

# Teoría de Subastas de una Única Unidad

Alvaro J. Riascos Villegas

Marzo de 2019

## Introducción a la Teoría de Subastas

Subasta al segundo precio

Subasta al primer precio

Equivalencia entre subastas

Identificación y refutabilidad

Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado

Subastador averso al riesgo

Desviaciones del Modelo Estándar

Precio de Reserva y Costos de Entrada

# Contenido

- 1 Introducción a la Teoría de Subastas
- 2 Subasta al segundo precio
- 3 Subasta al primer precio
- 4 Equivalencia entre subastas
- 5 Identificación y refutabilidad
- 6 Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
- 7 Subastador averso al riesgo
- 8 Desviaciones del Modelo Estándar
- 9 Precio de Reserva y Costos de Entrada

## Introducción

- Las subastas son un mecanismo de asignación de recursos y formación de precios.
- Son un mecanismo universal y anónimo.
- Taxonomía:
  - Tipo de bien (unitarias, multiunidades o múltiples objetos).
  - Estructura de información (independiente o afiliadas).
  - Estructura de valoración (privada, interdependiente, común).

- Tipos de subastas:
  - Para subastas unitarias existen cuatro subastas básicas.
    - Primer precio (cerrada)
    - Segundo precio (cerrada)
    - Inglesa (abierta)
    - Holandesa (abierta)
- Otros ejemplos de subastas son:
  - Subastas al tercer precio.
  - Todos pagan.
  - Guerra del desgaste: con dos jugadores gana el que más oferta pero todos pagan la segunda más alta.
  - Una lotería (ésta, sin embargo, no es una subasta estándar; una subasta es estándar cuando el ganador es el que más ofrece por el bien).

- Las preguntas fundamentales que se hace la teoría son:
  - Existencia del equilibrio del juego bayesiano inducido.
  - Equivalencia en asignación de recursos y precios de equilibrio.
  - Optimalidad para el subastador.
  - Bienestar social: beneficios de las firmas y excedente del consumidor (e.g., mercado mayorista de energía). ¿Qué tan lejos está el equilibrio del equilibrio eficiente (la literatura estudia esto bajo los nombres de precio de la anarquía y precio de la estabilidad).
  - Incentivos a coludir.
  - Simplicidad de las reglas.
  - Identificación y refutabilidad.

- El modelo estándar tiene la siguiente estructura:
  - Estructura de información independiente y simétrica.
  - Estructura de valoración privada y agentes neutros al riesgo.
  - En particular, agentes simétricos.

- El modelo estándar es un juego de información incompleta con la siguiente estructura:

$$BG = (N, (R_+)_{i \in N}, ([0, \omega])_{i \in N}, (\pi_i)_{i \in N}, F)$$

- $N$  es un conjunto de jugadores (finito).
- El conjunto de acciones es el mismo para todos:  $A = R_+$
- El conjunto de información, que en este caso lo interpretamos como la valoración privada que del objeto tiene el agente, es el mismo para todos:  $X_i = [0, \omega]$ .
- Denotamos por  $F$  la distribución sobre  $X_i$ , el conjunto de información individual.
- $F$  tiene densidad  $f$ .
- $\pi_i : R_+^N \times [0, \omega]^N \rightarrow R$  es el payoff de cada jugador y su forma específica depende del tipo de subasta que estemos considerando.

## Contenido

- 1 Introducción a la Teoría de Subastas
- 2 Subasta al segundo precio**
- 3 Subasta al primer precio
- 4 Equivalencia entre subastas
- 5 Identificación y refutabilidad
- 6 Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
- 7 Subastador averso al riesgo
- 8 Desviaciones del Modelo Estándar
- 9 Precio de Reserva y Costos de Entrada



## Subasta al segundo precio

- En esta subasta cada agente observa su valoración  $x_i \in X_i$  y escribe en un sobre su oferta por el bien. Gana el jugador que más ofrezca y paga la segunda oferta más alta. En caso de empate se asigna el objeto aleatoriamente entre los ganadores y se paga lo ofertado.
- El payoff de los agentes es:

$$\begin{aligned}\pi_i &: R_+^N \times [0, \omega]^N \rightarrow R \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, x_i, x_{-i}) &= x_i - \max_{j \neq i} \{b_j\} \text{ si } b_i > \max_{j \neq i} \{b_j\} \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, x_i, x_{-i}) &= 0 \text{ si } b_i < \max_{j \neq i} \{b_j\}\end{aligned}$$

# Subasta al segundo precio

- La expresión del payoff pone en evidencia algunos de los supuestos que hicimos anteriormente (valoración privada y neutralidad al riesgo).
- La estrategia de revelar la verdad para cada jugador,  $\mathbf{b}''(x_i) = x_i$  es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente).
- Obsérvese que la estrategia es la misma para cada jugador. Esto es lo que se conoce como un equilibrio simétrico.
- Este equilibrio es independiente de la estructura de información (en particular vale aún en el caso en que la información es correlacionada o los conjuntos de información son diferentes)
- El argumento anterior también funciona cuando los agentes son aversos al riesgo.

# Subasta al segundo precio

- Demostración: Supongamos que cada agente observa su valoración privada y hace una oferta por el bien.
- Fijemos un agente, digamos el agente  $i$  y concentrémonos en su estrategia. Sea  $Y_1 = \max_{j \neq i} \{b_j\}$ .  $Y_1$  determina si el agente  $i$  gana o no.
- Primero algunas observaciones:  $\mathbf{b}_i(x_i) > x_i$  no es racional (en el sentido débil) pues la estrategia  $\bar{\mathbf{b}}_i$  que es igual  $\mathbf{b}_i$  en todas partes excepto en  $x_i$ , donde es revelar la verdadera valoración, la domina débilmente - cuando la valoración es  $x_i$ , el payoff del agente nunca es menor y con probabilidad positiva es mayor.
- El argumento es independiente de las estrategias utilizadas por los demás jugadores.

# Subasta al segundo precio

- Si  $b_i(x_i) < x_i$  pueden suceder tres cosas:

	Payoff		
	Estrategia $b_i$	Estrategia $b''$	
$Y_1 < b_i < x_i$	$i$ gana	$x_i - Y_1$	$x_i - Y_1$
$b_i < Y_1 < x_i$	$i$ pierde	0	$x_i - Y_1$
$b_i < x_i \leq Y_1$	$i$ pierde	0	0

- Comparando con el resultado que hubiera tenido de utilizar la estrategia de revelar la verdad, es claro que esta última domina.

# Subasta al segundo precio

- Formalmente lo que hemos hecho es demostrar que la estrategia  $\mathbf{b}''(x_i) = x_i$  domina a cualquier otra estrategia  $\mathbf{b}_i$ . Esto es:

$$\pi_i(x_i, \mathbf{b}_{-i}, x_i, x_{-i}) \geq \pi_i(\mathbf{b}_i(x_i), \mathbf{b}_{-i}, x_i, x_{-i})$$

para todo  $x \in X$  y  $\mathbf{b}_{-i}$ .

- Obsérvese que en ninguna parte utilizamos la estructura de información.
- Es fácil extender el argumento al caso en que los agentes son aversos al riesgo.

# Subasta al segundo precio

- El *pago esperado* de un jugador (al subastador) con valoración  $x$ ,  $m''(x)$  es:

$$m''(x) = G(x)E_{-i}[Y_1 | x > Y_1]$$

donde  $G(x)$  es la probabilidad de ganar (la probabilidad que el agente le atribuye al conjunto  $[x > Y_1]$ , es decir, la distribución de  $Y_1$  y  $E_{-i}[Y_1 | x > Y_1]$  es el pago esperado del agente dado que es ganador).

- Para ver esto comencemos de principios básicos.

## Subasta al segundo precio

- Para obtener la fórmula anterior es necesario saber un poco de probabilidad (aunque intuitivamente esa fórmula es correcta).
- Sea  $m^{\prime\prime}(x, x_{-i})$  el pago en equilibrio de un jugador con valoración  $x$  cuando todos los demás tienen valoración  $x_{-i}$ .

$$m^{\prime\prime}(x, x_{-i}) = I_{[x > Y_1]} Y_1$$

donde  $I_{[x > Y_1]}$  es la función indicadora del conjunto  $\{x > Y_1\}$ .

- Si ahora marginalizamos sobre  $x_{-i}$  usando la distribución  $F^{N-1}$  obtenemos  $m^{\prime\prime}(x)$ , el pago esperado de cada jugador cuando su valoración privada es  $x$ .
- Obsérvese que la distribución de  $G$  de  $Y_1$  es  $F^{N-1}$ . Luego:

$$\begin{aligned} m^{\prime\prime}(x) &= \int I_{[x > Y_1]} Y_1 dF^{N-1} = \int I_{[x > Y_1]} Y_1 dG \\ &= \int_{[x > Y_1]} Y_1 dG = \int_0^x y dG(y) \end{aligned}$$

## Interludio: Esperanza Condicional

- Ahora una definición: Dada una variable aleatoria  $X$  con valores en  $[0, \omega]$ , el valor esperado de  $X$  condicional a  $X \leq x$  es por definición:

$$E[X|X \leq x] = \frac{1}{F(x)} \int_0^x yf(y)dy \quad (1)$$

donde  $F$  y  $f$  es la distribución y densidad de  $X$  respectivamente.

- Si aplicamos esta definición a  $X = Y_1$  obtenemos la fórmula que queríamos.



# Subasta al segundo precio

- Obsérvese que la subasta al segundo precio asigna eficientemente el objeto entre los participantes.

## Contenido

- 1 Introducción a la Teoría de Subastas
- 2 Subasta al segundo precio
- 3 Subasta al primer precio**
- 4 Equivalencia entre subastas
- 5 Identificación y refutabilidad
- 6 Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
- 7 Subastador averso al riesgo
- 8 Desviaciones del Modelo Estándar
- 9 Precio de Reserva y Costos de Entrada

## Subasta al primer precio

- En esta subasta los agentes observan su valoración (información) y hacen una oferta. Gana el que oferte más alto y paga lo ofertado. En caso de empate se asigna aleatoriamente.
- El payoff de los agentes es:

$$\begin{aligned}\pi_i & : R_+^I \times [0, \omega]^I \rightarrow R \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, x_i, x_{-i}) & = x_i - b_i \text{ si } b_i > \max_{j \neq i} \{b_j\} \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, x_i, x_{-i}) & = 0 \text{ si } b_i < \max_{j \neq i} \{b_j\}\end{aligned}$$

- Existe un compromiso claro entre ofertar alto y el pago.

# Subasta al primer precio

- Nos vamos a concentrar en el equilibrio simétrico.
- En este caso no existe un equilibrio en estrategias dominantes.
- Vamos a caracterizar el equilibrio de Nash-Bayesiano.
- Supongamos que  $i$  tiene una valoración  $x_i$  y ofrece  $b_i \in R_+$ .
- Supongamos que todos los jugadores  $j \neq i$  utilizan una estrategia  $\mathbf{b}'$  diferenciable y creciente.
  - Es claro que  $b_i \leq \mathbf{b}'(\omega)$ .
  - También es fácil de ver que si  $x_i = 0$  entonces  $b_i = 0$  y  $\mathbf{b}'(0) = 0$ .

- Entonces,

$$\left\{ b_i > \max_{j \neq i} \{ \mathbf{b}'(x_j) \} \right\} = \left\{ b_i > \mathbf{b}'(Y_1) \right\} = \left\{ (\mathbf{b}')^{-1} b_i > Y_1 \right\}$$

- Denotamos por  $G$  la distribución de  $Y_1$  (la probabilidad de recibir la valoración más alta).
- Si la estructura de información es independiente y simétrica tenemos que  $G = F^{N-1}$  y su densidad  $g$  es  $g = (N-1) F^{N-2} f$ .
- Entonces la probabilidad de ganar con una oferta  $b_i$  es:

$$P \left( \left\{ b_i > \max_{j \neq i} \{ \mathbf{b}'(x_j) \} \right\} \right) = G((\mathbf{b}')^{-1}(b_i))$$

# Subasta al primer precio

- El pago (interim) del jugador  $i$  es:

$$E_{-i}[\pi_i | X_i = x_i] = G((\mathbf{b}')^{-1}(b_i))(x_i - b_i)$$

- Las condiciones de primer orden con respecto a  $b_i$  son:

$$\frac{g((\mathbf{b}')^{-1}(b_i))}{\frac{d\mathbf{b}'((\mathbf{b}')^{-1}(b_i))}{dx}}(x_i - b_i) - G((\mathbf{b}')^{-1}(b_i)) = 0$$

# Subasta al primer precio

- Si existe un equilibrio simétrico entonces  $\mathbf{b}'(x_i) = b_i$  y las CPO se reducen a:

$$\frac{g(x_i)}{\frac{d\mathbf{b}'(x_i)}{dx}} (x_i - \mathbf{b}'(x_i)) - G(x_i) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d(G(x)\mathbf{b}'(x))}{dx} = xg(x)$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{b}'(x) = \frac{1}{G(x)} \int_0^x yg(y)dy$$

$$\equiv E[Y_1 | Y_1 < x]$$

- Obsérvese que:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(x) &= \frac{1}{G(x)} \int_0^x yg(y)dy \\ &< \frac{1}{G(x)} \int_0^x xg(y)dy = x \end{aligned}$$



# Subasta al primer precio

- El pago esperado de un individuo es:

$$m'(x) = G(x)b'(x) = G(x)E[Y_1 | Y_1 < x] \quad (2)$$

- Obsérvese que dado que el jugador es ganador, su pago esperado es simplemente  $b'(x)$ .
- Luego  $m'(x) = m''(x)$ : El pago esperado de cada jugador es el mismo luego el pago esperado para el subastador es el mismo en la subasta al primer precio y segundo precio.
- Por la simetría del equilibrio y la monotonidad es fácil ver que la subasta asigna eficientemente el objeto entre los participantes.

## Example

Si la estructura de información es uniforme en  $[0, 1]$  entonces

$$\mathbf{b}'(x) = \frac{N-1}{N}x$$

## Contenido

- 1 Introducción a la Teoría de Subastas
- 2 Subasta al segundo precio
- 3 Subasta al primer precio
- 4 Equivalencia entre subastas**
- 5 Identificación y refutabilidad
- 6 Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
- 7 Subastador averso al riesgo
- 8 Desviaciones del Modelo Estándar
- 9 Precio de Reserva y Costos de Entrada

## Equivalencia entre subastas

- La subasta al primer precio y la subasta holandesa son estratégicamente equivalentes. Este resultado es independiente de la estructura de información, valoración o actitud frente al riesgo. Por eso decimos que es una equivalencia fuerte.
- Bajo el supuesto de valores privados, la subasta inglesa es equivalente a la subasta al segundo precio.

## Contenido

- 1 Introducción a la Teoría de Subastas
- 2 Subasta al segundo precio
- 3 Subasta al primer precio
- 4 Equivalencia entre subastas
- 5 Identificación y refutabilidad**
- 6 Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
- 7 Subastador averso al riesgo
- 8 Desviaciones del Modelo Estándar
- 9 Precio de Reserva y Costos de Entrada

Introducción a la Teoría de Subastas

Subasta al segundo precio

Subasta al primer precio

Equivalencia entre subastas

**Identificación y refutabilidad**

Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado

Subastador averso al riesgo

Desviaciones del Modelo Estándar

Precio de Reserva y Costos de Entrada

## Identificación y refutabilidad

- Las primitivas o fundamentales en una subasta son: Los jugadores, la estructura de información, las reglas de la subasta y los objetivos o utilidades de los jugadores.
- El problema de identificación es importante porque la teoría no ofrece ninguna guía sobre algunos no observables (por ejemplo, la estructura de información).
- La identificación no paramétrica implica que los estimadores tiene una interpretación válida sobre muestra finitas.

# Identificación y refutabilidad

- Sea  $\{X_i\}_{i \in I}$  un conjunto de variables latentes (no observables) y  $\mathcal{F}$  un conjunto de distribuciones sobre  $X = \prod_{i \in I} X_i$ . Los elementos de  $\mathcal{F}$  los denotamos por  $f$  o  $F_X$ .
- Sea  $\{Y_j\}_{j \in J}$  un conjunto de variables observables donde  $j$  es un conjunto finito y  $\mathcal{G}$  un conjunto de distribuciones sobre  $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ . los elementos de  $\mathcal{G}$  los denotamos por  $g$  o  $F_Y$ .

## Definition

Un modelo es un par  $(\mathcal{F}, \Gamma)$  donde  $\mathcal{F}$  es un conjunto de distribuciones de las variables latentes y  $\Gamma$  es un conjunto de funciones  $\gamma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ .

- La interpretación es, si  $F_X \in \mathcal{F}$  es la distribución de las variables latentes entonces  $\gamma(F_X) \in \mathcal{G}$  es la verdadera distribución de las variables observables.

## Definition

Un modelo  $(\mathcal{F}, \Gamma)$  es identificable si para todo  $(f, \tilde{f}) \in \mathcal{F}^2$ ,  
 $(\gamma, \tilde{\gamma}) \in \Gamma^2$ ,

$$\gamma(f) = \tilde{\gamma}(\tilde{f})$$

entonces  $(f, \gamma) = (\tilde{f}, \tilde{\gamma})$ .

- Intuitivamente, si dos modelos tienen las mismas consecuencias observacionales, entonces son iguales.

## Definition

Un modelo  $(\mathcal{F}, \Gamma)$  es refutable si  $\mathcal{G} \setminus \bigcup_{(f, \gamma) \in (\mathcal{F}, \Gamma)} \gamma(f) \neq \emptyset$ .



## Theorem

*Identificación y refutabilidad. Supongamos que estamos bajo las condiciones del modelo estándar: valores privados, estructura de información independiente y simétrica y agentes neutros al riesgo. Entonces:*

- 1 La distribución conjunta de las valoraciones está identificada con la sola observabilidad del precio de cierre.*
- 2 Si más de una oferta por subasta es observada o si los precios de cierres son observados con una variación exógena en los participantes, el modelo es refutable.*

# Identificación y refutabilidad

Demostración: sea  $Y^{(k)}$  el  $k$ -ésimo estadístico de  $\{X_1, \dots, X_n\}$  donde  $Y^{(1)}$  denota el máximo.

## Demostración.

- 1 Si  $F_X$  tiene cualquier distribución, y tenemos una muestra aleatoria (*i.i.d*) de tamaño  $n$  entonces cualquier estadístico de  $\{X_1, \dots, X_n\}$  determina de forma unívoca la distribución  $F_X$  :

$$F_X^{n-i+1}(z) = \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} \int_0^{F_X(z)} t^{n-i+1}(1-t)^{i-1} dt.$$

El lado derecho es estrictamente creciente en  $F_X(z)$  luego, como la distribución del precio de cierre es  $F_X^2$  esto identifica  $F_X$ . Finalmente, debido a la simetría e independencia, la distribución marginal  $F_X$  determina  $F_X$ .



## Contenido

- 1 Introducción a la Teoría de Subastas
- 2 Subasta al segundo precio
- 3 Subasta al primer precio
- 4 Equivalencia entre subastas
- 5 Identificación y refutabilidad
- 6 Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado**
- 7 Subastador averso al riesgo
- 8 Desviaciones del Modelo Estándar
- 9 Precio de Reserva y Costos de Entrada

## Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado para el Subastador

- Supongamos que estamos bajo las condiciones del modelo estándar.
- Supongamos que el pago esperado de un jugador con valoración privada cero es cero.
- Un ejemplo son los cuatro formatos de subastas discutidos anteriormente.

# Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado para el Subastador

## Theorem (Teorema de Equivalencia del Ingreso para el Subastador)

*Bajo las condiciones enunciadas arriba, cualquier equilibrio simétrico creciente genera el mismo ingreso esperado al subastador.*

- Sea  $m^A(x)$  el pago esperado de un individuo que dice tener valoración  $x$  en una subasta  $A$  y  $\mathbf{b}^A(x)$  un equilibrio creciente simétrico. Por hipótesis  $m^A(0) = 0$ . El payoff esperado del jugador que reporta  $\mathbf{b}_i^A(z)$  (como si su valoración hubiera sido  $z$ ) es:

$$E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}_i^A(z), \mathbf{b}_{-i}^A(X_{-i}), x, X_{-i})] = G(z)x - m^A(z).$$

# Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado para el Subastador

- Las condiciones de primer orden con respecto a  $z$  evaluadas en  $z = x$  son:

$$\begin{aligned}\frac{dm^A(y)}{dy} &= yg(y) \\ &\implies \\ m^A(x) &= G(x)E_{-i}[Y_1 | Y_1 < x].\end{aligned}$$

Lo que muestra que el pago esperado de cada jugador es independiente del mecanismo particular de la subasta.

# Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado para el Subastador

## Example

Si la estructura de información es uniforme en  $[0, 1]$  entonces

$$m^A(x) = \frac{N-1}{N}x^N$$

y el ingreso esperado del subastador,  $E[R^A]$  es:

$$E[R^A] = NE[m^A] = \frac{N-1}{N+1}$$

## Contenido

- 1 Introducción a la Teoría de Subastas
- 2 Subasta al segundo precio
- 3 Subasta al primer precio
- 4 Equivalencia entre subastas
- 5 Identificación y refutabilidad
- 6 Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
- 7 Subastador averso al riesgo**
- 8 Desviaciones del Modelo Estándar
- 9 Precio de Reserva y Costos de Entrada



## Subastador averso al riesgo

- Si el subastador es averso al riesgo el prefiere la subasta al primer precio que al segundo precio. La subasta al segundo precio genera un ingreso más volátil. En la subasta al segundo precio las ofertas están en  $[0, w]$ .
- En la subasta al primer precio están en  $[0, E[Y_1 \mid Y_1 < x]] \subset [0, E[Y_1]]$ .
- La distribución de las ofertas está en ambos casos determinada por  $F$ .

## Contenido

- 1 Introducción a la Teoría de Subastas
- 2 Subasta al segundo precio
- 3 Subasta al primer precio
- 4 Equivalencia entre subastas
- 5 Identificación y refutabilidad
- 6 Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
- 7 Subastador averso al riesgo
- 8 Desviaciones del Modelo Estándar**
- 9 Precio de Reserva y Costos de Entrada

## Desviaciones del Modelo Estándar

- Mantenemos dos de los supuestos básicos del modelo estándar: Valores privados e independencia de la información.
- Estudiamos el caso de
  - 1 Aversión al riesgo (pero jugadores simétricos en su utilidad)
  - 2 Asimetrías en la estructura de información.
- En la sección anterior vimos que en la subasta al segundo precio, aún con agentes aversos al riesgo, era un equilibrio en estrategias dominantes revelar la verdadera valoración. Por lo tanto el ingreso esperado del subastador es el mismo.

## Theorem

*Con agentes aversos al riesgo pero estructura de información simétrica, las ofertas en la subasta al primer precio son más altas que con agentes neutros al riesgo. Luego en este caso, el ingreso esperado para el subastador es mayor en la subasta al primer precio que en la subasta al segundo.*

# Desviaciones del Modelo Estándar: Asimetrías de Información

## Example

Consideremos la subasta al primer precio y supongamos que tenemos dos agentes.  $X_i \sim F_i$  distribuidas en  $[0, w_i]$ .

- Supongamos que existe un equilibrio creciente y diferenciable  $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j$ . El pago esperado de cada agente es:

$$E_{-i}[\pi_i | X_i = x] = F_{-i}(\mathbf{b}_j^{-1}(b))(x_i - b)$$

- Las condiciones de primer orden son:

$$\phi_j'(b) = \frac{F_j(\phi_j(b))}{f_j(\phi_j(b))} \frac{1}{(\phi_i(b) - b)}$$

donde  $\phi_j = \mathbf{b}_j^{-1}$ .

# Desviaciones del Modelo Estándar: Asimetrías de Información

## Example

- Este sistema de ecuaciones diferenciables puede utilizarse para demostrar que existe una solución junto con la condición de frontera  $\phi_i(0) = 0$ .
- Esto no es totalmente trivial pues en la frontera la ecuación es indeterminada.

# Desviaciones del Modelo Estándar: Asimetrías de Información

## Example (El caso uniforme)

Supongamos  $F_1$  y  $F_2$  son distribuciones uniformes con  $w_1 \geq w_2$ . Entonces las condiciones de primer orden se reducen

$$\phi'_i(b) = \frac{\phi_i(b)}{(\phi_j(b) - b)}$$

Es fácil demostrar que las siguientes estrategias son solución al sistema de ecuaciones diferenciables:

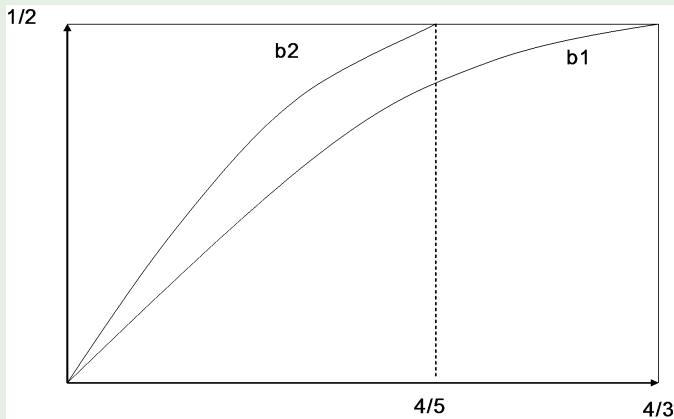
$$\mathbf{b}_i(x) = \frac{1}{\kappa_i x} \left( 1 - \sqrt{1 - \kappa_i x^2} \right)$$

donde  $\kappa_i = \frac{1}{w_i^2} - \frac{1}{w_j^2}$ .

# Desviaciones del Modelo Estándar: Asimetrías y Eficiencia

## Example

Cuando  $w_1 = \frac{4}{3}$  y  $w_2 = \frac{4}{5}$  entonces las soluciones tienen la forma:





# Desviaciones del Modelo Estándar: Asimetrías e Ingreso Esperado

- La subasta al segundo precio sigue siendo eficiente.
- La subasta al primer precio puede ser ineficiente con probabilidad positiva (considere el ejemplo donde  $w_1 = \frac{4}{3}$  y  $w_2 = \frac{4}{5}$ ).

# Desviaciones del Modelo Estándar: Asimetrías e Ingreso Esperado

- El mensaje principal es que no existe un ordenamiento unívoco del ingreso esperado del subastador en presencia de asimetrías.

# Desviaciones del Modelo Estándar: Carteles

- El estudio de la cartelización en una subasta puede interpretarse como otra desviación del modelo estándar en donde nos apartamos del supuesto de comportamiento no cooperativo y permitimos la formación de carteles o coaliciones.
- Las preguntas claves son:
  - ¿Cómo un cartel puede asegurar que se respetarán los arreglos a los que se ha llegado entre sus miembros?
  - ¿Cómo se reparten las ganancias de la colusión entre los miembros del cartel?
  - ¿Cómo deben responder los otros, en particular, el subastador?

# Desviaciones del Modelo Estándar: Carteles

- Nos enfocamos en el modelo estándar excepto que la estructura de información puede ser asimétrica (por simplicidad suponemos que todas las valoraciones están en el mismo intervalo).
- Es decir, mantenemos las hipótesis de valores privados e información independiente.
- Aún si los jugadores fueran ex ante simétricos, la presencia de carteles introduciría asimetrías entre ellos.
- Es del interés del cartel que el ganador sea aquel miembro con mayor valoración. Sin embargo, es necesario diseñar un mecanismo previo para determinar quién tiene la valoración más alta.

# Desviaciones del Modelo Estándar: Carteles

- Concentremonos en la subasta al segundo precio.
- La presencia de un cartel no afecta el comportamiento ni el pago esperado de los que están por fuera. Sigue siendo una estrategia dominante (débilmente) revelar la verdadera valoración.
- Para los miembros del cartel es una estrategia dominante (débilmente) hacer una oferta con la valoración más alta entre los miembros del cartel (y cero, o el precio de reserva todos los demás).

# Desviaciones del Modelo Estándar: Carteles

- Un cartel obtiene sus ganancias de disminuir la competencia en la subasta. En efecto, el pago esperado de los miembros del cartel es menor si no estuvieran cartelizados.
- Incrementar los miembros del cartel aumenta el beneficio del mismo. Luego, el cartel óptimo es aquel que reúne a todos los jugadores.
- Puesto que en la subasta al segundo precio el cartel no tiene ningún efecto sobre los no cartelizados, todo el beneficio de la colusión es a expensas del subastador.

# Desviaciones del Modelo Estándar: Carteles

- El análisis anterior está basado en que el cartel hacia una oferta igual a la valoración más alta que del objeto tienen sus miembros. Sin embargo, esta valoración es de valor privado para los mismo miembros y hay que diseñar un mecanismo para escoger esa valoración o el representante del cartel en la subasta.
- Para hacer esto se hace una subasta preliminar denominada PAKT (*preauction knockout*). En el caso de la subasta al segundo precio este PAKT es también una subasta en la que el ganador es el que ofrece más alto y le paga al centro (administrador del cartel) un valor que depende de el pago si no hubiera cartel.
- Este mecanismo fuerza a los jugadores a revelar la verdad pero no es balanceado excepto en términos esperados.

# Desviaciones del Modelo Estándar: Carteles

- Los arreglos colusivos son estables cuando el mecanismo de asignación es la subasta al segundo precio.
- A diferencia de la subasta al segundo precio, cuando el mecanismo de asignación es la subasta al primer precio, el cartel no es estable.



## Contenido

- 1 Introducción a la Teoría de Subastas
- 2 Subasta al segundo precio
- 3 Subasta al primer precio
- 4 Equivalencia entre subastas
- 5 Identificación y refutabilidad
- 6 Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
- 7 Subastador averso al riesgo
- 8 Desviaciones del Modelo Estándar
- 9 Precio de Reserva y Costos de Entrada**

## Precio de Reserva y Costos de Entrada

- Suponga que estamos bajo las condiciones del modelo estándar (valores privados, información independiente, agentes neutros al riesgo).
- Suponga que el subastador anuncia un precio de reserva  $r > 0$ .
- La subasta al segundo precio gana quién más oferta siempre y cuando sea superior al precio de reserva y paga  $\max\{r, Y_1\}$  donde  $Y_1$  es la segunda valoración más alta.
- En este caso sigue siendo un estrategia dominante ofertar su verdadera valoración.

# Precio de Reserva y Costos de Entrada

- El pago esperado para un jugador con  $x \geq r$  es (cero de lo contrario):

$$m^I(x, r) = rG(r) + \int_r^x yg(y)dy \quad (3)$$

- Para ver esto obsévese que de forma análoga al caso de la subasta al segundo precio:

$$m^I(x, r) = P(x > \max\{r, Y_1\})E_{-i}[\max\{r, Y_1\} \mid x > \max\{r, Y_1\}] \quad (4)$$

$$= \int_0^x \max\{r, y\}dF_r \quad (5)$$

donde  $F_r$  es la distribución de  $\max\{r, Y_1\}$ .

- Es fácil convencerse que  $F_r = G(x)$  si  $r \leq x$  y cero caso contrario.
- Ahora, descomponiendo la integral como una integral entre cero y  $r$  y otra entre  $r$  y  $x$  se obtiene lo que queríamos demostrar (véase nota técnica).

# Precio de Reserva y Costos de Entrada

- Se puede demostrar que el pago esperado ex ante de cada individuo al subastador es (usar integración por partes):

$$E[m^H(X, r)] = r(1 - F(r))G(r) + \int_r^{\omega} y(1 - F(y))g(y)dy \quad (6)$$

- Si el subastador tiene una valoración  $x_0$  por el objeto, es fácil mostrar que el precio de reserva óptimo  $r^* > x_0$ .
- El precio de reserva óptimo no depende del número de participantes, sólo depende de la distribución  $F$ .

- Con dos jugadores,  $x_0 = 0$ ,  $F$  uniforme en  $[0, 1]$  se puede demostrar (ejercicio) que el precio de reserva óptimo es  $\frac{1}{2}$  y el beneficio esperado para el subastador es  $\frac{5}{12}$ .

- Suponga que en vez de un precio de reserva el subastador anuncia un costo de participación:

$$e(r) = \int_0^r G(y) dy$$

- Se puede demostrar que este costo de entrada replica los mismo resultados que el precio de reserva  $r$  (usar integración por partes).

# Precio de Reserva y Costos de Entrada

- Obsérvese que con un precio de reserva superior a la valoración del objeto por parte del subastador, existe una probabilidad positiva de que el objeto no sea asignado.
- Esto sugiere que para el subastador existe un compromiso entre eficiencia y optimalidad.