

Modelos de la Curva Forward

Seminario DERIVEX

Octubre 24 de 2012

Plan de la presentación

- 1 Introducción
- 2 Modelo de Espacio Estado del Precio y Curva (Karensen - Husby 2002)
- 3 Un modelo de factores semiparamétrico (Borak - Weron 2008)
- 4 Aplicación
 - Datos
 - Metodología
- 5 Pronóstico de la Curva Forward

Introducción

- Estacionalidad (dependencia de condiciones climáticas).
- Muy volátil.
- A diferencia de otros commodities, el precio spot es observado.
- La interpolación entre puntos tiene dificultades. Los contratos futuros son para entrega de energía durante todo un periodo de tiempo.
- Todos los modelos tiene en común que se trata de estimar un modelo conjunto del precio spot y la curva teniendo en cuenta la estacionalidad de las series.

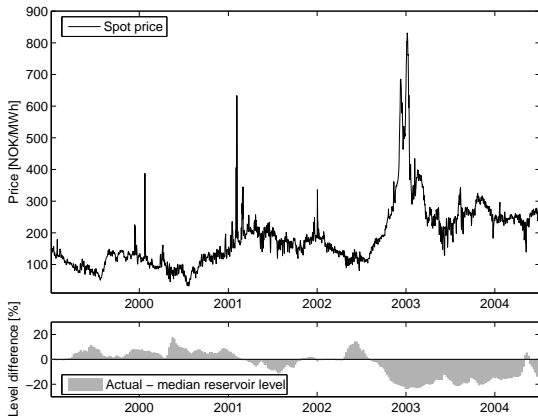


Fig. 6. *Top panel:* Daily average spot system prices in the period January 4, 1999 – July 6, 2004. *Bottom panel:* The difference (in percent) between the actual and median (for 1990-2003) reservoir levels in Norway. As long as the actual level is above the median, the spot prices behave 'normally'. When the actual level substantially drops below the median the prices increase, as in spring 2001 and autumn 2002.

Modelo de Espacio Estado del Precio y Curva (Karsenen - Husby 2002)

- Preliminares
- Supongamos que tenemos un mercado financiero caracterizado por el proceso estocástico del precio de un activo $S(t)$. Un activo contingente (derivado) con fecha de maduración T es cualquier variable aleatoria χ medible con respecto a la σ -álgebra en T . Es simple si se puede expresar como $\chi = \Phi(S(T))$.
- El proceso estocástico de valoración del derivado lo denotamos por $\Pi(t, \chi)$
- El modelo de Black - Scholes define un mercado completo, cualquier derivado se puede valorar como el valor presente del valor esperado bajo la (única) medida neutral al riesgo y todo activo contingente se puede replicar.

Modelo de Espacio Estado del Precio y Curva (Karensen - Husby 2002)

- En el caso de un contrato forward sobre un activo contingente, esto implica que el precio futuro del contrato en t es: $F(t, T, \chi) = E_t^Q [\chi]$.
- Para el caso de un un forward sobre un activo contingente simple: $F(t, T, \chi) = e^{(T-t)} S_t$

Modelo de Espacio Estado del Precio y Curva (Karensen - Husby 2002)

- Vamos a suponer que el precio futuro es el valor esperado del precio spot ajustado por riesgo de mercado e imperfecciones.
- El ajuste por riesgo de mercado se estima directamente de los datos.
- Se utilizan datos de Nord Pool. El precio spot es el promedio de la semana y para los precios futuros se usa el precio de cierre los viernes.

Modelo de Espacio Estado del Precio y Curva (Karensen - Husby 2002)

- El modelo es de la forma:

$$S(t) = \Lambda(t) \prod_{k=1}^K X_k(t) \quad (1)$$

donde los K factores son no observables, independientes y siguen un proceso autorregresivo de orden uno (en logaritmos). La innovación de cada autorregresivo es un parámetros desconocido (α_k, σ_k^2)

- $\Lambda(t)$ Es una componente determinística de la forma:

$$\Lambda(t) = \beta_0 + \sum_{j=1}^J \beta_1(j) \sin\left(\frac{2\pi jt}{52}\right) + \beta_2(j) \cos\left(\frac{2\pi jt}{52}\right) \quad (2)$$

Modelo de Espacio Estado del Precio y Curva (Karensen - Husby 2002)

- El precio forward:

$$F^S(t, T) = e^{\nu(T-t)} E[S(T)X_1(t), \dots X_k(t)] \quad p(37)$$

donde ν representa un parámetro de riesgo de mercado (por ejemplo si los vendedores de contratos son principalmente productores interesados en cubrir el precio y los compradores son especuladores, $\nu < 0$).

Modelo de Espacio Estado del Precio y Curva (Karensen - Husby 2002)

- Esto implica que el precio futuro (en logaritmos) es lineal en los factores (en logaritmos).
- Finalmente, a esta ecuación lineal que determina el precio futuro teórico ajustado por riesgo, le introducimos ruido para obtener los precios futuros observados.
- El modelo se puede expresar como un modelo de espacio estado, donde hay unas variables de estados no observables con una dinámica AR(1) y una ecuación de observación para las variables observables: precios spot y precio forward.

Modelo de Espacio Estado del Precio y Curva (Karensen - Husby 2002)

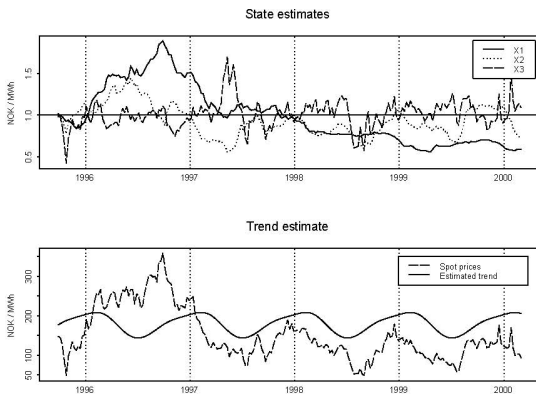


Figure 8: Top: State estimates for the three-factor model fitted to the NordPool el-price data. Bottom: Estimated seasonal trend and spot price data.

Modelo de Espacio Estado del Precio y Curva (Karensen - Husby 2002)

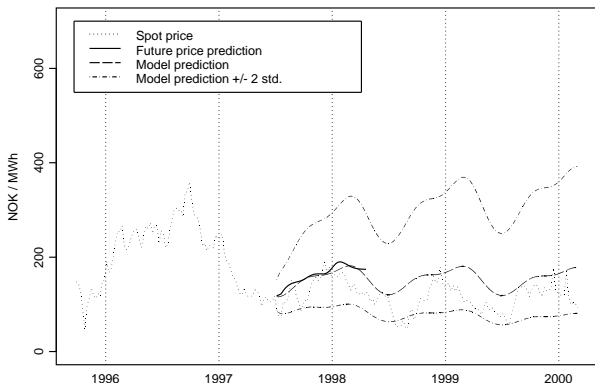


Figure 9: Predictions of the future spot price from the three-factor model compared to the market futures curves. Top: Prediction using the data up to week 13 in 1996. Bottom: Prediction using the data up to week 26 in 1997.

Un modelo de factores semiparamétrico (Borak - Weron 2008)

- Aplicado al mercado Nordico de commodities (Nord Pool):
Establecido en 1992, hoy en día es el mayor mercado del mundo en volúmenes transados (250 % del consumo de Noruega), participan 20 países, el 70 % de la energía consumida en Noruega es transada en este mercado, se transan futuros, opciones, contratos de diferencias y sirve de cámara para contratos OTC (forward hasta seis años para el vencimiento).

Un modelo de factores semiparamétrico (Borak - Weron 2008)

- Se usaron precios de cierre para el periodo Enero 1999 - Julio 2006.
- Los contratos futuros o forward son obligaciones para entregar 1MW cada hora por el período de entrega.
- La negociación de un contrato se suspende cuando se entra en el período de entrega (diarios, semanales, mensuales, estacionales, etc.)
- Se liquidan financieramente con base en el precio de cierre de la subasta diaria de electricidad.

Un modelo de factores semiparamétrico (Borak - Weron 2008)

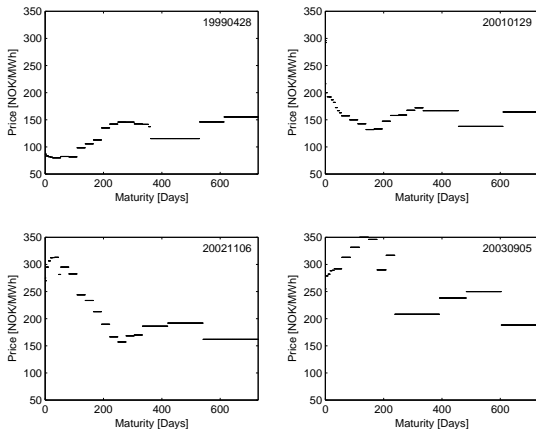


Fig. 1. The term structure of electricity prices observed on four different days: April 28, 1999, January 29, 2001, November 6, 2002, and September 5, 2003.

Un modelo de factores semiparamétrico (Borak - Weron 2008)

- El modelo propuesto es:

$$Y_{t,j} = m_0(X_j) + \sum_{l=1}^L Z_{t,l} m_l(X_j) + \epsilon_{t,j} \quad (4)$$

donde

- $Y_t = (Y_{t,1}, \dots, Y_{t,J_t})$ es la observación en t de la curva forward con vencimientos $j = 1, \dots, J_t$.
- $Z_{t,l}$ son los factores comunes (no observables).
- X_j son covariantes observables.
- $m_l(X_j)$ es un B -spline.

Un modelo de factores semiparamétrico (Borak - Weron 2008)

- Las funciones B -splines son de la forma:

$$m_l(X_j) = \sum_{k=1}^K a_{l,k} \varphi_k(X_j) \quad (5)$$

donde K es el número de nodos, φ_k son funciones spline y $a_{l,k}$ son coeficientes.

Un modelo de factores semiparamétrico (Borak - Weron 2008)

Para determinar los factores no observables $Z_{t,l}$ y los coeficientes $a_{l,k}$ se resuelve el siguiente problema:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J \left\{ Y_{t,j} - \sum_{l=1}^L Z_{t,l} \sum_{k=1}^K a_{l,k} \varphi_k(X_j) \right\} \quad (6)$$

Un modelo de factores semiparamétrico (Borak - Weron 2008)

- El modelo se calibró en el periodo mencionado utilizando $L = 2, 4, 5, 6$, $T = 500$ días hábiles, $X_j = 15, 15,5, 16, 16,5, \dots, 730$ representa los días al vencimiento.
- La siguiente figura muestra la serie de tiempo de factores no observables y *loading coefficients*.

Un modelo de factores semiparamétrico (Borak - Weron 2008)

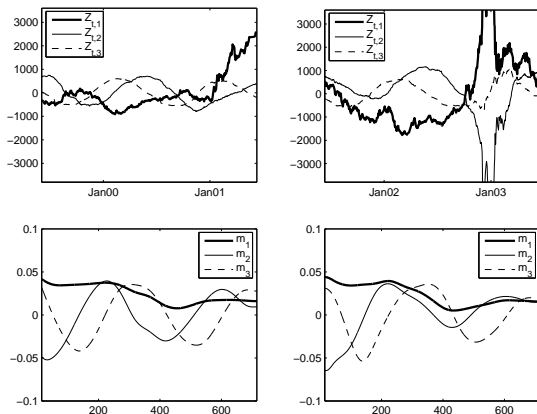


Fig. 2. Estimated time series $\hat{Z}_{t,l}$ (upper panels) and loadings $\hat{m}_l(X_j)$ (lower panels) for the DSFM of order $L = 3$ and $X_j = 15, 15.5, 16, \dots, 730$ days (the functions \hat{m}_0 are not displayed). The data sample covering the period June 3rd, 1999 – June 17th, 2003 is divided into two adjacent time intervals: until June 11th, 2001 (left panels) and after (and including) June 12th, 2001 (right panels). The structure of the loading functions seems to be stable throughout the sample, however, the time series $\hat{Z}_{t,l}$ vary considerably between the periods.

Un modelo de factores semiparamétrico (Borak - Weron 2008)

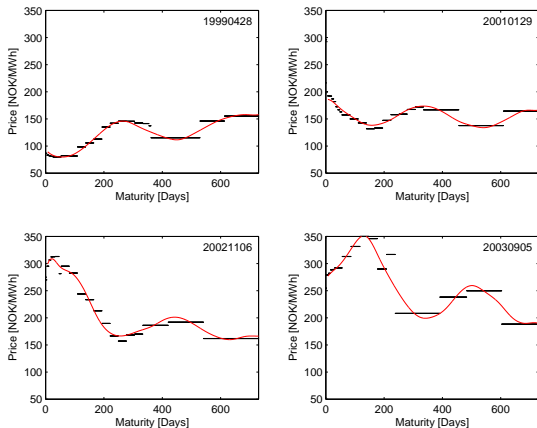


Fig. 3. The term structure of electricity prices and the estimated forward curves (for $L = 3$) observed on the same four days as in Figure 1.

Un modelo de factores semiparamétrico (Borak - Weron 2008)

- Conclusiones

- ① Tres factores ($L = 3$) parecen ser suficientes para capturar gran parte de la dinámica.
- ② La función m_1 es relativamente plana y puede interpretarse como el nivel de la curva.
- ③ $Z_{t,1}$ Representa la tendencia de la curva.
- ④ Los otros dos factores representan comportamientos periódicos. El período es aproximadamente un año.

Aplicación

- El objetivo principal de la presentación es exponer una metodologías para la calibración de la curva forward a los datos del mercado de futuros de energía en Colombia.

- Se tiene una base de datos con los precios diarios de los futuros de energía transados en el mercado de valores Colombiano desde octubre del 2010 hasta agosto del 2012.
- Hasta el 4 de Octubre del 2011 se transaban cuatro futuros por día, a partir del 5 de Octubre del 2011 se transan 13 futuros por día.
- Los futuros en el mercado Colombiano son mensuales por ende la curva forward va hasta 13 meses adelante de la fecha en la cual es observada.

- Se sigue la metodología de Borak & Woran (2008) ¹
- La versión general del modelo que se considerará es un modelo de factores donde $Y_t = (Y_{t,1}, \dots, Y_{t,J})$ es un vector J -dimensional de observaciones que puede ser representado por un modelo L -dimensional de factores:

$$Y_{t,j} = m_{0,j} + Z_{t,1}m_{1,j} + \dots + Z_{t,L}m_{L,j} + \varepsilon_{t,j}$$

- Los $Z_{t,j}$ son los factores comunes de los $Y_{t,j}$, los $m_{i,j}$ son los "loadings" y los $\varepsilon_{t,j}$ son los errores del modelo.
- La idea del uso de modelos de factores es que $L \ll J$

¹A *semiparametric factor model for electricity forward curve dynamics*.

Modelo Dinámico Semiparamétrico de Factores

- El modelo general se modificará introduciendo unos covariantes $X_{t,j}$ de manera que los $m_{i,j}$ van a ser ahora funciones generalizadas de los covariantes:

$$Y_{t,j} = m_{0,j}(X_{t,j}) + \sum_{l=1}^L Z_{t,l} m_{l,j}(X_{t,j}) + \varepsilon_{t,j}$$

- Las funciones m_l son no paramétricas
- Los factores $Z_{t,l}$ representan la parte paramétrica del modelo, por esto el modelo se llama *Modelo Dinámico Semiparamétrico de Factores*.
- Adicionalmente, se puede permitir que la dimensionalidad de la serie de tiempo varíe, es decir tener J_t .

Modelo Dinámico Semiparamétrico de Factores

- En el contexto de la construcción de una curva forward para el precio de la electricidad $Y_{t,j}$ representa el precio forward observado en el día $t = 1, \dots, T$ para ser entregado en el día $j = 1, \dots, J_t$
- Las funciones m_l van a ser linearizadas por medio de B-splines, por ende

$$m_l(X_j) = \sum_{k=1}^K a_{l,k} \psi_k(X_j)$$

- Donde K es el número de nodos, ψ_k son las splines, y $a_{l,k}$ son los coeficientes apropiados

- La estimación del modelo se hace calibrando las funciones m_l y las series $Z_{t,l}$ minimizando el siguiente criterio de mínimos cuadrados:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J \left\{ Y_{t,j} - \sum_{l=0}^L Z_{t,l} \sum_{k=1}^K a_{l,k} \psi_k(X_j) \right\}^2$$

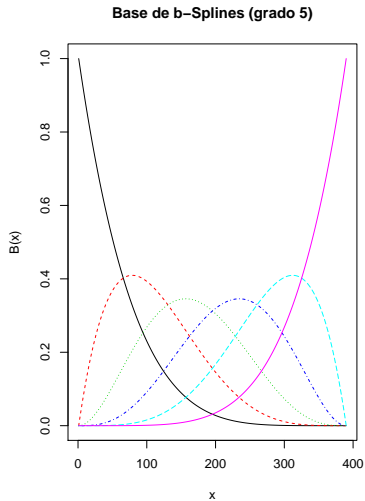
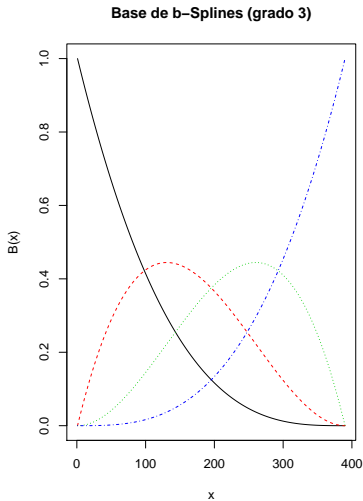
- El algoritmo para calibrar consiste en:
 - Se inicializa $\hat{Z}_{t,l}^{(0)}$ como un ruido blanco de las dimensiones adecuadas.
 - Tomando $\hat{Z}_{t,l}^{(0)}$ se optimiza para $\hat{a}_{l,k}^{(0)}$
 - Posteriormente, se procede iterativamente optimizando para $\hat{Z}_{t,l}$ y $\hat{a}_{l,k}$ hasta que se alcanza una convergencia.²

²Para mas detalles en el proceso de calibración referirse a: Borak et al (2007). *Time series modelling with semiparametric factor dynamics*. Discussion Paper SFB 649. Humboldt-Universität zu Berlin

- Los parámetros utilizados para la aplicación al mercado colombiano fueron:
 - La grilla utilizada fue de $J = 390$ puntos separados de manera equidistantes por 1 día.
 - Los X_j así definidos representan los días a la maduración (entrega).
 - Para los ψ_k se utilizó una base de b-Splines de orden 3 o 5.
 - La ventana para la calibración del modelo fue de 50 días.
 - Se usaron 3 factores (Z). Es decir $L=3$.

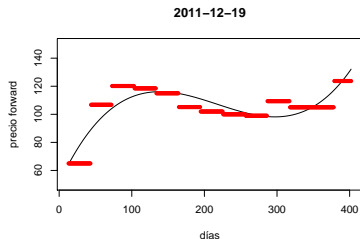
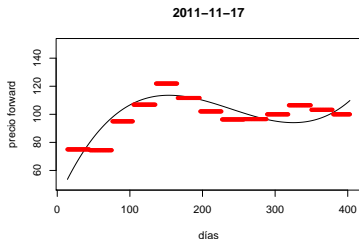
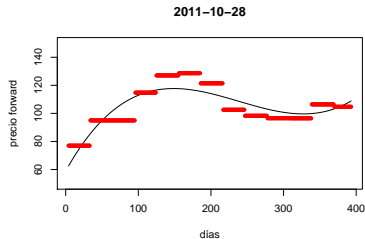
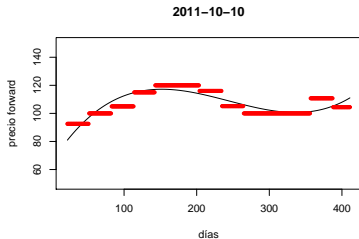
Base de b-Splines

- La base de b-Splines usada típicamente se ve como en la siguiente gráfica:



Calibración de la Cuva Forward

- Curvas Calibradas con Splines de grado 3 (ventana empezando el 10 Octubre del 2011).



Factores Calibrados

- Factores calibrados para las curvas calibradas con Splines de grado 3 (ventana empezando el 10 Octubre del 2011).

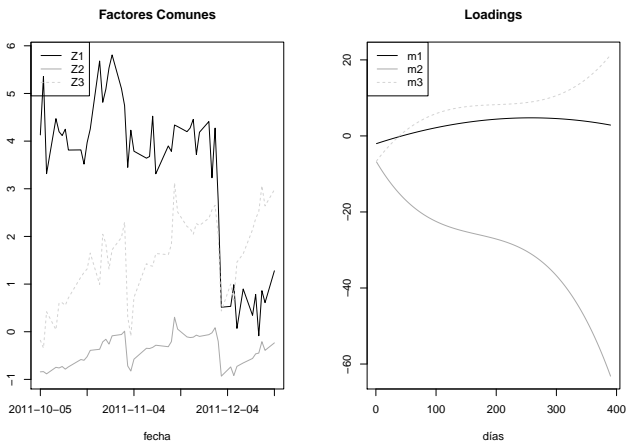
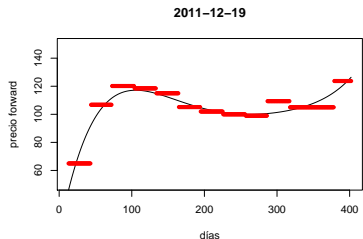
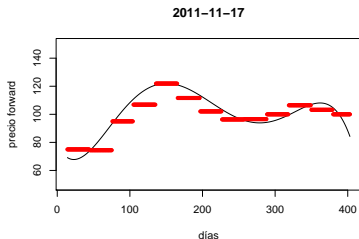
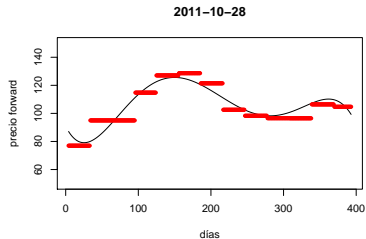
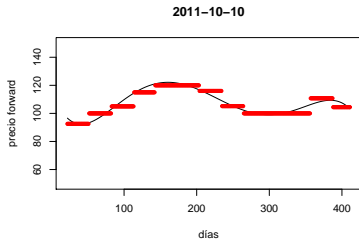


Figura: Factores Calibrados

Calibración de la Cuva Forward

- Curvas Calibradas con Splines de grado 5 (ventana empezando el 10 Octubre del 2011).



Factores Calibrados

- Factores calibrados para las curvas calibradas con Splines de grado 5 (ventana empezando el 10 Octubre del 2011).

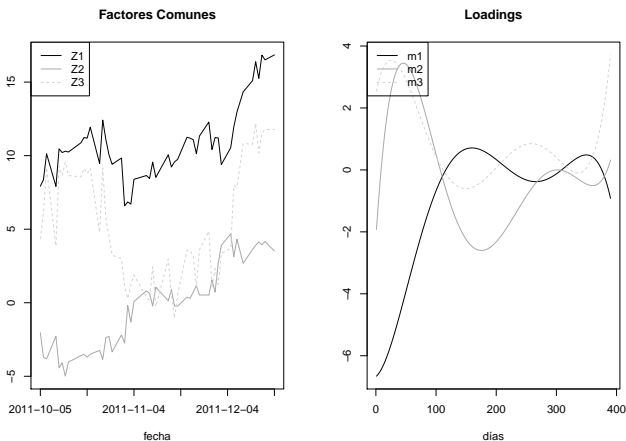
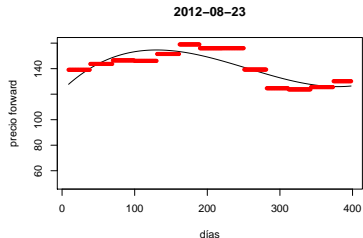
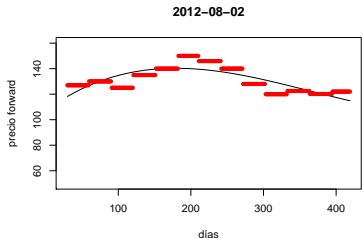
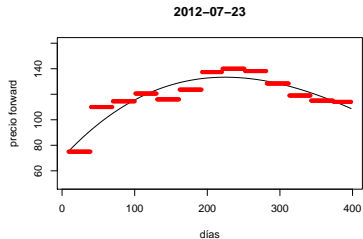
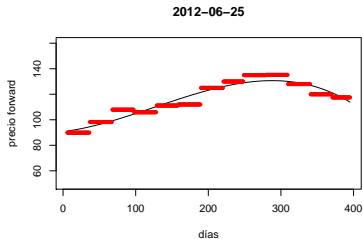


Figura: Factores Calibrados

Calibración de la Cuva Forward

- Curvas Calibradas con Splines de grado 3 (ventana 2012-06-15 al 2012-08-30).



Factores Calibrados

- Factores calibrados para las curvas calibradas con Splines de grado 3 (ventana 2012-06-15 al 2012-08-30).

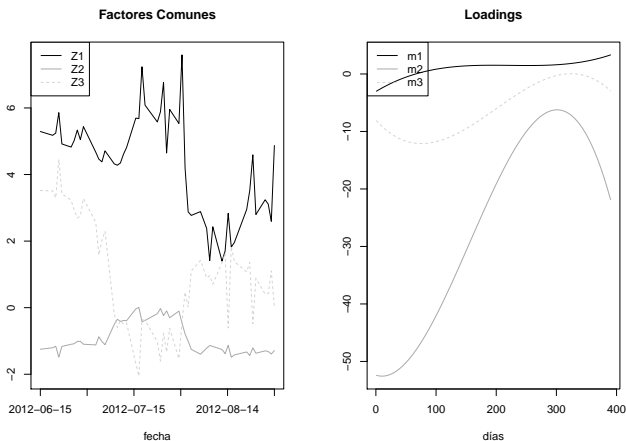
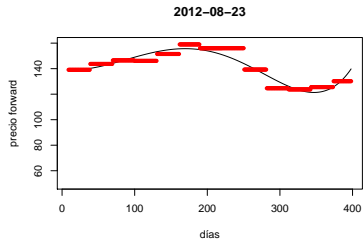
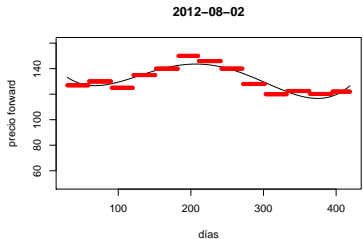
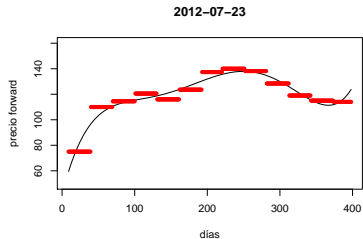
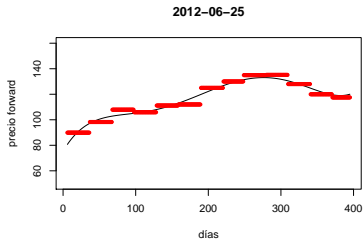


Figura: Factores Calibrados

Calibración de la Cuva Forward

- Curvas Calibradas con Splines de grado 5 (ventana 2012-06-15 al 2012-08-30).



Factores Calibrados

- Factores calibrados para las curvas calibradas con Splines de grado 5 (ventana 2012-06-15 al 2012-08-30).

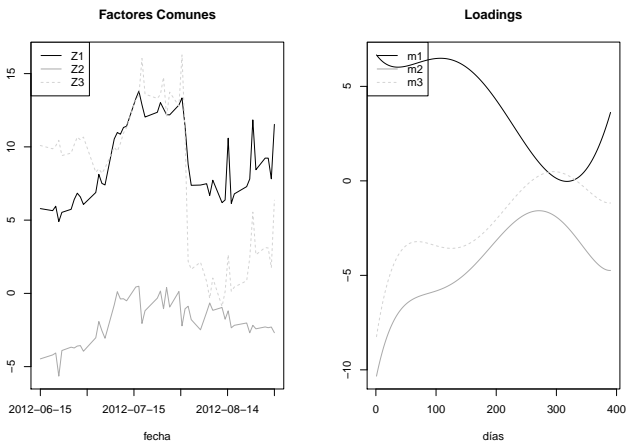


Figura: Factores Calibrados

Factores Calibrados

- Se realizará un pronóstico de la curva forward por medio del ajuste de un modelo VAR a los factores calibrados al período 2012-06-15 al 2012-08-30.

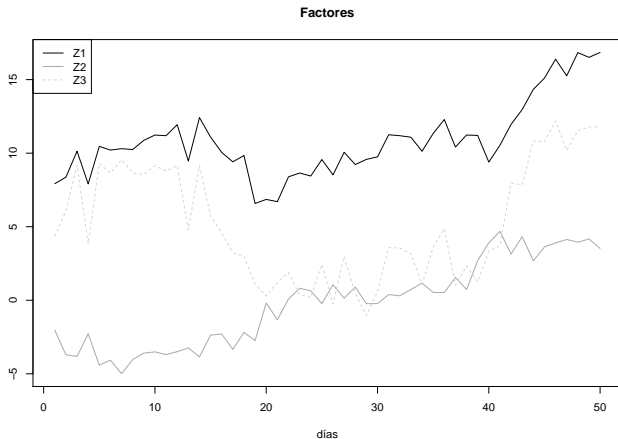


Figura: Factores Calibrados

Selección del VAR Óptimo

- El número de rezagos óptimo del VAR se seleccionó mediante el criterio AIC, arrojando como óptimo 2 rezagos por variable
- A continuación se presentan unas gráficas con el análisis del ajuste y los residuos del VAR:

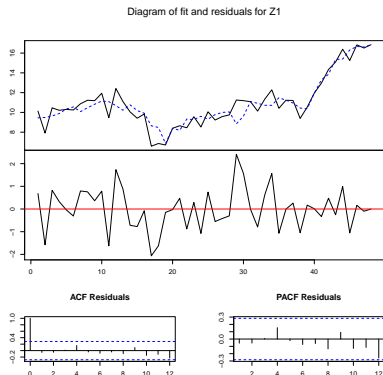
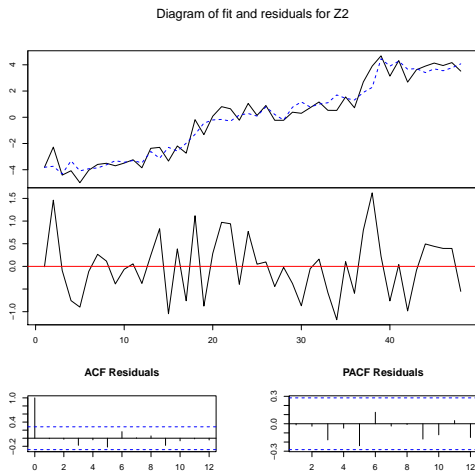


Figura: Análisis del ajuste y los residuos para Z1

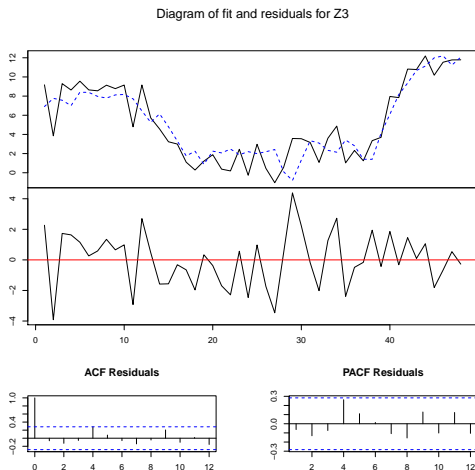
Ajuste del VAR

- A continuación se presentan unas gráficas con el análisis del ajuste y los residuos del VAR para Z_2 :



Ajuste del VAR

- A continuación se presentan unas gráficas con el análisis del ajuste y los residuos del VAR para Z_3 :



Pronóstico de la Curva Forward

- Se pronostican los Factores usando el VAR ajustado.
- Los pronósticos de los Factores permiten pronosticar la curva forward del precio de la energía.
- A continuación se presenta una gráfica con los resultados

