado del agente dado que es ganador).

  La estrategia de revelar la verdadera valoración es un equilibrio en estrategias dominantes (débiles). Esto quiere decir que si eliminamos las estrategias dominadas débilmente seleccionariamos este equilibrio. Sin embargo, existen otro tipo de equilibrios que, aunque extraños, podrían ser pasados por alto sin ninguna relfexión sobre su significado. Por ejemplo, supongamos que los agentes utilizan las siguientes estrategias:

$$\begin{aligned} b_i &= w \\ b_{-i} &= 0 \end{aligned}$$

  Es fácil ver que estas estrategias son un equilibrio expost y en particular, son un equilibrio de Nash Bayesiano.

5.3. Subasta al primer precio

En esta subasta los agentes observan su valoración (información) y hacen una oferta. Gana el que oferte más alto y paga lo ofertado. En caso de empate se asigna aleatoriamente.

El payoff de los agentes es:

$$\begin{aligned} \pi_i &: R_+^I \times [0,\omega]^I \to R \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= t_i - b_i \text{ si } b_i > \max_{j \neq i} \{b_j\} \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= 0 \text{ si } b_i < \max_{j \neq i} \{b_j\} \end{aligned}$$

Obsérvese que existe un compromiso claro entre ofertar alto (aumenta la probabilidad de ganar) y el pago (disminuye el payoff). Intuitivamente, esto implica que la oferta óptima de cada agente debe ser menor que su valoración . Este compromiso no existe en la subasta al segundo precio y por eso en esta subasta los agentes pujan hasta su valoración.

Nos vamos a concentrar en el equilibrio simétrico. En este caso no existe un equilibrio en estrategias dominantes. Vamos a caracterizar el equilibrio de Nash-Bayesiano. Supongamos que i tiene una valoración t_i y ofrece $b_i \in R_+$. Supongamos que todos los jugadores $j \neq i$ utilizan una estrategia $\mathbf{b}^I$ diferenciable y creciente. Es claro que $b_i \leq \mathbf{b}^I(\omega)$ (de lo contrario ganaría con seguridad pero también ganaría con seguridad reduciedo su oferta un poco). También es fácil de ver que si $t_i = 0$ entonces $b_i = 0$ y $\mathbf{b}^I(0) = 0$ (pues en caso de ofertar positivo y ganar, el payoff ser ía negativo).

Ahora el conjunto de valoraciones de los demás agentes para las cuales i gana.

$$\left\{ b_i > \max_{j \neq i} \left\{ \mathbf{b}^I(t_j) \right\} \right\} = \left\{ b_i > \mathbf{b}^I(Y_1) \right\} = \left\{ \left(\mathbf{b}^I\right)^{-1} b_i > Y_1 \right\}$$

Denotamos por G la distribución de Y_1 (Y_1 es la valoración más alta entre las de los demás agentes). Si la estructura de información es independiente y simétrica tenemos que $G = F^{N-1}$ y su densidad g es $g = (N-1)\, F^{N-2} f$. Entonces la probabilidad de ganar con una oferta b_i es la probabilidad que i le atribuye al conjunto:

$$\left\{ b_i > \max_{j \neq i} \left\{ \mathbf{b}^I(t_j) \right\} \right\}$$

que es:

$$G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))$$

Por lo tanto el payoff (interim) del jugador i se puede escribir como:

$$E_{-i}[\pi_i \mid T_i = t_i] = G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))(t_i - b_i)$$

Las condiciones de primer orden con respecto a b_i son:

$$\frac{g(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))}{\frac{d\mathbf{b}^I\left(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i)\right)}{dt}}(t_i - b_i) - G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i)) = 0$$

Ahora si existe un equilibrio simétrico entonces $\mathbf{b}^I(t_i) = b_i$ y las CPO se reducen a:

$$\begin{aligned}
\frac{g(t_i)}{\frac{d\mathbf{b}^I(t_i)}{dt}}(t_i - b_i) - G(t_i) &= 0 \\
&\Rightarrow \\
\frac{d\left(G(t)\mathbf{b}^I(t)\right)}{dt} &= tg(t) \\
&\Rightarrow \\
\mathbf{b}^I(t) &= \frac{1}{G(t)}\int_0^t yg(y)dy \\
&= E[Y_1 \mid Y_1 < t].
\end{aligned}$$

Es fácil mostrar que en efecto $\mathbf{b}^I$ es un equilibrio creciente simétrico:

Primero obsérvese que $\mathbf{b}^I$ es creciente y diferenciable. Vamos a demostrar que no existe ningun incentivo a desviarse de esa estrategia. Supongamos que el jugador i tiene una valoracipón t y supongamos que ofrece b donde $\mathbf{b}^I(z) = b$. Es decir, el ofrece como si su valoración fuera z.[4] El payoff esperado es:

$$\begin{aligned}
E_{-i}[\pi_i(b, \mathbf{b}^I_{-i}(T_{-i}), t, T_{-i})] &= G(z)(t - \mathbf{b}^I(z)) \\
&= G(z)t - G(z)\mathbf{b}^I(z) \\
&= G(z)t - \int_0^z yg(y)dy \\
&= G(z)(t-z) + \int_0^z G(y)dy \\
&= G(z)(t-z) + \int_0^z G(y)dy
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
& E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}^I(t), \mathbf{b}^I_{-i}(T_{-i}), t, T_{-i})] - E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}^I(z), \mathbf{b}^I_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})] \\
= \; & G(z)(t-z) - \int_t^z G(y)dy \\
\geq \; & 0.
\end{aligned}$$

Utilizando la definición de esperanza condicional la estrategia $\mathbf{b}^I$ se puede escribir como:

$$\mathbf{b}^I(t) = E_{-i}[Y_1 \mid Y_1 < t]$$

$$\mathbf{b}^I(t) = t - \int_0^t \frac{G(y)}{G(t)}dy \leq t$$

[4]Esta forma de replantear el problema es lo que se conoce como el mecanismo directo asociado a la subasta al primer precio.

El *pago esperado* de un agente con valoración t, $m^I(t)$ es:

$$\begin{aligned} m^I(t) &= G((\mathbf{b}^I)^{-1}(\mathbf{b}^I(t)))E_{-i}[E_{-i}[Y_1 \mid t > Y_1] \mid t > Y_1] \\ &= G(t)E_{-i}[Y_1 \mid t > Y_1] \\ &= m^{II}(t) \end{aligned}$$

Obsévese que $m^I(t) = m^{II}(t)$. Este es un caso particular del *teorema de equivalencia del ingreso esperado para el subastador*.

Por último obsérvese que subasta es eficiente desde el punto de vista social: el bien es asigandao al que más lo valora.

Ejemplo 12 (Información uniforme) *Si la estructura de información es uniforme en* $[0, 1]$ *entonces*

$$\mathbf{b}^I(t) = \frac{N-1}{N}t$$

Ejemplo 13 (Información exponencial) *Si la estructura de información es exponencial en* $[0, \infty)$, $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ *para algún* $\lambda > 0$ *y si solo hay dos agentes (*$N = 2$*) entonces*

$$\mathbf{b}^I(t) = \frac{1}{\lambda} - \frac{t\exp(-\lambda t)}{1 - t\exp(-\lambda t)}$$

5.4. Subastas abiertas y la relación entre los diferentes formatos de subastas

La subasta al primer precio y la subasta holandesa son estratégicamente equivalentes. Además el resultado es independiente de la estructura de información, valoración o actitud frente al riesgo. Por eso decimos que es una equivalencia fuerte.

Bajo el supuesto de valores privados, la subasta inglesa es equivalente a la subasta al segundo precio. Sin embargo, la equivalencia no es estrategica (la estructura de valoración es importante). Por decimos que la equivalencia es débil.

5.5. Equivalencia del ingreso esperado para el subastador

Supongamos que estamos bajo las condiciones del modelo estándar.

Supongamos que el pago esperado de un jugador con valoración privada cero es cero (por ejemplo, bajo los cuatro formatos de subastas estándar).

Teorema 1 (Teorema de Equivalencia del Ingreso para el Subastador) *Bajo las condiciones enunciadas arriba, cualquier equilibrio simétrico creciente genera el mismo ingreso esperado al subastador.*

Prueba. Sea $m^A(t)$ el pago esperado de un individuo con valor t en una subasta A y $\mathbf{b}^A(t)$ un equilibrio creciente simétrico. Por hipótesis $m^A(0) = 0$. El payoff esperado del jugador que reporta $\mathbf{b}_i^A(z)$ (como si su valoración hubiera sido z) es:

$$E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}_i^A(z), \mathbf{b}_{-i}^A(T_{-i}), t, T_{-i})] = G(z)t - m^A(z).$$

Las condiciones de primer orden con respecto a z evaluadas en $z = t$ son:

$$\begin{aligned} \frac{dm^A(y)}{dy} &= yg(y) \\ &\Longrightarrow \\ m^A(t) &= G(t)E_{-i}[Y_1 \mid Y_1 < t]. \end{aligned}$$

Lo que muestra que el pago esperado de cada jugador es independiente del mecanismo particular de la subasta. ■

Nota técnica 2 *El teorema se puede extender al caso en que los agentes tienen valoraciones interdependientes.*

Nota técnica 3 *Obsérvese que la demostración depende de que los agentes son neutros al riesgo.*

Ejemplo 14 *Si la estructura de información es uniforme en* $[0, 1]$ *entonces*

$$m^A(t) = \frac{N-1}{N}t^N$$

y el ingreso esperado del subastador, $E[R^A]$ *es:*

$$E[R^A] = NE[m^A] = \frac{N-1}{N+1}$$

- Si el subastador es averso al riesgo el prefiere la subasta al primer precio que al segundo precio. La subasta al segundo precio genera ingresos más volátiles. En la subasta al segundo precio las ofertas están en $[0, w]$. En la subasta al primer precio están en $[0, E[Y_1 \mid Y_1 < t]] \subset [0, E[Y_1]]$.

- Aplicaciones del teorema de equivalencia de ingresos: Subastas todos pagan, guerra del desgaste, subasta al tercer precio e incertidumbre en el número de jugadores (en este útimo caso la oferta es un promedio ponderado de las ofertas cuando sabe el número de participantes).

5.6. Precio reserva

- Supongamos que el subastador anuncia un precio mínimo al que está dispuesto a vender el objeto.

5.6.1. Subasta al segundo precio

- Cuando el segundo precio es menor que el precio de reserva, el ganador paga el precio de reserva.
- En la subasta al segundo precio la estrategia de revelar la verdad es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente). Independientemente de lo que los demás hagan:
  - Si la valoración es mayor o igual que el precio de reserva es óptimo revelar la valoración.
  - Si es menor, no hay ninguna posibilidad de obtener un payoff positivo. En este caso revelar la verdad es indiferente para el agente.
  - Sea F_r es la distribución de $max\{r, Y_1\}$.
  - El pago esperado de un agente con valoración t en una subasta con precio de reserva $r < t$ es (si $t = r$ es simplemente $rG(r)$):

$$\begin{aligned}\int_0^x ydF_r &= \int_0^r ydF_r + \int_r^x ydF_r \\ &= \int_0^r ydF_r + \int_r^x ydG \\ &= rG(r) + \int_r^x ydG \\ &= rG(r) + \int_r^x yg(y)dy\end{aligned}$$

  - Obsérvese que cuando $t = r$:

$$m^{II}(r, r) = G(r)r$$

5.6.2. Subasta al primer precio

- Un análisis similar al que hemos hecho anteriormente muestra que cuando $t \geq r$ la estrategia

$$b^I(t, r) = E_{-i}\left[\text{máx}\{r, Y_1\} \mid t > Y_1\right]$$

  es un equilibro de Nash - Bayesiano.

5.6.3. Optimalidad para el subastador

- Obsérvese que:

$$m^I(t, r) = m^{II}(t, r)$$

  luego el ingreso esperado del subastador es el mismo aún con precios de reserva.

- Estudiemos ahora cuál es el efecto del precio de reserva sobre el ingreso esperado el subastador, $E\left[m^A(T,r)\right]$.
- Si el valor del objeto para el subastador es t_0 entonces el ingreso esperado para el subastador es:
$$NE[m^A(t,r)] + F(r)^N t_0$$
- No es dificil mostrar que el precio de reserva r^* que maximiza el ingreso esperado del subastador satisface:
$$r^* - \frac{1}{\lambda(r^*)} = t_0$$
donde $\lambda(r^*) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$.

Obsérvese que $r^* > t_0$ luego es óptimo para el subastador colocar un precio de reserva superior a su valoración.

En particular, de esta forma el subastador va a excluir de la subasta a jugadores con valoraciones inferiores a su precio de reserva (aún cuando éstos tengan valoraciones superiores a su propia valoración x_0). Esto se conoce como el principio de exclusión.

La subasta óptima es ineficiente (el objeto puede quedarse sin vender aún cuando los agentes tengan valoraciones por el objeto superior a las del subastador). Esto se conoce como el principio de exclusión.

El precio de reserva depende de la estrutura de información de los jugadores. En este sentido la subasta con precio de reserva óptimo no es libre de detalles.

Ejercicio 4 *Supongamos que solo hay dos agentes, la valoración para el subastador es cero y la estructura de información es uniforme en* $[0,1]$. *Mostrar que* $r^* = \frac{1}{2}$ *y* $E\left[m^A(T,r)\right] = \frac{5}{12}$.

- Un instrumento alternativo para aumetar los ingresos del subastador es colocar una cuota de participación. Ésta tiene el mismo efecto que el precio de reserva.

6. Aplicación: Diseño de mecanismos

- La teoría del diseño de mecanismos es una teoría dual de la teoría de juegos.
- Informalmente su principal problema es, dada una asignación de recursos, encontrar y estudiar el mecanismo (reglas de juego) tales que nuestra mejor predicción del resultado de la interacción de un conjunto de agentes (solución del juego) sea la asignación dada. Este se llama el problema de implementación.
- El principal ejemplo de un mecanismo son las subastas.
- Estas notas se concentran en el caso de mecanismos estáticos.

6.1. Elementos básicos

- Sea $\mathcal{I} = \{1, 2, ..., I\}$ un conjunto de agentes.
- La información privada de cada agente la representamos por un conjunto de tipos T^i. Denotamos por T el conjunto de tipos de todos los agentes, $T = T^1 \times ... \times T^I$ y la distribución con la que se realizan los tipos la denotamos por π. Es decir, π es una distribución de probabilidad sobre T.

Definición 9 (Mecanismos) *Un mecanismo es (M, F, Y), donde para cada agente i, M^i es un conjunto de mensajes posibles del agente i, $M = \prod M^i$ es el conjunto de los mensajes posibles de todos los agentes y , Y es un espacio de resultados y $F : M \longrightarrow Y$ es una regla de asignación del espacio de mensajes en los resultados.*

Definición 10 (Preferencias) *Definimos por $\mathbb{P}$ el conjunto de todas las relaciones de preferencia racionales sobre Y. Cada agente tiene preferencias en el conjunto $\mathbb{P}^i_{\succcurlyeq} = \left\{\succcurlyeq^i : \succcurlyeq^i = \succcurlyeq (t), t \in T\right\}$. Por simplicidad vamos suponer que las preferencias son tomadas de un conjunto de preferencias representables por una función de utilidad $u^i : Y \times T \to \mathbb{R}$ y definimos $\mathbb{P}^i_u = \left\{u^i(, t) : t \in T\right\}$.*

- Trabajaremos con el conjunto $\mathbb{P}^i_u$ pero en ocasiones será necesario trabajar en $\mathbb{P}^i_{\succcurlyeq}$. Obsérvese que $\mathbb{P}^i_u \subseteq \mathbb{P}^i_{\succcurlyeq} \subseteq \mathbb{P}$.
- La función de utilidad de cada agente es una función $u^i : Y \times T \longrightarrow \mathbb{R}$. Alternativamente, la función de utilidad de cada agente es: $\widetilde{u}^i : M \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $\widetilde{u}^i(m, t) = u^i(F(m), t)$.
- Decimos que el mecanismo es de valoración privada si la función de utilidad de los agentes no depende del tipo de los demás.

Definición 11 (Correspondencia de elección social) *Una correspondencia social es una $F^S : T \rightrightarrows 2^Y \diagdown \emptyset$.*

- Intuitivamente, si el tipo de los agentes es $t \in T$ un planificador busca implementar un resultado en $F^S(t)$.
- Típicamente vamos a estar interesados en correspondencias sociales que son eficientes o óptimas en algún sentido.

Definición 12 (Eficiencia ex-post) *Una correspondencia F^S es eficiente ex-post si para todo $t \in T$, $F^S(t)$ es un conjunto de resultados eficientes (en el sentido de Pareto).*

- Todo mecanismo define un juegos de información incompleta:

$$G = (I, (M_i)_{i \in I}, (T_i)_{i \in I}, (\widetilde{u}^i)_{i \in I}, \pi) \tag{12}$$

- Fijemos un mecanismo (M, F, Y).

Definición 13 (Estrategia) *Una estrategia para el jugador i es una función $s^i : T^i \to M^i$.*

- Obsérvese que la estrategia depende únicamente de la información privada del agente.

6.2. Conceptos de solución

Definición 14 (Dominancia) *Una estrategia s^i domina débilmente $\widetilde{s}^i$ si:*

$$u^i\left(F \circ \left(s^i\left(t^i\right), m^{-i}\right), t\right) \geq u^i\left(F \circ \left(\widetilde{s}^i\left(t^i\right), m^{-i}\right), t\right)$$

$\forall m^{-i} \in M^{-i}$ and $\forall t \in T$ con desigualdad estricta para algun t y m^{-i}.

- Una estrategia es débilmente dominante si domina débilmente a cualquier otra estrategia.[5]

Definición 15 (Equilibrio en estrategias dominantes débilmente) *Un equilibrio estrategias dominantes débilmente del mecanismo $\langle \Gamma, M, F, Y \rangle$ es una estrategia conjunta $\overline{s} = \left(\overline{s}^1, ..., \overline{s}^I\right), \overline{s}^i : T^i \longrightarrow M^i$, tal para cada i, $\overline{s}^i$ es una estrategia débilmente dominante.*

Definición 16 (Equilibrio ex-post o Nash) *Un equilibrio ex-post del mecanismo $\langle \Gamma, M, F, Y \rangle$ es una estrategia conjunta $\overline{s} = \left(\overline{s}^1, ..., \overline{s}^I\right), \overline{s}^i : T^i \longrightarrow M^i$, tal que:*

$$u^i\left(F \circ \overline{s}\left(t\right), t\right) \geq u^i\left(F \circ \left(s^i\left(t^i\right), \overline{s}^{-i}\left(t^{-i}\right)\right), t\right)$$

$\forall i \in \mathcal{I}, \forall t \in T$ para todas las estrategias $s^i : T^i \longrightarrow M^i$.

- Este es un equilibrio de Nash del juego de información completa una vez revelada la información de todos los jugadores.

Definición 17 (Nash Bayesiano interim) *Un equilibrio de Nash Bayesiano interim de un mecanismo (Γ, M, F, Y) es un estrategia conjunta $\overline{s} = \left(\overline{s}^1, ..., \overline{s}^I\right)$, $\overline{s}^i : T^i \longrightarrow M^i$, tal que:*

$$\int_{T^{-i}} u^i\left(F \circ \overline{s}\left(t\right), t\right) d\widehat{\pi}^i\left(t^i\right) \tag{13}$$

$$\geq \int_{T^{-i}} u^i(F \circ \left(s^i\left(t^i\right), \overline{s}^{-i}\left(t^{-i}\right)\right), t) d\widehat{\pi}^i\left(t^i\right) \tag{14}$$

$\forall i \in \mathcal{I}, \forall t^i \in T^i$ y todas las estrategias $s^i : T^i \longrightarrow M^i$.

Definición 18 (Nash Bayesiano ex- ante) *Un equilibrio de Nash Bayesiano ex- ante de un mecanimso $\langle \Gamma, M, F, Y \rangle$ es una estrategia conjunta $\overline{s} = \left(\overline{s}^1, ..., \overline{s}^I\right)$, $\overline{s}^i : T^i \longrightarrow M^i$, tal que:*

$$\int_T u^i\left(F \circ \overline{s}\left(t\right), t\right) d\pi \geq \int_T u^i\left(F \circ \left(s^i\left(t^i\right), \overline{s}^{-i}\left(t^{-i}\right)\right), t\right) d\pi \tag{15}$$

$\forall i \in \mathcal{I}$, y para todas las estrategias $s^i : T^i \longrightarrow M^i$.

[5] Existe una definición natural de estrategias dominantes en un sentido interim. Se deja como ejercicio mostrar que, por lo menos para el caso de mecanismos de información privada, es equivalente a la definición anterior.

6.3. Implementación y el principio de revelación

Definición 19 (Implementación) *Una correspondencia social F^s es implementable (en estrategias débilmente dominantes, ex-post, interim), si existe un mecanismo (M, F, Y) y un equilibrio $\overline{s}$ tal que $F(\overline{s})$ es consistente con F^S (i.e., $F(\overline{s})$ es una selección de F^S: Para todo t, $F(\overline{s}(t)) \in F^S(t)$). Si para todo equilibrio $\overline{s}$ del mecanismo, $F(\overline{s}(t)) \in F^S(t)$ decimos que es fuertemente implementable.*[6] *Si adicionalmente para todo t, todos los elementos de $F(t)$ son equilibrios del (M, F, T) y solo estos, decimos que la implementación es completa.*[7]

Definición 20 (Mecanismos directos) *Un mecanismo (M, F, Y) es directo si $M^i = T^i$. En este caso escribimos $f = F$ y denotamos el mecanismo como (T, f, Y).*

Definición 21 (Compatibilidad en incentivos) *Un mecanismo directo (T, f, Y) es compatible en incentivos (en estrategias dominantes débilmente, ex post, interim) si la identidad $i_d : T^i \longrightarrow T^i$ es un equilibrio (en estrategias débilmente dominantes, ex post, interim). En ese caso se dice que el mecanismo es revelador de la verdad.*

- Obsérvese que la noción de compatibilidad en incentivos (CI) ex post supone que revelar la verdad es óptimo dado que los demás están revelando la verdad.
- Obsérvese que si los valores son privados, CI ex-post cuando las estrategias son funciones sobreyectivas, es equivalente a CI en estrátegias débilmente dominantes.
- Sea (M, F, Y) un mecanismo y $\overline{s}$ un equilibrio.
- El principio de revelación afirma que existe un mecanismo directo (T, f, Y) en el que decir la verdad reproduce el resultado del equilibrio $\overline{s}$. Esto es, si t es el tipo de los jugadores entonces $\overline{y}(t) = F(\overline{s}(t))$ es el resultado de equilibrio. Decimos que un mecanismo directo reproduce el anterior resultado de equilibrio si $f(t) = F(\overline{s}(t))$.

Teorema 2 (Principio de revelación) *Sea (M, F, Y) un mecanismo y $\overline{s}$ un equilibrio. Entonces existe (T, f, Y) un mecanismo directo tal que:*

1. *Es compatible en incentivos (i.e., i_d es un equilibrio).*
2. $f(t) = F(\overline{s}(t))$

Prueba. Sea $M^i = T^i$ y $f = F(\overline{s})$. Es fácil ver que este es un mecanismo compatible en incetivos que reproduce el equilibrio original. ■

[6] En ocasiones este tipo de implementación se denomina implementación parcial.

[7] La literatura especializada hace una diferenciación formal entre el problema de implementación y el problema de diesnño de mecanismos. Estrictamente el problema de implementación corresponde a lo que hemos denominado implementación completa y el problema de disenño de mecanismos corresponde a lo que hemos llamado simplemente implementación.

Definición 22 (Implementación compatible en incentivos) *Una correspondencia social F^S es implementable compatible en incentivos si existe un mecanismo directo compatible en incentivos (en estrategias débilmente dominates, ex poxt, interim) tal que f es consistente con F^S (i.e., f es una selección de F^S: para todo t, $f(t) \in F^S(t)$).*

7. Aplicación: Economía de la Información